[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　y′

0.1　以下の問に答えよ．ただし，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ である．

(1)　微分方程式　$x^3y' + y^2 = 0$　を解け．

(2)　線形非同次方程式　$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$　の一般解を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030102)

0.2　以下の微分方程式の一般解を計算せよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1)　$y' - 3y = e^x$

(2)　$y'' + 2y' + y = 0$

(北海道大 2010)　　(m20100101)

0.3　2 次の正方行列 A による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ．また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ で与えられる.

(2)　A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2 + s^2 = 1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(3)　$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対称行列である．A を直交行列を用いて対角化せよ.

(4)　(3) と同じく，$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を考える．この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ.

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.4　以下の微分方程式を解きなさい.

(1)　$y' = xy - x - y + 1$　　(2)　$y'' - 6y' + 5y = 13\cos x$

(北海道大 2017)　　(m20170107)

0.5　$y = e^{-x^2}$ とする，y' , y'' を求め, グラフの概形を書け.

(北見工業大 2005)　　(m20050203)

0.6 関数 $y = e^{-x^2}$ について

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) 増減表を作り, グラフを描け.

(北見工業大 2011) (m20110204)

0.7 関数 $y = e^{-x}\sin x$ （ただし，$0 < x < 2\pi$ の範囲で考える）について次の問 (1), (2) に答えよ.

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) y', y'' の符号を調べ, 増減・凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.

(北見工業大 2017) (m20170204)

0.8 関数 $y = e^{-x^2}$ について次の問 (1), (2) に答えよ.

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) y', y'' の符号を調べ, 増減, 凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.
（変曲点があれば変曲点における $y = e^{-x^2}$ の接線も同じ xy 平面上に描くこと.）

(北見工業大 2019) (m20190210)

0.9 以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を $y = C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}$ と仮定して求めよ．ただし，C_1 及び C_2 は任意定数とする.

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

(2) 次の微分方程式の特殊解を $y = Ae^{Bx}$ と仮定して求めよ.

$$y'' - 5y' + 4y = e^x$$

(3) 次の 2 つの微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x), \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_2(x)$$

の一般解をそれぞれ $y = f(x)$, $y = g(x)$ とするとき，$y = f(x) + g(x)$ は次の微分方程式

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R_1(x) + R_2(x)$$

の解であることを示せ.

(4) (3) の結果を用いて，次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'' - 5y' + 4y = e^x + e^{4x}$$

(岩手大 1997) (m19970303)

0.10 重積分 $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x-y}\,dydx$ に関し, 次の問に答えなさい.

(1) この重積分の積分範囲を図示しなさい.

(2) この重積分の値を求めなさい.

(3) この重積分の積分順序を変更した式を示しなさい.

(4) 積分順序を変更した式から, 重積分の値を求める計算をしなさい.

(岩手大 2006) (m20060304)

0.11　次の微分方程式の一般解を求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(1)　$y' = y^2 + y$　　(2)　$y + 2xy' = 0$　　(3)　$y'' - 4y' + 3y = x$

(岩手大 2008)　　(m20080303)

0.12　２階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　関数 $y = A\sin 3x - B\cos 3x$（A, B は任意定数）は一般解であることを証明しなさい．

(2)　初期条件「$x = 0$ のとき $y = 1$, $y' = 3$」を満たす特殊解を求めなさい．

(3)　境界条件「$x = \dfrac{\pi}{3}$のとき $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{9}$のとき $y = 1$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120304)

0.13　2 階微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = -85\sin 3x$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$y = 6\cos 3x + 7\sin 3x$ が上の微分方程式の 1 つの解であることを示しなさい．

(2)　(1) の結果を利用して上の微分方程式の一般解を求めなさい．

(3)　$x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 0$ を満たす上の微分方程式の解を求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130304)

0.14　2 階微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 14$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　上の微分方程式の特性方程式 $S^2 + 3S + 2 = 0$ の解を求めなさい．

(2)　微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 14$ の一般解を求めなさい．

(3)　上の (2) の微分方程式について，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$ を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160303)

0.15　微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1)　微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2)　微分方程式の一般解を求めなさい．

(3)　微分方程式について，初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ をみたす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180304)

0.16　微分方程式 $y'' - 2y' + 4y = e^{2x}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1)　微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2)　微分方程式の特殊解を求めなさい．

(3)　微分方程式の一般解を求めなさい．

(岩手大 2019)　　(m20190304)

0.17　微分方程式 $\dfrac{x}{2}y' + y = g(x)$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　$g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい．

(2)　$g(x) = x^2 + \dfrac{1}{4+x}$ のときの一般解を求めなさい．

(3)　(2) のときの「$x = -3$, $y = 2$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2021)　　(m20210304)

0.18 微分方程式 $y'' - y' - 2y = g(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $g(x) = 0$ のときの一般解を求めなさい．

(2) $g(x) = e^{3x}$ のときの特殊解を求めなさい．

(3) (2) のときの一般解を求めなさい．

(岩手大 2022)　　(m20220305)

0.19 次の微分方程式を解きなさい．　　$xy' = y(y-1)$

(秋田大 2001)　　(m20010407)

0.20 方程式 $x + y - z = 0$ を満たす 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ で, 互いに一次独立になるものを一組挙げよ.

(秋田大 2005)　　(m20050402)

0.21 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る直線で，次の性質を持つものを考える．

(性質) この直線上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を，行列 A で変換した点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ も，この直線上にある．

例えば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は任意の実数})$$

と表される直線 l_1 は，このような直線の一つである．この性質を持つ，l_1 と異なる直線を全てあげなさい．

(秋田大 2016)　　(m20160404)

0.22 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1'y_2' - x_2'y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x'_1 = 0,\ x'_2 > 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　(m20010503)

0.23 2 次曲線 $C\ :\ 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 18 = 0$ は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp} - 18 = 0$ と表すことができる. ただし，${}^t\boldsymbol{p} = (x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}'$ を行えば, 2 次曲線 C は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 C の標準形を x' , y' を用いて表せ.

(3) x 軸と x' 軸のなす角度を求め, x 軸 , y 軸と x' 軸 , y' 軸の関係を図示し，2 次曲線 C の概形を描け.

(東北大 2005)　(m20050501)

0.24 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す． $\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す.

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め，これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ.

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする．つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である． $\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であるとき，p を q, r, s で表せ.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする.

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(東北大 2012)　(m20120505)

0.25 領域 $D = \left\{ (x, y) \ \middle| \ x^2 + y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y \right\}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D の面積 S を求めよ.

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される．

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S: \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.26 次の微分方程式をそれぞれ解け．

(1) $y^2+1-2x\sqrt{x-1}\,y'=0$　　(2) $y''-\sqrt{1+y'}=0$

(東北大 2022)　　(m20220504)

0.27 図の様に，x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．

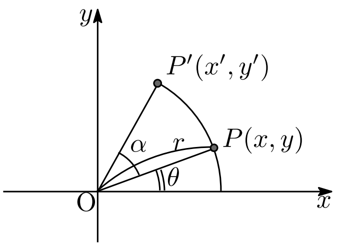
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta+\alpha)=\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha)=\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha)=\cos\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha)=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z=x+iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999)　　(m19990610)

0.28 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y'とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) $A,\ B$ のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100606)

0.29 (1) 座標系 $\{x, y\}$ から $\{x', y'\}$ への線形変換で, $x^2 - y^2$ を不変にするものを求めてください.

(2) 正方形はどのように変換されるか, 2 次元面に図示してください.

(お茶の水女子大 2014)　(m20140604)

0.30 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x + 3y)dx + (3x - y)dy = 0$　(2) $y'' + 2y' - 3y = e^x$

(お茶の水女子大 2016)　(m20160613)

0.31 逆三角関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ (ただし, $-\pi/2 \leq f(x) \leq \pi/2$) について, 以下の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け.

(2) $\cos\left(\sin^{-1} x\right)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x で微分せよ.

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(5) $y = f(x)$ として $y''(1 - x^2) = y'x$ がり立つことを示せ.

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2017)　(m20170605)

0.32 以下の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2x - 2$

(2) $xydy - (3x^2 + y^2)dx = 0$

(お茶の水女子大 2021)　(m20210601)

0.33 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $ydx - x^4dy = 0$　(2) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^4y^3$

(お茶の水女子大 2022)　(m20220601)

0.34 一次変換 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ によって $\dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{5} = 1$ はどのような図形に変換されるか, 図形の方程式を示せ.

(お茶の水女子大 2022)　(m20220602)

0.35 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ を S とする. S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする. ただし, 符号はすべての組み合わせをとる. 曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする. 領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい. 以下の問いに答えよ.

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2 + 2y^2 + 3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ.

(2) 球 $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.36 以下の微分方程式の解を求めよ．

(1) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$

(2) $y'' + Ay' + By - Cx - D = 0$　(ただし，A, B, C, D は実数とする．)

(3) $ydx - (3x + 2y^2)dy = 0$

(4) $yy'' + (y')^2 - 5y' = 0$

ただし，上の式において $y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(東京大 2004)　　(m20040703)

0.37 (1) 次の微分方程式を解け．

(a) $(2xy + x^2)y' = 2(xy + y^2)$

(b) $y' + 2y\cos x = \sin(2x)$

(2) 次の微分方程式を示した条件のもとで解け．

$y'' + y' - 2y = 3e^x$,　$y(0) = 1$,　$y'(0) = 1$

(東京大 2005)　　(m20050701)

0.38 (1) 微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

について，左辺がある関数 $u(x, y)$ の全微分 $du(x, y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$ に等しいならば，微分方程式 (1) の一般解は $u(x, y) = C$ (C は任意定数) で与えられる．このような方程式 (1) は完全微分形であるという．以下の設問に答えよ．

(a) 微分方程式

$$-ydx + xdy = 0$$

は，完全微分形ではないが，両辺に $\dfrac{1}{xy^\alpha}$ をかけることによって完全微分形の方程式を得ることができる (αは定数)．α の値を求め，完全微分形の微分方程式を導出せよ．

(b) (a) で得られた完全微分形の微分方程式を，$x = 1$ のとき $y = e$ の条件の下で解け．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (a) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad (2)$$

について，$x = e^t$ と変数変換することにより定係数の微分方程式を導出せよ（その過程も示せ）．ただし，e は自然対数の底である．

(b) (a) で導出した微分方程式を解くことにより微分方程式 (2) の一般解を求めよ．

(c) 微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x\log_e x$$

について，$x=1$ において $y=1$，$\dfrac{dy}{dx}=0$ となる解を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090705)

0.39 以下の問いに答えよ. ただし, $y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''+2y'-3y=x+\cos x$$

(2) 微分方程式

$$2yy''-3(y')^2=y^2 \qquad y(0)=1\,,\ y'(0)=1 \qquad (*)$$

を考える. ただし, $y>1/2$，$y'>0$ とする.

(a) $p=y'$ とおいて, 式 $(*)$ を p と y の 1 階微分方程式

$$f(y,p)\frac{dp}{dy}-3p^2=y^2 \qquad (**)$$

の形に変形する. このとき $f(y,p)$ を求めよ.

(b) 式 $(**)$ を解いて, p を y の式で表せ.

(c) 式 $(*)$ を解いて, y を x の式で表せ.

(東京大 2010)　　(m20100702)

0.40 以下の問いに答えよ．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 微分方程式

$$y'=p(x)+q(x)y+r(x)y^2 \qquad (*)$$

は，特殊解 $y_1(x)$ 持つことがわかっているとする．

(a) 式 $(*)$ の一般解を $y=y_1(x)+1/u(x)$ とおき，$u(x)$ に関する微分方程式を $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，$y_1(x)$ を用いて表せ．

(b) $y'=(x^2+x+1)-(2x+1)y+y^2$ は，特殊解 $y_1(x)=x$ を持つことがわかっている．一般解を求めよ．(a) で求めた結果を用いてもよい．

(2) 微分方程式

$$\alpha y''+y'+y=0 \qquad y(x=0)=1,\ \ y'(x=0)=2 \qquad (**)$$

を考える．

(a) $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ を一般解とする．λ_1，λ_2，C_1，C_2 をそれぞれ α で表せ．ただし，e は自然対数の底とする．

(b) $x\geqq 0$ において，式 $(**)$ の解を

$$y'+y=0 \qquad y(x=0)=\beta$$

の解で近似することを考える．α が十分小さい場合，β をどのように選べば近似できるか，(a) で求めた λ_1，λ_2，C_1，C_2 を用いて説明せよ．

(東京大 2011)　　(m20110701)

0.41 次の微分方程式を，初期条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ のもとに解け．ただし，e は自然対数の底である，また，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$y''-4y'+3y=e^{-x}$$

(東京大 2013)　　(m20130706)

0.42 微分方程式に関する以下の問いに答えよ; ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の定係数微分方程式

$$y'' - (a+2)y' + 2ay = f(x)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

(a) $f(x) = 0$ のとき，一般解を求めよ.

(b) $f(x) = 5e^{-3x}$ かつ $a < 0$ のとき，一般解を求めよ.
ただし，e は自然対数の底とする.

(2) 次のオイラー型の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

(3) 次の連立微分方程式において，$y_1(0) = 4$, $y_2(0) = -3$ を満たす解を求めよ.

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2' = 2y_1 + 5y_2 \\ 2y_1' - y_2' = 14y_1 + 5y_2 \end{cases}$$

(東京大 2016)　　(m20160701)

0.43 微分方程式に関する以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^x$$

を境界条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ のもとで解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = (1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0) = \dfrac{1}{2}$ とする.

(3) $x > 0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{A}{x}\frac{du}{dx} - u = 0 \cdots (*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，A は定数で $A \leq 1$ とする.

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2f_\alpha}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{df_\alpha}{dx} - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)f_\alpha = 0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x) \neq 0$ があるとする．ただし，α は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x) = f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (ア) \quad\Big]\frac{df_\alpha}{dx} + \Big[\quad (イ) \quad\Big]f_\alpha = 0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, A, α を用いて表せ.

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては C を用いよ.

(東京大 2018)　　(m20180701)

0.44 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする.

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.45　2 階線形微分方程式 $y'' - 2y' + 5y = e^x$ に対して，初期値問題 $y(0) = p,\ y'(0) = q$ の解を求めよ．

(東京工業大 1999)　　(m19990802)

0.46　微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^x$ の解で，$y(0) = 1$，$y(1) = e/4$ を満たすものを求めよ．

(東京工業大 2003)　　(m20030802)

0.47　次の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $y' + y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $y' + y = e^{-x}$ の一般解を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140804)

0.48　(1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\, dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.49　(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ を解け．

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ を解け．

(東京農工大 1996)　　(m19960905)

0.50　微分方程式 $y' = \dfrac{y}{x^2 + 1}$ の解 $y = y(x)$ で，初期条件 $y(1) = e^{\frac{\pi}{2}}$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060907)

0.51 x の関数 y について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $y' + y = 1$ を解きなさい．

(2) 微分方程式 $2y' - y = -y^3$ $\left(\text{初期条件 } x = 0,\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を，$z = \dfrac{1}{y^2}$ と置いて，z の微分方程式に書き換えて解きなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080904)

0.52 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 4x$$

の解のうち, $y(0) = 0$, $y(1) = 2$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2010)　　(m20100904)

0.53 微分方程式

$$y'' - 2y' + y = (3x + 1)e^x$$

の解 $y = y(x)$ のうち，$y(0) = 3,\ y'(0) = -2$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2012)　　(m20120904)

0.54 x の関数 $y = y(x)$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式 $y' = y(1 - y)$ の解のうち，$y(0) = \dfrac{1}{3}$ を満たすものを求めなさい．

(2) 微分方程式 $y'' + 4y = e^x$ の解のうち，$y(0) = \dfrac{6}{5},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{6}{5}e^{\frac{\pi}{4}}$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2013)　　(m20130905)

0.55 微分方程式

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}$$

の解 $y = y(x)$ のうちで条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2014)　　(m20140903)

0.56 x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式　$y'' - y' - 6y = 6x + 4e^{-x}$
の解のうち，$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．

(東京農工大 2016)　　(m20160904)

0.57 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$ の解 $y = y(x)$ が，$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たすとき，y を求めなさい．ただし $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2017)　　(m20170904)

0.58 t の関数 $x = x(t),\ y = y(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{cases} x' - 3x + y = -2e^{2t} \\ 6x + y' - 4y = 4e^{2t} \end{cases}$$

の解で，初期条件 $x(0) = 4,\ y(0) = 1$ を満たすものを求めなさい．ただし，$x' = \dfrac{dx}{dt},\ y' = \dfrac{dy}{dt}$ である．

(東京農工大 2018)　　(m20180904)

0.59　x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 18xe^{2x}$$

の解のうち，$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2019)　　(m20190904)

0.60　x の関数 $y = y(x)$ についての微分方程式　$y'' + 6y' + 9y = 3e^{-3x}$　の解で，
初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$ を満たすものを求めなさい．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2020)　　(m20200904)

0.61　次の重積分および 3 重積分の値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D x^2 d, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqq 2x\}$

(2)　$\displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz, \quad V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$

(電気通信大 2001)　　(m20011004)

0.62　次の重積分の値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D \frac{4(x-y)}{1+(x+y)^2} dxdy\,, \quad D : y \geqq 0\,,\ x - y \geqq 0\,,\ x + y \leqq 1\,.$

(2)　$\displaystyle\iiint_E xydxdydz\,, \quad E : x \geqq 0\,,\ y \geqq 0\,,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\,.$

(電気通信大 2006)　　(m20061002)

0.63　次の重積分，3 重積分を求めよ．

(1)　$\displaystyle\iint_D (x+y)^2 e^{2(x-y)} dxdy\,, \quad D = \{(x, y)\ :\ |x + y| \leqq 1,\ |x - y| \leqq 1\}$

ただし，e は自然対数の底とする．

(2)　$\displaystyle\iint_D xy\, dxdy\,, \quad D = \left\{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0\right\}$

(3)　$\displaystyle\iiint_V \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\, dxdydz\,, \quad V = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2012)　　(m20121004)

0.64　次の重積分，3 重積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1)　$\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2} dxdy\,, \quad D = \{(x, y) : 0 \leqq x - y \leqq x + y \leqq 1\}$

(2)　$\displaystyle\iiint_V xy\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}\, dxdydz\,, \quad v = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$

(電気通信大 2015)　　(m20151004)

0.65　(1)　積分順序を交換することにより，次の累次積分の値を求めよ．

$$\int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{x \sin y}{y} dy$$

(2)　次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V x^2 dxdydz\,, \qquad V = \left\{(x, y, z)\ :\ y \leqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2 + y^2 + x^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2017)　　(m20171004)

0.66 次の重積分，3 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iiint_E xyzdxdydz, \quad E=\left\{(x,y,z)\ :\ y \geqq x \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2018)　　(m20181004)

0.67 以下の各問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y'=y^2-1$ の解 $y=y(x)$ で，初期条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(2) 次の各微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．

(i) $y'+2y\cos x=\cos x$　　(ii) $y''+2y'+2y=\cos 3x$

(電気通信大 2019)　　(m20191004)

0.68 次の微分方程式を解け．

(3) $y''+2y'+y=\sin 2x$

(電気通信大 2021)　　(m20211005)

0.69 次の重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle I_1=\iint_{D_1} e^y\, dxdy, \qquad D_1=\left\{(x,y)\ :\ 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\right\}$

(2) $\displaystyle I_2=\iint_{D_2} x\sqrt{x}\, dxdy, \qquad D_2=\left\{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq x\right\}$

(3) $\displaystyle I_3=\iiint_V y\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\, dxdydz, \quad V=\left\{(x,y,z)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1\right\}$

(電気通信大 2022)　　(m20221004)

0.70 (1) 1 階常微分方程式の一般形は以下のように与えられる．

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad ①$$

この式の解の公式を導く．以下の記述の空欄を埋めなさい．

まず，同次（斉次）方程式の解を求める．① の同次方程式は以下のように表される．

$$y'+P(x)y=\boxed{\text{（ア）}}$$

この同次方程式は，変数分離形であるので，解は，任意の定数を C として，以下のように求められる．

$$y=C\cdot\boxed{\text{（イ）}} \qquad (\cdot \text{ は積を意味する.})$$

この結果を用いて，① の解を定数変化法で求める．従って，① の解を

$$y=C(x)\cdot\boxed{\text{（イ）}} \qquad ②$$

とおく．これを ① の左辺に代入して整理すると

$$y'+P(x)y=C'\cdot\boxed{\text{（イ）}}=Q(x)$$

すなわち，

$$C'=Q(x)\cdot\boxed{\text{（ウ）}}$$

両辺を積分して $C(x)$ を求め，② に代入すると，① の解の公式が以下のように求められる．

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

(2) (1) を参考にして，微分方程式を解く方法のひとつである，“定数変化法”について説明しなさい．

(3) 次の微分方程式を (1) の公式を用いて解きなさい．

$$y' - y = e^x$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081103)

0.71 以下の 3 問から 2 問選択して解答せよ．3 問解答してはならない．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$y' = \dfrac{4x-2y}{2x-y-1}$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．　$y'' - y' + y = 0$

(3) 微分方程式　$xy' - y - x\log x = 0$　において，初期条件 $y(1) = 0$ を満たす特殊解を求めよ．

(横浜国立大 2016)　　(m20161103)

0.72 微分方程式　$y'' + 4y' + 4y = x^2$　の一般解を求めよ．

(千葉大 1996)　　(m19961203)

0.73 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x, y) = (1, 2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X', Y') = (1, 2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい．

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい．

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011203)

0.74 次の微分方程式の初期条件を満たす解を求め，$x \geq 0$ の範囲で解曲線を図示しなさい．

$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 2\cos x$　　初期条件 ： $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(千葉大 2002)　　(m20021203)

0.75 重積分に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 領域 $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \geq 0,\ x + y + z \leq \pi/2\}$ を図示しなさい．

(2) 次の不定積分を求めなさい．ただし，a は定数である．

$$\int x\sin(a + x)dx$$

(3) D を積分領域として，次の 3 重積分の値を求めなさい．

$$\iiint_D z\sin(x + y + z)dxdydz$$

(千葉大 2007)　　(m20071208)

0.76 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解きなさい．

(1) $y' + y + y^2 = 0$　,　$y(0) = 1$

(2) $y' + y + x = 0$　,　$y(0) = 2$

(千葉大 2012)　　(m20121203)

0.77 次の微分方程式の一般解を求め，与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示しなさい．

(1) $\left(x^2-xy\right)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$ 　初期条件：$x=e,\ y=e$，ここで，e は自然数の底である．

（ヒント：$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて未知関数 $y(x)$ を $u(x)$ に変換する ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+17y=0,\ x\geq 0$ 　初期条件：$x=0,\ y=1,\ y'=-1$

(千葉大 2015)　　(m20151204)

0.78 積分 $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ を求めよ．ただし，積分領域 D は $D=\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ とする．

(筑波大 2007)　　(m20071316)

0.79 $u=\dfrac{y}{x}$ とおいて微分方程式 $2xyy'-y^2+x^2=0$ を解き，それがどのような曲線群を表すか述べよ．なお，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ である．

(筑波大 2008)　　(m20081309)

0.80 積分 $\displaystyle\iiint_D dxdydz\ \ln\left(\alpha\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\right)$ を求めよ．

ただし，α は正の定数であり，$\ln x$ は x の自然対数を表している．

さらに積分領域 D は，$D=\{(x,y,z)\mid 1<x^2+4y^2+9z^2<4\}$ とする．

(筑波大 2008)　　(m20081321)

0.81 $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+y\geq 0\}$ と定めるとき, 積分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$$

を求めよ．

(筑波大 2010)　　(m20101304)

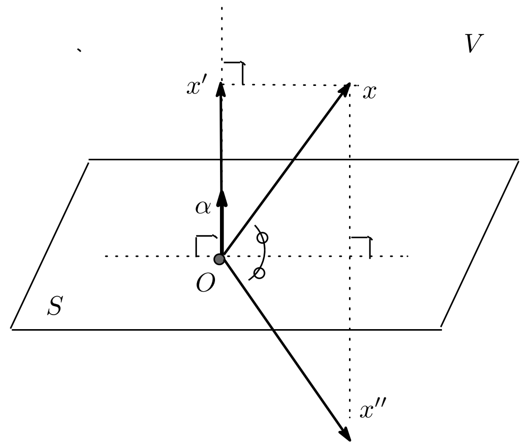
0.82 ３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と表すこと．

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{x}''=\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ．



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.83　微分方程式

$y' = \dfrac{1}{x}y + xy^2$ の解を求めよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(筑波大 2012)　　(m20121301)

0.84　領域 $K = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq c\right\}$ とする．3 重積分

$$I = \iiint_K y^2 z^2 \, dxdydz$$

を求めよ．ここで，a, b, c は正の定数である．

(筑波大 2012)　　(m20121311)

0.85　2 次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 12 = 0$ と表すことにする．

ここで，$A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ ，${}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ，${}^t\boldsymbol{x} = (x \quad y)$

である．この 2 次曲線について以下の問いに答えよ．

(1)　A の固有値 $a_1,\ a_2\ (a_1 < a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2$ を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とする．

${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ．

(3)　前問で作った P を使って座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ ，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと，この 2 次曲線は

${}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}' + 2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}' - 12 = 0$ と書ける．この式を $x',\ y'$ を使って表せ．

(4)　さらに，座標の平行移動 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{c}$ を行って，この 2 次曲線を標準形で表せ．

ここで，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である．$c_1,\ c_2$ の値も答えよ．

(5)　XY 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け．さらに，その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ．

(筑波大 2012)　　(m20121312)

0.86　領域 D を

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x + y + z < 1,\ x, y, z > 0\right\}$$

と定める．このとき広義重積分

$$I = \iiint_D \frac{\log(x+y+z)}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz$$

を以下の手順で求めよ．

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} u &= x+y+z \\ uv &= y+z \\ uvw &= z \end{aligned}$$

により，D が領域 $E = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < u,v,w < 1\right\}$ に写されることを示せ．

(2) 上の変数変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ を求めよ．

(3) I の値を求めよ．

(筑波大 2012)　　(m20121327)

0.87 半径 a の球体の領域 $D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x,y,z を極座標 r,θ,φ の関数として表せ．r,θ,φ の定義を図示すること．

(2) x,y,z の r,θ,φ の関するヤコビアンを計算せよ．

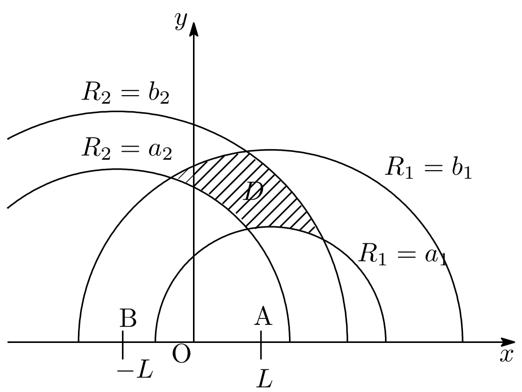
(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.88 xy 平面の $y>0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して，点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L>0$ とする．また，$f(x,y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$，$a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$，$a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi \int_D y dx dy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1，R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，複素関数 $g(z) = \log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$，$z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$，$0 < r_2$，$0 < \theta_1 < \pi$，および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.89 図のような円柱座標系での微積分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 直交座標 (x, y, z) を円柱座標 (r, θ, z) に変換する，x，y，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$，$\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$，$\dfrac{\partial x}{\partial z}$ を r，θ，z の関数として示せ．

(2) $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} & \dfrac{\partial r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} & \dfrac{\partial \theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = E$ が成り立つことに留意し，$\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を r，θ, z を用いて示せ．なお，E は単位行列である．

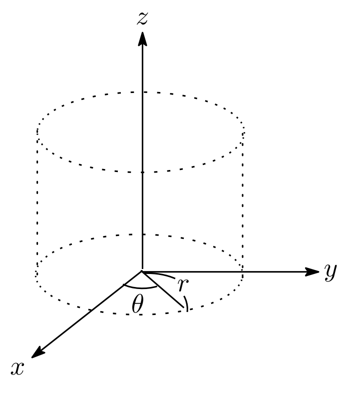
(3) (2) の結果を用いると円柱座標系のラプラシアンは $\triangle = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ で表される．関数 $f(r,\ \theta,\ z) = rz\cos\theta$ に対して $\triangle f$ を計算せよ．

(4) 円柱座標系で r だけを変数 $(r > 0)$ とする関数 $g(r)$ が $\triangle g(r) = 0$，$g(1) = 0$，$g(e) = 2$ の条件を満たす．この $g(r)$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底である．

(5) x，y，z の r，θ，z に対するヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算せよ．

(6) K を積分領域とする以下の三重積分を，円柱座標系への変数変換を用いて計算せよ．ただし，a は正の定数である．

$$\iiint_k y^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \qquad K = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq a\right\}$$



(筑波大 2018)　　(m20181301)

0.90 $f(x,y)=x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S: z=x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I=\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.91 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.92 $y=\tan^{-1}x^2$ について，次の問に答えよ．

(1) グラフの概形を描け．

(2) $x=0$ における 2 次の微分係数 $y''(0)$ を求めよ．

（埼玉大 2001）　　(m20011403)

0.93 以下の問いに答えなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $D=\dfrac{d}{dt}$ である．

(1) 次の 1 階微分方程式の一般解を求めなさい．　$2xyy'=x^2+y^2$

(2) 次の 2 階微分方程式の一般解を求めなさい．　$y''-7y'+10y=6x+8e^{2x}$

(3) 次の連立微分方程式の一般解を求めなさい．　$\begin{cases} Dx=4x-y \\ Dy=x+2y \end{cases}$

(埼玉大 2003)　　(m20031406)

0.94 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ である．

(1) $y''-y'-2y=2x^2-6x$

(2) $x^3yy'=y^2+1$

(3)　$(y+xy')xy=x^2+2$

(埼玉大 2004)　　(m20041405)

0.95　次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ である.

(1)　$2x^2y'=x^2+y^2$

(2)　$y''+2\varepsilon y'+{\omega_0}^2y=F\sin\omega x$　　　（ただし, $\varepsilon\neq 0$, ${\omega_0}^2>\varepsilon^2$）

(埼玉大 2005)　　(m20051403)

0.96　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする.

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D ydxdy$ を計算せよ.

(埼玉大 2007)　　(m20071411)

0.97　以下の微分方程式の解を求めなさい．ただし，c は実定数とする.

(1)　$\dfrac{dy}{dx}+y=x$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}-xy=-y^3e^{-x^2}$

(3)　$e^ydx+xe^ydy=0$

(4)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+cy=0$

(埼玉大 2009)　　(m20091403)

0.98　(1)　以下の微分方程式を解け.

(a)　$\dfrac{dy}{dx}=\tan x\cdot\tan y$

(b)　$\cos x\dfrac{dy}{dx}-y\sin x=2\cos x\,\sin x$

(c)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=e^x$

(2)　$y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す.

(a)　下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ.
$y''(t)+k^2y(t)=0$　($k>0$ の定数)

(b)　初期条件　$y(0)=A_0$, $y'(0)=0$　を満たす解を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101408)

0.99　次の二重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xydxdy\ ,\quad (\ D=\{\ (x,y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ 2x+3y\leq 6\ \}\ )$$

(埼玉大 2011)　　(m20111403)

0.100　点 (x,y) を点 (x',y') に対応づける xy 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，１次変換と呼ばれる（ここで a,b,c,d は定数であり，下式は「 $x'=ax+by$ かつ $y'=cx+dy$ 」と同値）.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される１次変換 f について，以下の２問に答えよ.

(1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」（すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように k の値を定めよ．

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，xy 平面上の直線を形成する．この直線の方程式を求めよ．

(群馬大 2006)　　(m20061503)

0.101 次の微分方程式を解け．

$$y'' + 2y' + 10y = e^{-t}\sin t\ ,\ \ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$$

(茨城大 1998）　　(m19981702)

0.102 (1) 微分方程式 $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1\ ,\ y'(0) = -1 \end{cases}$ の解 $y(t)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた関数 $y(t)$ のグラフを $0 \leqq t \leqq 4\pi$ の範囲でかけ．

(茨城大 1999）　　(m19991705)

0.103 次の微分方程式を解け．　$y' = \dfrac{y}{x}\log\dfrac{y}{x}$

(茨城大 2000）　　(m20001702)

0.104 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \sin x$$

(茨城大 2004)　　(m20041702)

0.105 次の微分方程式を解け，　$y'' - y = e^x$，　$y(0) = 0$，　$y'(0) = 1$

(茨城大 2007)　　(m20071703)

0.106 (1) ３つの元からなる集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合をすべてあげよ．

(2) 一般に n 個 $(n \geq 1)$ の元からなる集合 X の部分集合は総計何個あるか論ぜよ．

(3) 一般に，写像 $f\ :\ X \to Y$ について次の主張は正しいか否か判定し，その理由を述べよ．

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$　　(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$　　(d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ただし，A, B は X の部分集合とし, C, D は Y の部分集合を表す．また，X の部分集合 X' , Y の部分集合 Y' に対して，

$f(X') = \{f(x) \in Y \mid x \in X'\}$，　$f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$　である．

(茨城大 2007)　　(m20071708)

0.107 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqq 1$ と $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121702)

0.108 $y = y(x)$ に関する微分方程式について，以下の各問に答えよ．

(1) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{4x}$ の一般解を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151703)

0.109 (1) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を $xy-$ 平面に図示しなさい.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy dxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2006) (m20061804)

0.110 (1) $y = x^n$ を n 回微分せよ. なお, n は正の整数である.

(2) $y = \sin x$ を n 回微分せよ.

(3) α は任意の実数で $x > 0$ とする. $y = x^\alpha$ のとき, $y' = \alpha\, x^{\alpha-1}$ であることを与式の両辺の対数を取って示せ.

(4) (3) と同様の方法を用いて $y = x^2\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ を微分せよ.

(新潟大 2010) (m20102001)

0.111 次の定積分を計算せよ.

$$I = \int_D z^2\, dxdydz \qquad D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y \geq 0$$

(新潟大 2012) (m20122012)

0.112 $y = \sqrt{\cos x}$ のとき, y'' を求めよ.

(新潟大 2015) (m20152007)

0.113 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ.

(3) 4 つの行列 $A,\ B,\ A^{-1}$ および AB は, いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x, y)$ をそれぞれ異なる $P'(x', y')$ に移動させる. $A,\ B,\ A^{-1}$ および AB が, それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか, 幾何学的意味を述べよ.

(新潟大 2020) (m20202007)

0.114 微分方程式

$$(x+1)y'' + xy' - y = 0$$

を以下の手順により解け.

(1) $y = ue^{-x}$ がこの微分方程式の解になるために u が満たすべき微分方程式を求めよ.

(2) 前問で求めた微分方程式を解け.

(3) もとの微分方程式を解け.

(長岡技科大 1994) (m19942104)

0.115 空間の点 (x, y, z) の平面 $z = \sqrt{3}x$ に関する対称点を (x', y', z') とする. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき, 行列 A を求めよ.

(長岡技科大 1994) (m19942107)

0.116 次の 2 つの微分方程式について, 以下の問いに答えよ.

$$y'' - y = 0 \qquad (*)$$

$$y'' - y = e^{2x}\cos x \qquad (**)$$

(1) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) $y = e^{2x}(a\cos x + b\sin x)$ が $(**)$ の解となるような定数 a, b を求めよ．

(3) 微分方程式 $(**)$ の一般解を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962103)

0.117 微分方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の一般解を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972104)

0.118 以下の問いに答えよ．

(1) 点 $P(x, y)$ から x 軸に下ろした垂線の足（P が x 軸上にあるときは P 自身）を $P'(x', y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(2) 点 $P(x, y)$ から直線 $y = kx$（k は定数）に下ろした垂線の足（P がこの直線上にあるときは P 自身）を $P'(x', y')$ とする．P を P' に移す一次変換を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 B を求めよ．

(長岡技科大 1999)　　(m19992104)

0.119 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$ (a は $a > 1$ なる定数) について、以下の問に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = -1$ を満たす解を求めなさい．

(3) 前問で求めた解が $y(\pi) = 0$ を満たすような定数 a の値を求めなさい．

(長岡技科大 2006)　　(m20062104)

0.120 微分方程式 $y'' - \dfrac{(y')^2}{y} + y = 0$ の解で初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たすものを $y = y(x)$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $z = \log y$ とおくとき，$z = z(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい．

(2) y を求めなさい．

(長岡技科大 2007)　　(m20072105)

0.121 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$（$\omega$ は正の定数）について，以下の問いに答えよ．

(1) 一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解を求めなさい．

(3) 前問で求めた解が $y(1) = 0$ を満たすような ω の値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082104)

0.122 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい．

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい．

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい．

(長岡技科大 2009)　　(m20092102)

0.123 連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) &= -4y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

について以下の問いに答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件 $x(0)=0$, $y(0)=1$ を満たす解を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092104)

0.124 (1) 微分方程式 $y' = -\dfrac{x}{y}$ の一般解を求めなさい.

(2) 前問で求めた一般解を表す全ての曲線と直交する曲線を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102104)

0.125 x の関数 y についての微分方程式

$(*)\qquad y'' - y = e^x \sin x$

を考える. 下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $y'' - y = 0$ の一般解を求めなさい.

(2) a, b を定数として, $y = ae^x \cos x + be^x \sin x$ が微分方程式 $(*)$ を満たすような a, b の値を求めなさい.

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2017)　　(m20172102)

0.126 x の関数 y についての微分方程式を

$(*)\qquad xy'' + 2y' + 4xy = 0$

とする. 下の問いに答えなさい.

(1) $z = xy$ とおいて, $(*)$ を z についての微分方程式として表しなさい.

(2) 前問 (1) で求めた微分方程式を解くことによって, 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182102)

0.127 x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$(*)\quad y'' + y = \sin x$

を考える.

$u = u(x) = -y\cos x + y'\sin x,\ \ v = v(x) = y\sin x + y'\cos x$

とおくとき, 下の問いに答えなさい.

(1) $-u\cos x + v\sin x = y$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $u',\ v'$ を x の関数として表しなさい.

(3) $u,\ v$ を x の関数として表しなさい.

(4) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい.

(長岡技科大 2020)　　(m20202102)

0.128 微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = x$ の一般解を求めなさい.

(金沢大 2022)　　(m20222212)

0.129 微分方程式

$$y' = 36\left(\frac{x+y}{11x+y}\right)^2$$

を解け.

(富山大 2003)　　(m20032309)

0.130 次の重積分の値を極座標を用いて求めよ.

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ x, y \geq 0}} xydxdy$$

(富山大 2004)　　(m20042304)

0.131 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$xy' + 2y = e^x$$

(富山大 2004)　　(m20042317)

0.132 次の常微分方程式３問のうち，２問を選択し, それぞれ一般項を求めよ．ただし, (3) については, $y = \cdots$ の形で表現する必要はない．また y' , y'' は, それぞれ dy/dx , d^2y/dx^2 を意味する．

(1) $y'' + 6y' + 9y = 0$　　(2) $xy' + y^2 = 4$　　(3) $y' = \dfrac{2x - 2y + \cos x}{2x - 4y - \sin y}$

(富山大 2006)　　(m20062307)

0.133 $2\times\ 2$ 行列　$L = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\beta^2} & -\beta/\sqrt{1-\beta^2} \\ -\beta/\sqrt{1-\beta^2} & 1/\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}$　とするとき（ただし，$0 < \beta < 1$　とする），以下の問いに答えよ.

(1) L による１次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき，$x'^2 - y'2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ.

(2) L が行列の方程式 $L^2 - 2L/\sqrt{1-\beta^2} + I = O$ を満足することを示せ．ただし，I は $2\times\ 2$ の単位行列で，O は $2\times\ 2$ の零行列である.

(3) L の固有値を求めよ.

(4) L と別の $2\times\ 2$ 行列 $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\gamma^2} & -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} \\ -\gamma/\sqrt{1-\gamma^2} & 1/\sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix}$ を用いた１次変換 $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = ML\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を行ったとき，$x''^2 - y''^2 = x^2 - y^2$ が成り立つことを示せ．ただし，$0 < \gamma < 1$　とする.

(5) L の逆行列を求めよ.

(富山大 2007)　　(m20072303)

0.134 次の二重積分を求めよ，　$1024\displaystyle\iint_D xydxdy$　　$\left(D\,;\, x^2 \leq y \leq \dfrac{x}{2}\right)$

(富山大 2007)　　(m20072306)

0.135 以下の常微分方程式の一般解を求めよ．ただし，(4) については $y = \cdots$ の形で表現する必要はない.
また，y' , y'' は，それぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を意味する.

(1) $y' + y - 2 = 0$　　(2) $y'' = 2y' + 3y$

(3) $xy - (2+x)y' = 0$　　(4) $y(y+2x)dy + (y^2 - x^2)dx = 0$

(富山大 2007)　　(m20072307)

0.136 次の微分方程式のついて，(1)〜(3) については一般解を，また，(4) については特殊解をそれぞれ求めよ。

(1) $(y+3x)dx+(x+1)dy=0$

(2) $x\dfrac{dy}{dx}=2x\left(1+x^2\right)-y$

(3) $y''-y=0$

(4) $xdx-e^x dy=0$　　$(x=0$ のとき $y=1)$

(富山大 2009)　　(m20092305)

0.137 $A=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 \mid 0\leqq\ z\leqq\ 1-x^2-y^2\right\}$ とするとき, 次の 3 重積分の値を求めよ.

$$\iiint_A 2z(2x^2-y^2)\,dxdydz$$

(富山大 2010)　　(m20102310)

0.138 (1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線の集合が表す微分方程式を求めよ.

(2) 線形微分方程式 $y'+y=2+2x$ の一般解を求めよ.

(3) 法線影の長さが一定の長さ $a(>0)$ に等しい曲線群のうち， 原点 $O(0,0)$ を通る第一象限の曲線を求めよ．ここで法線影とは，曲線上の一点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を H，P における法線が x 軸と交わる点を N としたときの有向線分 HN の長さをいう.

(富山大 2012)　　(m20122306)

0.139 次の各問いに答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1-x^2)y'=\frac{x}{y}$$

(2) 次の微分方程式について，与えられた条件を満たす特殊解を求めよ.

$$xy^2y'-2x+4=0,\qquad x=1 \text{ の時, } y=3$$

(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2+y^2-2xyy'=0$$

(4) 次の微分方程式について，一つの特殊解を求めた上で，一般解を求めよ.

$$2y''-6y'+5y=5e^{-2x}$$

(富山大 2018)　　(m20182308)

0.140 次の微分方程式を解け.

(1) $2xydy+(1-y^2)dx=0$　　　(2) $xdy/dx+2y=x^2$

(2) $d^2y/dx^2-3dy/dx+2y=e^{3x}$　　　(4) $d^2y/dx^2+y=\cos x$

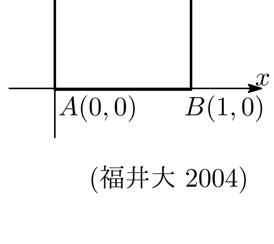
(福井大 2001)　　(m20012412)

0.141 xy 平面上における同一平面上への一次変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている. xy 平面上の図形 $ABCD$ が,

どのような図形に変換されるか図示しなさい.



(福井大 2004)　　(m20042418)

0.142 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = -2xy^2$ (2) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$

(福井大 2005) (m20052412)

0.143 次のような微分方程式で与えられる曲線と直交する曲線の微分方程式を求め，その曲線の概形を示せ.

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$ (2) $y' = -\dfrac{x}{2y}$

(福井大 2006) (m20062408)

0.144 次のような完全微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $ydx + xdy = 0$ ただし，変数分離法を用いないこと.

(2) $(x^2 - 2xy - y^2)dx + (3y^2 - 2xy - x^2)dy = 0$

(福井大 2008) (m20082408)

0.145 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^{2-x} xydy \right\} dx$ の積分順序を変更して，積分の値を求めよ． また積分領域も図示せよ.

(福井大 2011) (m20112406)

0.146 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)dydx$ の 積分順序を変更 して，その値を求めよ．また，積分領域も図示 せよ.

(福井大 2014) (m20142408)

0.147 以下の微分方程式を解け.

(1) $e^y dx + (xe^y - 3y^2)dy = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

(福井大 2014) (m20142413)

0.148 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + a = 0 \quad （a \text{ は実数の定数}）$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) この微分方程式を，条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ のもとで解け.

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ とおく．I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ．また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ．なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい.

(福井大 2015) (m20152413)

0.149 曲率 $\rho^{(注)}$ に関する以下の微分方程式について答えなさい.

$$y'' = \rho(1 + {y'}^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $\dfrac{d\rho}{dx}$ を求めなさい.

(2) 円の方程式 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ のとき，(1) の曲率 ρ に関する x の微分 $\dfrac{d\rho}{dx}$ が 0 となり，曲率 ρ は一定であることを示しなさい．

(3) ρ を定数として，微分方程式 ① を解きなさい．必要であれば，以下の置換法 $y'=\nu=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いること．

（注）曲線上の各点において，その曲線の曲がりの程度を示す値.

(福井大 2015)　　(m20152425)

0.150 $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^x (y-x^3)dydx$ の 積分順序を変更し て，その値を求めよ． また積分領域も図示せよ．

(福井大 2018)　　(m20182403)

0.151 (1) 点 $P(x,y)$ を点 $A(a,b)$ を中心として反時計回りに角 θ だけ回転したとき，移動後の点 $Q(x',y')$ を行列で表せ．また，点 P が $(2,1)$，点 A が $(3,2)$ であったときに 30° 回転したときの点 Q を求めよ．

(2) 3 次元直交座標系（原点を O）において，任意の点 (x,y,z) を x 軸周りに角 θ だけ回転させる行列 $\boldsymbol{R}$ を表せ．また，固有値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222426)

0.152 常微分方程式 $y'+\dfrac{1}{x}y=e^x$ ，　$y(1)=3\ \ (x>0)$ を解け．

(静岡大 2005)　　(m20052504)

0.153 $y=x^{x\cos(x)}$ とするとき，$y'=x^{x\cos(x)}\{(\cos(x)-x\sin(x))\log(x)+\cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい．

(静岡大 2009)　　(m20092509)

0.154 次の 2 階の微分方程式 ② について以下の問に答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=0 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

(1) 微分方程式 ② の一般解を求めよ．

(2) $y'+y=u\ \cdots$ ③ とおくとき, u は次の微分方程式 ④ をみたすことを示せ．

$$\frac{du}{dx}+3u=0 \quad \cdots\cdots \quad ④$$

(3) 微分方程式 ④ の一般解を求めよ．

(4) 微分方程式 ③ を (2) で求めた u を非同次項とする y についての 1 階線形微分方程式とみなすことにより, 微分方程式 ③ の一般解を求めよ．

(静岡大 2010)　　(m20102510)

0.155 次の微分方程式 ① について以下の問に答えよ．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$xy''+2y'+xy=0 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

(1) 関数 $y_1=\dfrac{\cos x}{x}$ は，微分方程式 ① の解であることを示せ．

(2) x の関数 u について，$y=uy_1$ が微分方程式 ① の解であるとき，u は次の微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}-2(\tan x)\frac{du}{dx}=0$$

を満たすことを示せ．

(3) $\dfrac{du}{dx}=v$ とおくとき v を求めよ．

(4) u を求めよ．

(5) 微分方程式 ① の一般解を求めよ．

(静岡大 2011)　　(m20112509)

0.156 次の各微分方程式の初期値問題を解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) $y'' + 4y' + 3y = 0$,　$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(2) $y'' + 4y' + 4y = 0$,　$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(3) $y'' + 4y' + 5y = 0$,　$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(静岡大 2011)　　(m20112510)

0.157 次の微分方程式を解きなさい．　$\left(x^2 - y^2\right)y' = xy$

(静岡大 2016)　　(m20162502)

0.158 微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ に対して，

(1) 一般解を求めよ．

(2) 初期値 $y(0) = 4,\ y'(0) = 1$ が与えられたときの解を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012607)

0.159 初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ を満たす，次の微分方程式の解を求めよ．

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

(岐阜大 2003)　　(m20032605)

0.160 次の微分方程式の一般解を求めよ. ただし, y は x の関数であり, y'' は 2 階導関数, y' は 1 階導関数を表わす.

(1) $y' - y^2 = 0$　　(2) $y'' + 3y' + 2y = 0$

(岐阜大 2004)　　(m20042604)

0.161 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $4y'' - 4y' - 3y = 0$　　(2) $y' = \dfrac{4xy}{x^2 + 1}$

(岐阜大 2005)　　(m20052601)

0.162 関数 $y = \sin x$ の n 次導関数を求めよ.

[ヒント 1 ：関数 y を次々に微分していき ($y', y'', \cdots$) , n 次導関数の検討をつける.]

[ヒント 2 ：$\sin x = \sin(x + 2\pi)$]

(岐阜大 2005)　　(m20052616)

0.163 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = y^2 + 2y - 3$　　(2) $y'' + 6y' + 10y = 0$

(岐阜大 2008)　　(m20082603)

0.164 y は x の関数であるとして，次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y''+y = 0$　　(2) $y''-7y'+12y = 6x^2+5x+18$　　(3) $y''-4y'+4y = \cos x$

(岐阜大 2008)　　(m20082616)

0.165 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x^2y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 6y' + 8y = 0$

(岐阜大 2009) (m20092616)

0.166 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x) - \tan(x)\, y(x) = 2e^{2\sin(x)} \ , \qquad -\pi/2 < x < \pi/2 \tag{A}$$

(1) $y(x; y_0)$ を初期条件 $y(0) = y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x; y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x; y_0)$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x; y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x; y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 2010) (m20102605)

0.167 $y(x)$ を未知関数とする微分方程式

$$y'' + 2y' + ay = 0 \tag{$*$}$$

に対して以下の問に答えよ．ただし，a は定数とする.

(1) $a = 1$ のとき，方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(2) $a > 0$ のとき，方程式 $(*)$ の任意の解 y に対し $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ が成り立つことを示せ.

(岐阜大 2011) (m20112607)

0.168 $a, b > 0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$ が表す曲線を C とする.

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ.

(1) $x = a\cos^4 t.\ y = b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ.

(2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し，$y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} y'(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} y'(x)$ を求めよ.

(3) A の概形を描け.

(4) A の面積を求めよ.

(岐阜大 2016) (m20162601)

0.169 $y = y(x),\ y' = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．微分方程式

(E) $\qquad y' + y\cos x = \sin x \cos x$

を考える．以下の問に答えよ.

(1) 同次方程式 $y' + y\cos x = 0$ の一般解を求めよ.

(2) (E) の一般解を求めよ.

(3) (E) の解で，条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(4) (3) で求めた y について，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^2}$ を求めよ.

(岐阜大 2016) (m20162604)

0.170 微分方程式

$$(E)\quad y' + yx = 1 + x + x^2$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 同次方程式 $\quad y' + yx = 0 \quad$ の一般解を求めよ．

(2) (E) の一般解を求めよ．

(3) (E) の解で，条件 $y(0) = 0$ を満たすものを求めよ．

(4) (3) で求めた y について，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{2x+\sin x}$ を求めよ．

(岐阜大 2020) (m20202606)

0.171 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1)\quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2)\quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，α, β を実数とする．微分方程式

$$(E_3)\quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4)\quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022) (m20222602)

0.172 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\scriptstyle 1\qquad} - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{\scriptstyle 2\qquad}}{h}$$

ここで，$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{\scriptstyle 3\qquad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{\scriptstyle 4\qquad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{\scriptstyle 5\qquad}$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし，$x > 0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7} = \boxed{8} + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{9} + 1$$

この式から，y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997） (m19972703)

0.173 行列 F によって点 (x, y) を点 (x', y') に移す次の 1 次変換

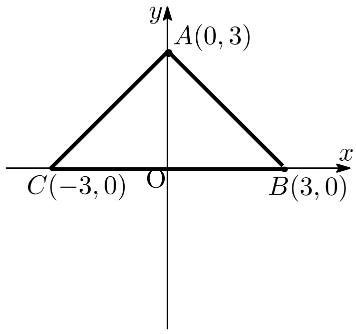
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この 1 次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) 行列 F を求めよ.

(2) 行列 F の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) 下図の点 A, B, C に対して, 行列 F による 1 次変換を n 回行って移る点をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする. $n = 1$ および $n = 2$ のとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.



(4) 三角形 $A_nB_nC_n$ の面積を S_n とするとき, S_n を n を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004) (m20042707)

0.174 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i)，$i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\quad オ \quad} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2\sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\quad カ \quad}\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\quad キ \quad}\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \boxed{\quad ク \quad} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$ および $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\frac{7}{4}\pi$ や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.175 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}$ で与えられる 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により，曲線 $y = x^2$ の上の点 (x, y) は，曲線 $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$ の上の点 (x', y') に移される．$a > 0$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) x, y を用いて x' および y' を表せ．

(2) a を用いて b を表せ．

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は，1 次変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$ によりベクトル $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移される．$|\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}|$ であるとき，a の値を求めよ．

(4) $\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる最小の正の整数 n を求めよ．

(豊橋技科大 2009)　　(m20092703)

0.176　次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y dxdy$,　　$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$,　　$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\ \right\}$

(豊橋技科大 2022)　　(m20222703)

0.177　行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ．

(2) A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）．

(3) A によって 1 次変換　$f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$　を定める．
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ．

(4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032802)

0.178　(1) 微分方程式 $x(-1-2xy)y' = 2y(1+xy)$ を解け．

(2) 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = \exp x$ を解き，y の一般解を求めよ．

(名古屋大 2006)　　(m20062802)

0.179　微分方程式 $y'' - 5y' + 6y = 0$ を解き，y の一般解を求めよ．

(名古屋大 2008)　　(m20082803)

0.180　以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{dy}{dt} = y'$ と記すことにする．

(1) 常微分方程式 $y'' + 2y' + y = e^{-t}$ の一般解を求めよ．

(2) $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(名古屋大 2011)　　(m20112801)

0.181　(1) 常微分方程式 $y'' + 6y' + 5y = 5x$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $y'' + \dfrac{x-1}{x}y' - \dfrac{1}{x}y = xe^{-x}$ について

(i) この微分方程式の右辺を 0 とした同伴方程式の基本解の 1 つが $y_1 = e^{-x}$ であることを示せ．

(ii) 微分方程式の一般解を $y = ue^{-x}$ とおいて解け．ただし，u は x の関数である．

(名古屋大 2015)　　(m20152802)

0.182　互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 座標系) 上の点 $p(x,y,z)$ を，この座標系と原点を共有し，別の直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'$ 座標系) で示した場合，p の座標値は (x',y',z') となった．なお，座標系は右手系とする．

(1) x',y',z' を x,y,z へ変換する行列 M を求めよ．

(2) いま，$\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ 座標系における，ベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}$ の正側から見て，$\boldsymbol{k}$ を軸として右回りに 45° 回転し，回転後の $\boldsymbol{i}$ の正側から見て，$\boldsymbol{i}$ を軸として右回りに 45° 回転した後のベクトル $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ による座標系を $\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}'$ 座標系とする．

(a) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系で $p_1(1,0,0)$, $p_2(0,1,0)$, $p_3(0,0,1)$ で示される点の，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系での座標を求めよ．

(b) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系に変換する行列 M の各要素の値を求めよ．

(c) M の転置行列は M の逆行列と等しくなる． $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系で $p_4(2,1,1)$ で示される点の $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系での座標を求めよ．

(名古屋大 2016)　(m20162805)

0.183 (1) 微分方程式 $y''+2y'-3y=e^x x$ を解くために，$y=e^x z$ とおくと，微分式方程式 $z''+az'+bz=x$ が導かれる．定数 a,b の値を求めよ．

(2) 上で導かれた微分方程式 $z''+az'+bz=x$ の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972902)

0.184 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(3) 二つの関数 $x(t)$, $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする．

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時，$P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか．

(4) (3) の $X(t)$, $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ．

(名古屋工業大 1998)　(m19982908)

0.185 次の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $y''+y=0$ の一般解を求めよ．

(2) $w=w(x)$ を微分方程式

$$4xw''+2w'+w=0 \qquad (*)$$

の解とする．独立変数 x を $x=t^2$ により t に変換し，$u=w(t^2)$ と置くとき，u の満たす微分方程式を求めよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(名古屋工業大 1999)　(m19992905)

0.186 $x>0$ で微分方程式 $(*) x^2y''+xy'-y=0$ を考察する．

(1) $y_1=x$ は方程式 $(*)$ の解であることを示せ．

(2) $y=y_1 z$ とおく．y が $(*)$ の解であるとき，z の満たすべき方程式を求めよ．

(3) y_1 と独立な微分方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　(m20032902)

0.187 xy 平面の 5 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D y\,dxdy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004)　(m20042903)

0.188 $x \neq 0$ で次の常微分方程式を解け.

$$x^2 y' = (y^2+1)(y-1)(y+2)$$

(名古屋工業大 2004)　　(m20042904)

0.189 常微分方程式 $(2x+y)y' - (x+2y) = 0$ について次の問いに答えよ.

(1) 方程式の一般解を求めよ.　(2) 初期条件 $y(0)=2$ を満たす特殊解を求めよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062908)

0.190 次の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x-y-z)\,dzdydx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dydx$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072902)

0.191 定数係数の 2 階線形微分方程式

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x \ , \quad (\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0 \ \text{定数})$$

が一つの特殊解 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ を持つとする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を決めよ.

(2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112909)

0.192 関数 $y=e^x$ が微分方程式 $xy' + p(x)y = x$ の 1 つの解である. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $p(x)$ を求めよ.

(2) 微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 境界条件：$x = \ln 2$ のとき, $y(x)=0$ を満たす微分方程式の特殊解を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132909)

0.193 微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 3$ の一般解を求めよ. 但し, $y',\ y''$ はそれぞれ関数 $y=y(x)$ の 1 次及び 2 次の導関数とし, $y(0)=1,\ y'(0)=2$ を満たすとする.

（愛知県立大 2000）　　(m20003002)

0.194 以下の式で表される, 二つの 3 次関数について, (1)〜(3) のすべてに答えよ.

$$y = -2x^3 + 8x^2 - 6x \qquad ①$$

$$y = x^3 - 2x^2 + ax \qquad ②$$

(1) ①, ②で表される 2 本の曲線は, 原点 $(0,0)$ で交差する. このほかに, ただ 1 点で両者が接するような, a の値を求めよ. 以下の問題で, a はこの値を取るとする.

(2) ①の関数の増減表は, 以下のようになる.

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し, 増減表を完成せよ. 記入内容は以下の通りとする.

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）.

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する.

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する.

また， xy 平面上に， ①,② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ.

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

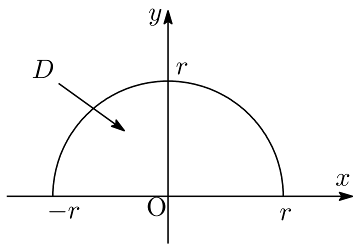
(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ.

（三重大 2004） (m20043106)

0.195 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$\overline{y} = \dfrac{1}{S}\displaystyle\iint_D ydxdy$ （ただし, S は図形 D の面積）

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



(三重大 2004) (m20043107)

0.196 行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ.

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ．また，直線に移された場合の直線の式を求めよ.

(2) 直線 $2x + y = 0$ が，直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113106)

0.197 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ において，初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$（ただし，$y'(x) \equiv dy(x)/dx$）を満たす解を求めよ.

(三重大 2011) (m20113107)

0.198 $y = x\log x$ のとき，y' を求めよ． ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ であり，$\log$ は自然対数である.

(三重大 2013) (m20133102)

0.199 微分方程式の初期値問題 $y'' - 2y' + 5y = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ の解を求めよ.
ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

(三重大 2013) (m20133104)

0.200 y の x に関する 1 階微分を y' で表すとき，微分方程式

$$y' + 3y = \cos 2x$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで解きなさい.

(三重大 2013) (m20133106)

0.201 次の関数の x に関する導関数 y' を求めよ.

(1) $y = x^3 e^{-2x}$　　(2) $y = x \log_e \dfrac{1}{x}$　　(3) $y = x^{\sin x}$

(三重大 2015)　(m20153105)

0.202 以下の問いに答えなさい. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ である.

$y = x^x\ (x > 0)$ のとき, y' を求めよ.

(三重大 2016)　(m20163103)

0.203 以下の問いに答えなさい. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

$y'' + 4y' + 3y = e^{2x}$ の一般解を求めよ.

(三重大 2016)　(m20163105)

0.204 微分方程式 $0 = dy + aydx$ で表される関数 $y = f(x)$ について以下の (1)〜(3) の問いに解答せよ. ただし, a は実数で $a > 0$ とする.

(1) $f(0) = a$ の時, 与えられた微分方程式を解き, $f(x)$ を x のみの関数として表せ.

(2) $g(x) = xf(x)$ とする時, 極値や変曲点を示して $y = g(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) 以下の極限値を求めよ.

$$\lim_{a\to\infty} \frac{\displaystyle\int_0^\infty g(x)dx}{\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx}$$

(三重大 2017)　(m20173113)

0.205 以下の問いに答えなさい. ただし, y は x の関数であり, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 初期条件を $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ とするとき, 微分方程式　$xy'' + y' = 0$　を解きなさい.

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において, (1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい. ただし, 区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は, $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$　で与えられる.

(三重大 2020)　(m20203109)

0.206 $f(x),\ g(x)$ を実数全体で微分可能な関数とする.

(1) $y = f(x),\ xy'' = 2y',\ f(-1) = -2,\ f(1) = 2$ とする. ただし, $x \neq 0$ のとき, $y' \neq 0$ とする. $f(x)$ を求めなさい.

(2) $y = g(x),\ y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 - 6x + 6,\ g(-1) = \dfrac{1}{e} - 1,\ g(0) = 0,\ g(1) = e - 1$ とする. $g(x)$ を求めなさい.

(三重大 2020)　(m20203110)

0.207 二次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\overrightarrow{u}$ について, 以下の各問に答えなさい.

(1) この定数 k の値を求めなさい.

(2) このベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めなさい.

(3) A^n を求めなさい.

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は，この行列 A を用いた一次変換
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した．返還前の直線の式を求めなさい．

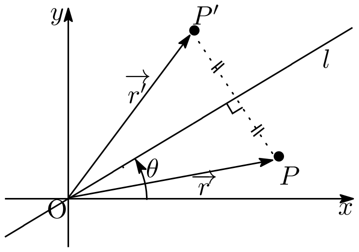
(三重大 2022)　　(m20223104)

0.208 原点 O を通る角度 θ 方向の直線 l に関して，空間の点 P（位置ベクトルを $\vec{r}$）を点 P'（位置ベクトルを $\vec{r'}$）へ反転させる作用（R_θ と記す）を考える．

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{r'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \vec{r}$$

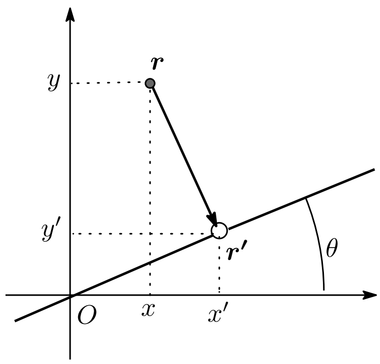
このとき，反転の作用は次のように表わせることを示せ．

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$



(奈良女子大 2002)　　(m20023208)

0.209 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ．

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

0.210 任意の関数 $y = f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び，導関数を求めることを関数 y を微分するという．

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \log x \qquad (x > 0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする.

（京都大 2004） (m20043301)

0.211 2次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x \;\; \boldsymbol{e'}_y) = (\boldsymbol{e}_x \;\; \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する2次の正方行列 P を θ を用いて表せ.

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，4つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は2次の単位行列をそれぞれ表す.

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，2通りの座標を用いて表すことができる．これら2通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ. さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ.

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \qquad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら2組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ.

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて.

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，2組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ.

(京都大 2009) (m20093303)

0.212 患者が薬を服用すると，薬はすべて直ちに血流中に吸収され，それ以降，時間の経過とともに，血流中の薬の量は減少する．「単位時間に減少する薬の量は，その薬の血流中の現在量に比例する」ものとしよう．

薬の服用に関する次の問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) 時刻 t における血流中の薬の量を $y(t)$ と表し，患者が時刻 $t=0$ に，はじめて一度だけ，この薬を y_0 服用したとする．

(a) 薬の量 $y(t)$ が満たすべき微分方程式が，$y'(t)+\lambda y(t)=0$（λ は比例定数）で表されることを示せ．

(b) $y(0)=y_0$ として，(a) の微分方程式を解け．

(c) 血流中の薬の量が，時刻 $t=0$ に服用した薬の量の $\dfrac{1}{n}$（n は正定数）になる時刻を求めよ．

(2) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて y_0 服用し，その後も，同一量 y_0 を一定の時間間隔 T で繰り返し服用していくものとしよう．

(a) 毎回の服用直後，すなわち，時刻 $t=mT$（m は非負整数）での服用直後の血流中の薬の量を求めよ．

(b) m が大きくなると，服用直後の血流中の薬の量は，ある飽和レベル量 y_s に達する．この y_s を求めよ．

(3) この薬を，時刻 $t=0$ に，はじめて Y 服用し，その後は，一定の時間間隔 T 毎に y_d を服用していくものとしよう． 2 回目以降の服用直後の血流中の薬の量が Y となるようにするには， 2 回目以降の毎回の服用量 y_d をいくらにすれば良いか．

(京都大 2013)　　(m20133301)

0.213 直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して，$O'(1,\ 1,\ 1)$，${e_x}' = {}^t\!\left(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\right)$，
${e_y}' = {}^t\!\left(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\right)$，${e_z}' = {}^t\!\left(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\right)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 新座標系 $\Gamma' = \{O' : {e_x}',\ {e_y}',\ {e_z}'\}$ も直交座標系であることを示し，かつ座標変換 $\Gamma \to \Gamma'$ の式を求めよ．

(2) 座標系 Γ における方程式が $x+y+z=6$ である平面 π の，新座標系 Γ' における方程式を求めよ．

(3) 座標系 Γ における方程式が，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の，新座標系 Γ' における方程式が，$\dfrac{x'-\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}}=\dfrac{y'-\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}=z'$ になるとき，$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143304)

0.214 微分方程式 $y'+y=x$ を解け．

(京都工芸繊維大 1999)　　(m19993404)

0.215 微分方程式 $y'-y=e^x$ を解け．

(京都工芸繊維大 2000)　　(m20003408)

0.216 微分方程式 $y''-y'-2y=0$ の，初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=1$ を満たす解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013407)

0.217 微分方程式 $xyy'=x^2+y^2$ を解け．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023407)

0.218 微分方程式 $x^2y' = x^2 + xy + y^2$ を解け.

(京都工芸繊維大 2003) (m20033408)

0.219 微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 10\sin x$ を考える.

(1) $a\cos x + b\sin x$ がこの微分方程式の解になるように定数 a, b を定めよ.

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2005) (m20053410)

0.220 微分方程式 $y'' - 2y' - 3y = 3x^2 + x$ を考える.

(1) x の 2 次多項式で，この微分方程式の解であるものを求めよ.

(2) この微分方程式の一般解を求めよ.

(京都工芸繊維大 2006) (m20063405)

0.221 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 1$ の解で，初期条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(京都工芸繊維大 2007) (m20073405)

0.222 微分方程式 $y' = \dfrac{y(y-1)}{x}$ を解け.

(京都工芸繊維大 2011) (m20113404)

0.223 関数 $F(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ について次の問に答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 1, 5)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 微分可能な関数 $y = y(x)$ が $f(x, y(x)) = 5$ を満たすとき，導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2012) (m20123402)

0.224 関数 $y = y(x)$ は $\begin{cases} yy'' + (y')^2 + yy' = x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ を満たしている．関数 $z = z(x)$ を $z = yy'$ で定める.

(1) $(e^x z)'$ を x の式で表せ.

(2) z を x の式で表せ.

(3) y を x の式で表せ.

(京都工芸繊維大 2014) (m20143404)

0.225 微分方程式

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

の解 $y = y(x)$ のうちで，$y(0) = 0$ を満たし，かつ x が実数全体を動くときの最大値が 2 であるものを求めよ.

(京都工芸繊維大 2015) (m20153404)

0.226 a を正の定数とする．2 階の微分方程式 $y'' + ay = 0$ の解のうち，
2 条件 $y'(0) = 0,\quad y'(1) = 0$ を満たすものをすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2016) (m20163404)

0.227 (1) 2 回微分可能な関数 $F(x)$ に対し，不定積分に関する関係式

$$\int (F''(x)+F(x))\sin x dx = F'(x)\sin x - F(x)\cos x + C$$

を示せ．ただし，C は任意定数とする．

(2) n を 3 以上の自然数とする．微分方程式

$$y'+y=e^{-x}\left\{x^n+n(n-1)x^{n-2}\right\}\sin x$$

の解 $y=y(x)$ で条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2017) (m20173405)

0.228 x の関数 $y=y(x)$ に関する定数係数線形常微分方程式について以下の問に答えよ．

(1) $y''-2y'+5y=0$ の一般解を求めよ．

(2) $y''-2y'+5y=4e^x$ の解を一つ求めよ．

(3) $y''-2y'+5y=4xe^x$ の解を一つ求めよ．

(4) $y''-2y'+5y=4e^x+4xe^x$ の解で $y(0)=0$, $y'(0)=1$ となる解を求めよ．

(大阪大 1997) (m19973503)

0.229 2 次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．
以下の問に順次答えよ．

(1) 2 次形式 $F=2x^2-4xy+5y^2$ の行列 A を求めよ．

(2) 対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より 2 次の正方行列 $P=[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ を作成した場合， P が直交行列となっていることを示せ．

(4) P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5) (3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x,y) 座標系から (x',y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) 2 次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x',y') で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた 2 次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ の図形を描け．

(大阪大 1999) (m19993503)

0.230 以下の設問に答えよ，ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする．

(1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式 :

$$y''+2y'+y=0$$

の一般解を求めよ．

(2) 関数 $z(x)$ $(x>0)$ に関する微分方程式

$$x^2z''+3xz'+z=0 \qquad (*)$$

を考える．$x=e^t$, すなわち $t=\log x$ と変数変換したとき $z(e^t)=w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(3) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

(4) $(*)$ の解で更に条件 :

$$z(1)=0\,,\quad \int_1^e z(x)dx=1$$

を満たすものを求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053505)

0.231 α および β を実数とするとき, 常微分方程式

$$y''(x)+\alpha y'(x)+\beta y(x)=0 \qquad (*)$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(*)$ 式の一般解を求めよ.

(2) $\phi(x)$ をある実数 x_0 に対して $\phi(x_0)=\phi'(x_0)=0$ を満たす $(*)$ 式の解とする. このとき, $\phi(x)=0$ であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて, ある実数 $x_0,\ C_1,\ C_2$ に対して $\phi(x_0)=C_1$ および $\phi'(x_0)=C_2$ を満たす $(*)$ 式の解は唯一であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053508)

0.232 微分方程式

$$x^2y''-xy'+y=f(x) \qquad (A)$$

について，以下の問に答えなさい．ただし $x>0$ とする．

(1) $f(x)=0$ のとき，$y_1=x$ は微分方程式 (A) の特殊解であることを示しなさい．

(2) u を $y=uy_1$ を満足する関数，w を $w=u'$ を満足する関数とするとき，微分方程式 (A) を w の x に関する一階の微分方程式に変形しなさい．

(3) $f(x)=0$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(4) $f(x)=x^2\sqrt{x}$ のとき，微分方程式 (A) を解きなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063503)

0.233 実軸上で定義された関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$xy''-(x+1)y'+y=2x^2e^{2x} \qquad (A)$$

の一般解を求めたい．

(1) (A) に対応する斉次方程式　$xy''-(x+1)y'+y=0$　は $y=e^{px}$ (p は定数) の形の解をもつ．この解を求めよ．

(2) $y=e^{px}u$ (p は (1) で得られた値，u は x の関数) とおいて (A) に代入し，u が満たすべき微分方程式を求めよ．

(3) (2) で得られた微分方程式を解くことにより，(A) の一般解を求めよ．

(大阪大 2006)　　(m20063505)

0.234 微分方程式 $y'=-2y+y^2$ について以下の問いに答えよ.

(1) この微分方程式を解け.

(2) $y(1)=3$ を満たす特殊解を求め，そのグラフの概形を描け．軸との交点や漸近線を明示すること.

(大阪大 2007)　　(m20073502)

0.235　曲線 C 上の点を $P(x, y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093503)

0.236　常微分方程式

$$4y''(x) + y(x)(4e^{2x} - 1) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

を考える．

(1)　$t = e^x$ と変換することによって $z(t) = y(\log t)$ に関する常微分方程式を導け．

(2)　$z(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}$ $(\rho \in \mathbb{R},\ c_0 \neq 0)$ とおく．この級数を (1) で得られた常微分方程式に代入し係数比較することにより ρ と c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ の間に成立する関係式を導け．また，$\rho = \pm 1/2$ を導け．

(3)　$c_1 = 0$ とする．(2) で得られた関係式から c_k を定め，基本解 $z_1(t)$, $z_2(t)$ を求めよ．

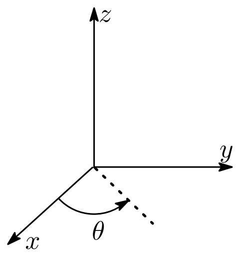
(4)　$(*)$ の常微分方程式の基本解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ で

$$e^x(y_1(x)^2 + y_2(x)^2) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

を満たすものを一組求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093505)

0.237　下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1)　点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2)　点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3)　問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ．

(4)　問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ．

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ.

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.238 次の 2 次曲線 (a) について以下の設問に答えよ.

$5x^2 + 2xy + 5y^2 + c = 0 \cdots\cdots$ (a)

(1) $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ として，式 (a) を $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + c = 0$ の形で表すときの対称行列 A を示せ．ただし，T は転置を表す.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P とそのときの対角行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ．ただし，正則行列の列ベクトルの大きさは 1 とする.

(4) $\boldsymbol{x}' = (x', y')^T$ として設問 (3) の正則行列 P を用いて $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ で式 (a) を座標変換して得られる $\boldsymbol{x}'^T B\boldsymbol{x}' + c = 0$ の概形を x' 軸，y' 軸と共に描け．ただし，$c = -12$ とする.

(大阪大 2014)　　(m20143502)

0.239 以下の微分方程式の解を求めよ．ただし，y は x の関数，y' および y'' はそれぞれ 1 階および 2 階微分を示している.

(1) $y'' - 4y' + 5y = 0$　　ただし，$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ とする.

(2) $\dfrac{x}{y}y' + \log(xy) + 1 = 0$　　ただし，$y(1) = 1$ とする．なお，対数の底は e とする.

(大阪大 2018)　　(m20183502)

0.240 $y = y(x)$ は

$$y''(x) - (x^2 - 1)y(x) = 0\ , \quad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$$

を満たすとする.

(1) $z(x) = y'(x) + xy(x)$ とおく．z が満たす微分方程式と $z(0)$ を求めよ.

(2) $z(x)$ を求めよ.

(3) 問い (2) を利用して，$y(x)$ を求めよ.

（大阪府立大 2001）　　(m20013603)

0.241 次の積分 (1),(2) の値を求めよ．ただし，集合 D, E を正の実定数 $R,\ a,\ b,\ c$ により

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}\ , \quad E = \left\{(x, y, z) \in R^3 \,|\, ax^2 + by^2 + cz^2 \leq 1\right\}$$

と定める.

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$　　　(2) $\displaystyle\iiint_E dxdydz$

(大阪府立大 2011)　　(m20113603)

0.242 3 次元空間内の単位球を B とおく．すなわち，

$$B = \left\{(x, y, z)\ \middle|\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおく．この変数変換のヤコビ行列式を計算せよ.

(2) 定積分

$$\iiint_B (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} dxdydz$$

の値を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193607)

0.243　$y=\sin^{-1}x$　のとき，等式 $(1-x^2)y''-xy'=0$　が成り立つかどうか調べよ．

(神戸大 1998)　　(m19983802)

0.244　$y''-4y'+3y=9x^2+1$ の一般解を求めよ．

(神戸大 1999)　　(m19993805)

0.245　次の微分方程式を解け．　$y''+4y'+4y=x^3$

(神戸大 2003)　　(m20033807)

0.246　未知関数 $x(t), y(t)$ に関する微分方程式　$x'(t)=y(t)\,,\ y'(t)=-x(t)$
を，初期条件 $x(0)=a\,,\ y(0)=b$ の下で解け．

(神戸大 2004)　　(m20043806)

0.247　(1)　a, b を定数とする. y を未知関数とする微分方程式

$$y''-(a+b)y'+aby=0$$

の一般解を求めよ.

(2)　微分方程式 $y'=y^2$ の一般解を求めよ. 解のグラフの概形を書きなさい.

(神戸大 2005)　　(m20053803)

0.248　次の定積分を計算せよ.

(1)　$\displaystyle\iint_D xy\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\})$

(2)　$\displaystyle\iint_D (|x|+|y|)\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\})$

(3)　$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)e^{(x^2+y^2)^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\})$

(4)　$\displaystyle\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dydx \qquad (D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid y\ge x,\ 1\le x^2+y^2\le 2\})$

(神戸大 2007)　　(m20073804)

0.249　次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1)　$y''-y=0$　　(2)　$y''+y=0$

(神戸大 2007)　　(m20073806)

0.250　関数 $y=y(x)$ は微分方程式　$y''+(5-x^2)y=0$　を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1)　$y=ze^{-x^2/2}$ とおいて，関数 $z=z(x)$ が満たす微分方程式を求めよ.

(2)　z を 2 次関数とするとき，z を求めよ.

(神戸大 2007)　　(m20073809)

0.251　次の計算をせよ.

(1)　$\displaystyle\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}} \quad (D=\{(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3 | x^2+y^2+z^2\le 1\})$

(2)　$\displaystyle\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}$

(神戸大 2008)　　(m20083808)

0.252 次の微分方程式の一般解を求めよ．ただし，y', y'' はそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

(1) $y'' - y' - 2y = 0$

(2) $y'' - y' - 2y = \cos x$

(神戸大 2009)　　(m20093808)

0.253 常微分方程式

$$y'' - y = e^{-x}$$

を初期条件 $y(0) = a,\ y'(0) = b$ のもとで解け．また，$x \geq 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．（ここで $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．）

(神戸大 2011)　　(m20113805)

0.254 $D = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4\ ,\ 1 \leqq\ z \leqq\ x^2 + y^2\right\}$ とおく．積分

$$\int_D \frac{2x^2 + y^2 + x}{z} dxdydz$$

の値を求めよ.

(神戸大 2013)　　(m20133804)

0.255 微分方程式 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) この方程式は $y = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$（A, B は定数）の形の特殊解を持つことを示し，A, B を決めよ.

(2) この方程式の一般解を求めよ.

(神戸大 2014)　　(m20143809)

0.256 未知関数 $y = y(x)$ に関する以下の各微分方程式に対し，その一般解を求めよ.
ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) $2y'' - 5y' + 2y = 0$,　　(2) $2y'' - 5y' + 2y = e^x$,

(神戸大 2015)　　(m20153806)

0.257 $a, b, c > 0,\ V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$ とするとき，積分　$I = \displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017)　　(m20173802)

0.258 次の問に答えよ．ただし，$'$ は x による微分を表す.

(1) 任意の微分可能な関数 $y(x)$ に対して

$$u(x)^{-1}\left\{u(x)y(x)\right\}' = y'(x) + x^2y(x)$$

となるような関数 $u(x)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ に対する微分方程式

$$y'(x) + x^2y(x) = x^5$$

の一般解を求めよ.

(3) $p(x), q(x)$ を与えられた関数として，$y(x)$ の微分方程式

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

の一般解の公式を導け．

(神戸大 2017)　　(m20173805)

0.259 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8 - x^2}$　(ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.260 (1) 微分方程式 $y' = -y - 1$, $y(0) = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 次の漸化式

$$y_{k+1} = (1 - h)y_k - h \quad (k \geq 0) \quad y_0 = 0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ．ここで h は 0 でない定数とする．

(3) x, n を正整数，$h = 1/n$ とおくとき，

$$y_{xn} \to y(x)\ , \quad n \to +\infty$$

を示せ．

(神戸大 2021)　　(m20213804)

0.261 (1) 微分方程式 $y'' + \sqrt{5}y' - y + 2 = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上記の解のうち，$x > 0$ で $y(x) > 0$ となるものをすべて求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233802)

0.262 y は x の関数とする, 次の微分方程式を解け．

(1) $y' = xy\ , \quad y(0) = 2\,.$

(2) $y'' - 2y' + 2y = 0\ , \quad y(0) = 1\ , \quad y'(0) = 0\,.$

(鳥取大 2005)　　(m20053907)

0.263 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ．

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 : $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 : $y'(x) = \cos(x)$　ただし, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい．

(鳥取大 2006)　　(m20063901)

0.264 以下の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $(3x + y + 3)dx + (x + 3y + 2)dy = 0$　　(2) $y'' - 4y' + 3y = 2x$

(鳥取大 2007)　　(m20073912)

0.265 次のような関数が与えられている．ただし，$x > 0$ とする．　$y = \dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$

(1) 1 階および 2 階の導関数 y', y'' をそれぞれ求めよ．

(2) この関数の極値を求めるための関数値の変化表を作成し，その極値を求めよ．

(鳥取大 2008)　　(m20083902)

0.266 x の関数 y に関する，次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $(x+3)y' + xy^2 = 0$

(2) $y'' - 6y' + 8y = x^2 + 1$

(鳥取大 2012)　　(m20123901)

0.267 c_1, c_2 を定数とする．y を微分方程式　$(1-x^2)y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = c_1,\ y'(0) = c_2$　の解とする．

(1) 非負な整数 n に対して，$y^{(n)}(0)$ を求めよ．　　(2) y を求めよ．

(岡山大 2006)　　(m20064003)

0.268 (1) $\displaystyle\int \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}}$ を計算せよ．

(2) $p\dfrac{dp}{dy} = y - 2y^3\ (0 \leqq\ y < 1),\ p(0) = 0$ の解 $p \in C^1(\,[0,1)\,)$ をすべて求めよ．

(3) (1) と (2) を利用して $\begin{cases} y'' - y + 2y^3 = 0,\ 0 \leqq\ y < 1,\ x \in \boldsymbol{R}, \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} y(x) = 1, \end{cases}$ の解を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074003)

0.269 次の微分方程式を解け．

$$y'' + 2y' + 3y = 2\cos x$$

(山口大 1999)　　(m19994303)

0.270 次の微分方程式を解け．　$xy' + y = x^2$

(山口大 2001)　　(m20014312)

0.271 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $xy' + y + 1 = 0$　　(2) $y'' - 2y' + y = e^{5x}$　　(3) $x^2y'' - 2y = 2x^2 \quad (x > 0)$

(山口大 2003)　　(m20034308)

0.272 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$2xyy' - x^2 - y^2 = 0$

(山口大 2004)　　(m20044305)

0.273 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

(山口大 2009)　　(m20094308)

0.274 次式 (1) に関する次の問題 (A) と (B) を解答しなさい.

$$(y')^2 + (xy - 2x + y + 1)y' + xy^2 - xy - 2x = 0 \cdots\cdots (1)$$

ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(A) 式 (1) を 1 次の微分方程式の積に因数分解しなさい.

(B) 式 (1) の一般解を求めなさい.

(山口大 2018)　　(m20184301)

0.275 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(1) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(2) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

(3) $y'' - 2y' + y = 0$

(4) $y'' - 2y' + y = e^x$

(徳島大 1999)　　(m19994403)

0.276 微分方程式 $x^2y' + 2xy = 1$ $(x > 0)$ を考える.

(1) すべての解について $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ.

(2) $y(1) = y(2)$ となる解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ のグラフを描け.

(徳島大 2001)　　(m20014403)

0.277 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ を考える.

(1) 一般解を求めよ.

(2) a を定数として，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = a$ を満たす解を求めよ.

(3) (2) の解が $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ となるように，a の値を定めよ.

(徳島大 2003)　　(m20034403)

0.278 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.279 次の微分方程式の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(1) $y' + 2y = 1$　　(2) $y'' + 2y' + 2y = x$

(徳島大 2006)　　(m20064403)

0.280 (1) $y' + 2y = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(2) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2009)　　(m20094404)

0.281 (1) $y' + xy = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $y' + xy = x$ の一般解を求めよ.

(3) $y' + xy = x$ の両辺を x で微分した式を求めよ.

(4) $y'' + xy' + y = 1$ の解のうち, 初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(徳島大 2010) (m20104405)

0.282 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + x(y')^2 = 0$ について，次の問いに答えよ.

(1) $p = y'$ とおいて，p の満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) で導かれた微分方程式の一般解 $p = p(x)$ を求めよ.

(3) もとの微分方程式の解で，$y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ を満たす解 y を求めよ.

(徳島大 2012) (m20124408)

0.283 $y = f(x)$ に対する次の微分方程式を解け.

(1) $y' + 2y = y^2$ (2) $y'' + 2y = x^2$

(徳島大 2013) (m20134404)

0.284 (1) $f(x) = \log(1 + x^2)$ とする．$f''(x)$ を求めよ.

(2) $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を満たしている．このとき，$u = e^{-x}y$ とおいて，u が満たす微分方程式を求めよ．また，この u の微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y'' - 2y' + y = \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}e^x$ の一般解を求めよ.

(徳島大 2015) (m20154404)

0.285 R^3 で，球 $S\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq\ 5^2$ と円柱 $C\ :\ x^2 + z^2 \leqq\ 4^2$, $-5 \leqq\ y \leqq\ 5$ を考える．S と C の共通部分を V とするとき，3 重積分 $\displaystyle\iiint_V dxdydz$ は何を表すかを述べよ．また，この値を求めよ.

(高知大 2009) (m20094502)

0.286 (1) 関数 $f(x, y) = x - x^3 - 2xy^2$ の極値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) : 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y,\ 2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 3\}$ のとき, 次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D x^2 y dxdy$$

(愛媛大 2005) (m20054603)

0.287 $D = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\right\}$ とするとき，次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D xydxdy$$

(愛媛大 2015) (m20154604)

0.288 y を x の関数，a , b を定数とする．また，微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ に対する特解を y_1 とし，$y'' + ay' + by = g(x)$ に対する特解を y_2 とする．このとき，

(1) 微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x) + g(x)$ に対する一つの特解は $y_1 + y_2$ となることを示せ.

(2) 微分方程式 $y'' + y' - 2y = \cos x + e^{-x}$ に対する一般解を求めよ.

(九州大 2003) (m20034704)

0.289 次の 2 階微分方程式について以下の問に答えよ.

$$y'' + y' - 6y = e^x$$

(1) 同次形の微分方程式 $y'' + y' - 6y = 0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $y'' + y' - 6y = e^x$ を次の初期条件の下に解け．

$$y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1$$

(九州大 2004)　　(m20044703)

0.290 ω を実数として，$y(x)$, $-\infty < x < \infty$ に関する二階常微分方程式　$y'' + 2y' + y = \sin \omega x$　を考える．

(1) $\omega = 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $\omega \neq 0$ のとき，この微分方程式の一般解を求めよ．

(3) 各 ω に対して，$x \to -\infty$ のとき $y(x)$ が有界にとどまる解はただ一つ存在することを示せ．

(九州大 2007)　　(m20074706)

0.291 関数 $y = y(x)$, $z = z(x)$ のそれぞれについて，x に関する微分を y', z' とし，2 階微分を y'', z'' とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 5y' + 4y = e^{2x}$$

(3) 次の y と z に関する連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} y' + 2y + 2z = -e^{2x} \\ y + \ z' + 3z = 0 \end{cases}$$

(九州大 2012)　　(m20124702)

0.292 次の微分方程式を解け．

(1) $x^2 y' = (2x + y)(x + y)$　　(2) $y'' \sin x + y' \cos x = 0$　　(3) $y'' + y = \sin x$

(九州大 2017)　　(m20174706)

0.293 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ のもとで解け．

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y'' + 2y' + y = 50 \sin x \cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について，一般解を求めよ．

$$(4x^3 - 6xy)dx + (8y - 3x^2)dy = 0$$

(九州大 2018)　　(m20184701)

0.294 t の関数 y に対して，$y''' = \dfrac{d^3y}{dt^3}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1) A, B を実定数とする．$y = A\cos t + B\sin t$ が次の微分方程式

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos t \qquad \cdots (\mathrm{Q1})$$

を満たすように A, B を定めよ．

(2) 微分方程式 (Q1) の一般解を求めよ.

(3) 次の微分方程式に対して $z=\dfrac{1}{y}$ とおいて z に関する微分方程式を導出せよ.

$$y'-\frac{1}{2}y=-y^2 \qquad \cdots\text{(Q2)}$$

(4) 微分方程式 (Q2) の一般解を求めよ.

(九州大 2019) (m20194702)

0.295 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''-y'-2y=e^{2x}$$

(2) 次の $y(x)$ および $z(x)$ に関する連立微分方程式の一般解を求めよ.

$$y'-2y-z=e^x\ , \quad y'-6y+z'=0$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\left(\frac{y'}{y^2}\right)'-\frac{1}{y}=0$$

(九州大 2020) (m20204705)

0.296 次の線形変換を考える. 以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{p}'=A\boldsymbol{p}\ , \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ , \quad \boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される. この平面を表す式を求めよ.

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ.

また, $\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1'=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{p}\neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ. $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x,y,z の条件を示せ.

(九州大 2020) (m20204706)

0.297 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''-2y'+5y=\sin 2x$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''+2y'-3y=e^{-3x}$$

(3) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

$$\left(\frac{y'}{y^3}\right)'-\frac{4y'}{y^3}-\frac{2}{y^2}=0$$

(九州大 2021) (m20214702)

0.298 (1) $x^2\log x$ を積分せよ.

(2) 微分方程式　$x^2y' + y^2 = 0$　を解け.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054806)

0.299 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a, b を求めよ.

(九州芸術工科大 2005)　(m20054811)

0.300 次の微分方程式の特殊解を（　）内の形で求め, さらに一般解を求めよ.

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \qquad (\ y = Ax^2e^{-x}\ )$$

(佐賀大 2004)　(m20044922)

0.301 次の微分方程式を解け.

$y''(x) + 2ay'(x) + y(x) = 0$　(a は正の定数とする)

（ a の値によって場合分けすること）

(佐賀大 2004)　(m20044924)

0.302 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $x^2y'(x) + y(x)^2 = 0$

(2) $y''(x) + 4y(x) = 0$

(佐賀大 2005)　(m20054912)

0.303 微分方程式

$xy' + y = x \log x \ (x > 0)$

を解け．ただし，解は陽形式 $y = f(x)$ の形で求めること.

(佐賀大 2005)　(m20054917)

0.304 次の微分方程式を解け．ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.

(1) $y'' - 4y' - 12y = 0$　(2) $y'' - 4y' - 12y = 12x - 8$　(3) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x)$

(佐賀大 2006)　(m20064931)

0.305 平面内に点 P があり，これを $x - y$ 座標系で表示すればその座標値は $(1, 1)$ である．いま，$x - y$ 座標系を反時計回りに 75 度回転させたものを $x' - y'$ 座標系とするとき，点 P の座標値を $x' - y'$ 座標系で表示せよ.（ヒント：$75 = 30 + 45$）

(佐賀大 2006)　(m20064945)

0.306 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\ a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\ ]$

と書くとき，a_0, a_n, b_n を求めよ.

(佐賀大 2007)　(m20074906)

0.307 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^3y^3$ (2) $y''-2y'+10y=0$ (3) $y''-2y'+10y=2\cos 2x+10\sin 2x$

(佐賀大 2007) (m20074918)

0.308 次の微分方程式を解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{dy'}{dx}$ とする．

(1) $y''=ax$ (2) $y''+2y'+y=e^{-x}\cos x$

(佐賀大 2008) (m20084903)

0.309 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0,y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a,0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y'=\dfrac{dy}{dt}$, $\theta'=\dfrac{d\theta}{dt}$ とする．

(1) 問題の関係を図で示せ．

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする．

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ．

(佐賀大 2008) (m20084904)

0.310 次の微分方程式を解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) $y''=e^{3x}$

(2) $y''+3y'+2y=e^{2x}$

(佐賀大 2009) (m20094912)

0.311 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y')=\big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015) (m20154913)

0.312 次の 2 重積分を 2 つの方法を使って計算せよ．

$$\iint_D y\,dxdy\,, \qquad D=\{x^2+y^2\leq a^2,\ y\geq o \quad (a>0)\}$$

(1) 逐次積分（累次積分）を使って計算せよ．

(2) 2 次元極座標に変換して計算せよ．

(佐賀大 2015) (m20154914)

0.313 次の微分方程式を解け．ただし e は自然対数の底である．

(1) $y''+3y'+2y=2e^{2x}$ (2) $4x-3y+2=(2x-y-1)y'$

(佐賀大 2016) (m20164914)

0.314 次の微分方程式の一般解を求めなさい．

(1) $x\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ (2) $(x^2-y^2)dy=2xydx$

(佐賀大 2016) (m20164933)

0.315 (1) 微分方程式 $y' = -\dfrac{y}{x^2}$ の一般解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $2y'' + y' - y = 5x - 3$ の一般解を求めなさい.

(佐賀大 2018) (m20184907)

0.316 次の関数をに x ついて微分せよ.

$y = (2x^3 + x - 3)^5$ $y' =$ ______________________

（長崎大 2004） (m20045002)

0.317 次の微分方程式が与えられているとき, 設問 (1) から (3) に答えよ.

$$y''(x) + 4y'(x) + 7y(x) = Q(x) \qquad \text{(i)}$$

(1) 上の (i) 式において $Q(x) = 0$ とする. 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$ が与えられているとき, 微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) 上の (i) 式において $Q(x) = 3e^{-5x}$ のとき, 微分方程式の解を少なくとも一つ求めよ.

(3) 次に, $Q(x)$ が具体的に与えられていない場合を考える. (i) 式の解の 1 つを $y_1(x)$ とするとき, $y_2(x) = 5y_1(x)$ は必ず, 微分方程式

$$y''(x) + 4y'(x) + 7y(x) = 5Q(x) \qquad \text{(ii)}$$

の解であるか. 理由を述べて説明せよ.

(長崎大 2004) (m20045008)

0.318 微分方程式 $(y')^2 = x$ を解け.

(長崎大 2004) (m20045009)

0.319 以下の問に答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) 微分方程式 $y' - y = 0$ を解け.

(2) 初期条件 $y(0) = 1$ を満たす微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ の解を求め, この解のグラフを描け.

(長崎大 2005) (m20055012)

0.320 次の微分方程式を解け, ここで, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y' + y = 0$ (2) $y' + y = (x+1)^2$

(3) 初期条件 $y(0) = 0$ ($x = 0$ のとき $y = 0$) を満たす $y' + y = (x+1)^2$ の解を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075006)

0.321 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = \tan x \cot y$ (2) $x(x-y)y' + y^2 = 0$

(長崎大 2007) (m20075010)

0.322 次の微分方程式を解け. ここで, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y'' + 16y = 0$ (2) $y'' + 16y = 17e^x$

(3) 初期条件 $y(0) = 6,\ y'(0) = -2,\ (x = 0$ のとき $y = 6,\ y' = -2)$ を満たす $y'' + 16y = 17e^x$ の解を求めよ.

(長崎大 2008) (m20085006)

0.323 (1) $y = x^3 - 3x$ のグラフを描き，x 軸との交点を示せ.

(2) $y = x^3 - 3x$ の極値の位置と極値を示せ.

(3) 変曲点の位置を示せ.

(4) $f = \displaystyle\int_0^z y dx$ のグラフを，(f, z) 座標に描け.

(5) $y = x^3 - 3x$ の導関数を求めそのグラフを描け

(長崎大 2009) (m20095006)

0.324 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' + 4y = \sin 3x$

(3) 初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1.4$ （$x = 0$ のとき $y = 0,\ y' = 1.4$）を満たす $y'' + 4y = \sin 3x$ の解を求めよ.

(長崎大 2009) (m20095009)

0.325 (1) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 0$ の一般解を求めよ.
なお，$y' = \dfrac{dy}{dx}$， $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(2) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$ の特殊解を求めよ.

(3) 微分方程式 $y'' + 2y' - 35y = 12e^{5x} + 37\sin 5x$ の一般解を求めよ.

(長崎大 2009) (m20095013)

0.326 つぎの微分方程式を解け. ここで, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

(1) $y' + 3y = 0$

(2) $y' + 3y = \sin x$

(長崎大 2010) (m20105015)

0.327 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式 $y'' + y = 0$ の一般解を求めよ， なお，$y' = \dfrac{dy}{dx}$，$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(2) 微分方程式 $y'' + y = 6\sin x$ の特殊解を求めよ,

(3) 微分方程式 $y'' + y = 6\sin x$ の一般解を求めよ,

(長崎大 2011) (m20115012)

0.328 微分方程式 $y' + 4y^2 = 1$ を解け．答えを求める過程も記述すること.

(長崎大 2011) (m20115016)

0.329 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ.

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ.

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ.

(大分大 2002) (m20025104)

0.330 次の二重積分を求めなさい.

$$\iint_D xy\,dxdy \qquad ただし,\quad D : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 4$$

(大分大 2005) (m20055104)

0.331 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする. a, b, c, d を求めなさい.

(2) この変換により, 直線 $x+y=0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい. ただし, a, b, c, d は (1) で求めた値とする.

(大分大 2007) (m20075101)

0.332 次の積分について, 以下の問に答えなさい.

$$I = \iiint_D \frac{xz}{(y+z)(x+y+z)^4}\,dxdydz$$

$$D : a \leq x+y+z \leq b,\ 0 \leq x, y, z \quad (0 < a < b)$$

(1) $t = x+y+z,\ u = y+z,\ z = z$ と変換した場合のヤコビアン

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, z)} \qquad \left(= \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, u)} \right)$$

を求めなさい.

(2) D の範囲の概略を $x,\ y,\ z$ からなる直交座標に $a,\ b$ を用いて図示しなさい.

(3) I を $a,\ b$ を用いて求めなさい.

(熊本大 2021) (m20215202)

0.333 以下の各問に答えよ.

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \ \middle|\ 1 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

と定義する. 集合 D を xy 座標平面上に図示せよ. ただし, e は自然対数の底である.

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D xy\,dxdy$$

(宮崎大 2005) (m20055304)

0.334 微分方程式に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $ydy = 3(x^2y^2 + xy^2)dx$

(b) $ye^{y-x}dy = dx$

(2) 次の微分方程式が, 右に示す解をもつことを示せ. ただし, a, b は任意の定数とする.

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \qquad : \quad y = ae^{-2x}\cos 2x + be^{-2x}\sin 2x$$

(鹿児島大 2005) (m20055402)

0.335 次の微分方程式の解を求めなさい. ここで, 初期条件は, $x=0$ のとき $y=0,\ y'=0$ を満たすものとする.

$$y''-2y'-3y=4$$

(鹿児島大 2005) (m20055407)

0.336 微分方程式に関する以下の問に答えよ.

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $2xdx-dy=x(xdy-2ydx)$ (b) $(y^2+\cos x)dx+(2xy-\sin y)dy=0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$$y''+4y'+4y=xe^{-2x}$$

(鹿児島大 2006) (m20065402)

0.337 座標平面上の点 (x,y) を点 (x',y') に変換する行列 T を求めよ. ただし $x=-2y', y=x'$ とする.

(鹿児島大 2006) (m20065410)

0.338 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$ (b) $\left(xy^2+\sin x\right)dx+\left(x^2y+\cos y\right)dy=0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ.

$$y''+4y'+3y=3e^{-x}$$

(鹿児島大 2007) (m20075402)

0.339 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $(xy+2x-3y-6)dx+dy=0$ (b) $(x^2y+\cos x)dx+(x^3/3+\sin y)dy=0$

(2) 次の微分方程式の完全解を求めよ. $y''+2y'+2y=4\sin x$

(鹿児島大 2008) (m20085402)

0.340 次の微分方程式の初期値問題を解け.

$$y''(x)-4y'(x)+3y(x)=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=-5 \quad \text{ここで},\ y''(x)=\frac{d^2y(x)}{dx^2},\ y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}$$

(鹿児島大 2008) (m20085412)

0.341 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'=(2x+y-5)^2+3(2x+y-5)$ （ヒント）$z=2x+y-5$ の変換を試みよ.

(2) $(x^2y-xy^2+x^2)dx+(x^3/3-x^2y+y^2)dy=0$

(3) $y''+4y'+5y=0$

(鹿児島大 2009) (m20095402)

0.342 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $5xy^2dy+2(x^3-3x)ydx=0$

(2) $(xy+\sin x\cdot\cos y)dx+(x^2/2+\cos x\cdot\sin y)dy=0$

(3) $y''+2y'+y=0$

(鹿児島大 2009) (m20095414)

0.343 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $2xydx + xydy + ydx + 2xdy = 0$

(2) $(2xy^2 + \sin x)dx + (2x^2y + \cos y)dy = 0$

(3) $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + 3e^{2x}$

(鹿児島大 2010)　　(m20105403)

0.344 以下の問いに答えよ.

(1) $y_1 = ae^{-x}$, $y_2 = be^{2x}$（a, b は任意定数）はそれぞれ微分方程式 $yy'' - (y')^2 = 0$ の解であることを示し，次に二つの解を足し合わせた関数 $y = y_1 + y_2$ は解ではないことを示せ.

(2) 次の微分方程式について，与えられた条件を満たす解 $y = y(x)$ を求めよ.

$$y'' + 9y = 0 \quad : \ x = 0 \text{ のとき } y = 2,\ y' = 6$$

(鹿児島大 2011)　　(m20115402)

0.345 微分方程式 $y'' + 7y' + 12y = 0$ の一般解を求めなさい.

(鹿児島大 2011)　　(m20115408)

0.346 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(xy^2 - x)dx - (y + x^2y)dy = 0$

(2) $(y^2 + 1)dx + (2xy + \cos y)dy = 0$

(3) $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x + 3e^{-x}$

(鹿児島大 2012)　　(m20125403)

0.347 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $(x^2 + y^2)y' = xy$　　（ヒント ： $y/x = u$ とおく.）

(2) $y''' + 3y' = 0$

(3) $y'' + 6y' + 10y = 4e^{-2x}$

(鹿児島大 2012)　　(m20125408)

0.348 微分方程式 $y'' + 8y' + 15y = 0$ の一般解を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125433)

0.349 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y' = \dfrac{1}{x + y}$

(2) $(x + y^2)dx + (2xy - e^y)dy = 0$

(3) $y'' - y' - 2y = 4\sin 2x$

(鹿児島大 2013)　　(m20135403)

0.350 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $y'' + 4y' + 4y = 4x$

(2) $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$

(鹿児島大 2014)　　(m20145408)

0.351 (1) 次の完全微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $(3x+4y)dx+(4x-5y)dy=0$ (b) $2xydx+(1+x^2)dy=0$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=0$ (b) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

(鹿児島大 2015) (m20155414)

0.352 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $xdy=3ydx$ (2) $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+6\dfrac{dy}{dx}+y=0$ (3) $(2xy+x^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

(鹿児島大 2016) (m20165403)

0.353 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+4y=4x^2+6$ (2) $xdy=5ydx$ (3) $(xy^2-y)dx+x(xy-1)dy=0$

(鹿児島大 2018) (m20185422)

0.354 微分方程式 $y'=x(1-y)$ の一般解を求めなさい.

(室蘭工業大 2011) (m20115514)

0.355 初期値 $y(0)=3,\ y'(0)=-4$ を満足する次の常微分方程式の解を求めよ.

$$y''+y'-6y=0$$

ただし, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ の意味である.

(室蘭工業大 2014) (m20145502)

0.356 次の微分方程式の解を求めよ.

$$2x-2xy+y'=0$$

(室蘭工業大 2017) (m20175511)

0.357 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''+3y'+2y=\cos x$$

(室蘭工業大 2018) (m20185503)

0.358 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$y''-3y'-4y=\cos x$$

ただし, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ の意味である.

(室蘭工業大 2021) (m20215507)

0.359 次の微分方程式の一般解を求めよ. なお, 任意の定数は $C_1,\ C_2$ を用いること.

$$y''+2y'+y=x^2$$

ただし, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'=\dfrac{dy}{dx}$ の意味である.

(室蘭工業大 2022) (m20225501)

0.360 A,B,C,P は $n\times\ n\ (n\geq 2)$ の正則な行列, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{x'},\boldsymbol{y'}$ は $n\times\ 1$ の行列とする. ただし, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ. なお, 答を導出する過程も必ず示すこと.

(1) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}=B\boldsymbol{y}$ とする. このとき, $\boldsymbol{z}=P\boldsymbol{x}$ を満足するような P を A と B で表せ.

(2) $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}=B\boldsymbol{x}$ とする. このとき, $\boldsymbol{z}=P\boldsymbol{y}$ を満足するような P を A と B で表せ.

(3) $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y'} = B\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x'}$ の関係があるとき，B を A と C で表せ．

(香川大 2007)　　(m20075702)

0.361 関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-x}$ の増減・凹凸に関する以下の問いに答えよ．

(1) 関数 y の導関数 y' および 2 階導関数 y'' を求めよ．

(2) 関数 y の変曲点における x 座標を求めよ．

(3) 関数 y が極小となるときの x の値 $x_{\min}$ と極小値 $y_{\min}$，　および，関数 y が極大となるときの x の値 $x_{\max}$ と極大値 $y_{\max}$ を求めよ．

(4) 極小点，極大点，および変曲点を考慮して関数 y のグラフを描け．

(島根大 2007)　　(m20075813)

0.362 次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^3 \int_1^2 \left(2xy - x^2\right) dydx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} y^2 e^{xy}\, dxdy$

(島根大 2008)　　(m20085808)

0.363 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = x - \tan^{-1} x$，$g(x) = x - x\sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $f'(x)$，第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(b) 導関数 $g'(x)$，第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x) = (x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$，第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ であることを示せ．

(c) $y'(x)$，および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ．

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.364 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ $(-1 < x < 1)$ を $\sin x$ の逆関数とし，$f(x) = \sin(2\mathrm{Sin}^{-1}x)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ は次の微分方程式をみたすことを示せ．

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$$

(2) $y = f(x)$ に対して，$(1-x^2)^2 y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$ が成り立つような x の多項式 $p(x)$, $q(x)$ を 1 組求めよ．

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$f(x)$ が最大値をとる x の値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

(4) 次の定積分を計算せよ．

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{Sin}^{-1}x\, dx$$

(島根大 2020)　　(m20205806)

0.365 次の微分方程式は完全形であることを示し, さらに一般解を求めよ，ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

$$(2x + y - 4)y' = x - 2y + 3$$

(首都大 2005)　　(m20055904)

0.366 次の微分方程式について特性方程式を示し，さらに一般解を求めよ，ただし，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする.

$$y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x$$

(首都大 2005)　　(m20055905)

0.367 $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ の逆関数 $y = \sinh^{-1} x$ について，次の式を示せ.

$$y = \sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad y' = \frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(滋賀県立大 2005)　　(m20056001)

0.368 (1) 未知関数 $y = f(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = \sin x$$

の特殊解を求めよ．その結果を使って，一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2005)　　(m20056002)

0.369 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式　$y'' - 2y' - 8y = 0$　の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式　$y'' - 2y' - 8y = 25\cos 3x$　の特殊解を求めよ, その結果をつかって，一般解を書け.

(滋賀県立大 2007)　　(m20076002)

0.370 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式　$y'' + y' - 6y = 0$　の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式　$y'' + y' - 6y = \sin x$　の特殊解を求めよ.
（特殊解を $y = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい．A, B は定数である.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

[注 ; (1) における「同次」および (2) における「非同次」は, それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2008)　　(m20086002)

0.371 原点を中心とする半径 R の球を V とする．このとき，$\displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2)\,dxdydz$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2008)　　(m20086004)

0.372 次の形の微分方程式を同次形という.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(1) このような同次形の微分方程式は，$u = \dfrac{y}{x}$ とおくことによって，変数が x，未知関数が $u = u(x)$ の微分方程式としたとき，変数分離形になることを示せ.

(2) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$ の解のうち $(x, y) = (2, 3)$ を通るものを求めよ.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096002)

0.373 $y = \cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ の逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ について，次の各式を示せ.

(1)
$$y = \cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

(2) $y > 0$ の $y = \cosh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ について
$$y' = \frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(滋賀県立大 2011)　　(m20116001)

0.374 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階同次線形常微分方程式
$$y'' - 6y' + 9y = 0$$
の一般解を求めよ.

(2) 2 階非同次線形常微分方程式
$$y'' - 6y' + 9y = \cos x$$
の特殊解を求めよ．その結果をつかって，一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2011)　　(m20116002)

0.375 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式
$$y'' + 5y' + 6y = 0$$
の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式
$$y'' + 5y' + 6y = \cos 2x$$
の特殊解を求めよ.

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書け.

[注: (1) における「同次」および (2) における「非同次」は，それぞれ「斉次」および「非斉次」といわれることもある.]

(滋賀県立大 2012)　　(m20126002)

0.376 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式
$$y'' + y' - 12y = 0$$
の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式
$$y'' + y' - 12y = 2\cos x$$
の特殊解を求めよ．（特殊解を $y = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2013)　　(m20136002)

0.377 (1) 未知関数 $y = y(x)$ に対する 2 階定数係数同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 2 階定数係数非同次線形常微分方程式

$$y'' - 8y' + 16y = 2\cos x$$

の特殊解を求めよ.

（特殊解を $y(x) = A\sin x + B\cos x$ と仮定してよい.）

(3) 上記 (2) の非同次線形常微分方程式の一般解を書き下せ.

(滋賀県立大 2014)　　(m20146002)

0.378 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式：$y'' + 4y = e^{3x}$ の一般解を求めよ.

(滋賀県立大 2016)　　(m20166004)

0.379 1 次変換 : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ による直線 $y = 3x - 2$ の像の方程式を求めよ.

(滋賀県立大 2022)　　(m20226003)

0.380 $\log x$ は自然対数を表すものとして，下の問いに答えよ.

問 1　C を積分定数とするとき，積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ.

問 2　問 1 の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する 1 階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1 + y^2}$$

の一般解を求め，さらに $x = 0$ のとき $y = 0$ となるもの（特殊解）を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

問 3　問 2 の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y\,dx$$

を求めよ．なお，計算過程も記入せよ.

(宇都宮大 2022)　　(m20226104)

0.381 図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である.

以下の問に答えよ.

(1) 点 B, D の座標を求めよ.

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ.

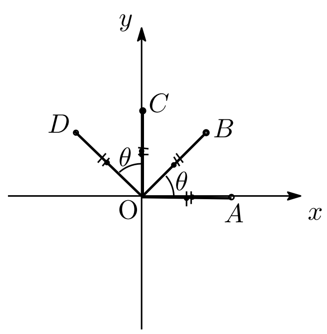


図 1:xy 軸平面

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は,

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.382 微分方程式 $y' - y = e^{2x}\cos x$ を解け.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076307)

0.383 微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}\sin x$ について以下の問に答えよ.

(1) 基本解をすべて求め, それらの 1 次独立性を確かめよ.　　(2) 特殊解を求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076308)

0.384 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y' + 2y = 3e^x$$

を初期条件 $y(0) = 2$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013)　　(m20136301)

0.385 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + y = \cos x$$

を初期条件 $y(0) = y'(0) = 1$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013)　　(m20136302)

0.386 線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって，直線 $x + 2y = 1$ がどのような図形に移されるか, その図形の表す式を求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076502)

0.387 次の微分方程式の一般解を求め, さらに, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = x^3$,　$y(1) = 1$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \cos 3x$,　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$,　$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(和歌山大 2010)　　(m20106503)

0.388 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$,　　$y(0) = 1$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$,　　$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x$, $\quad y(0) = 1$

(和歌山大 2012) (m20126506)

0.389 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい．

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = 2x^2$, $\quad y(0) = 1$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \sin 2x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$, $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(和歌山大 2013) (m20136505)

0.390 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい..

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, $\quad y(0) = 2$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$, $\quad y(0) = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad \dfrac{dy}{dx}(0) = y'(0) = -1$

(和歌山大 2014) (m20146507)

0.391 以下の (1)，(2) に示す微分方程式の一般解をそれぞれ求めなさい． ただし，e は自然対数の基底である．

(1) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

(2) $y'' - 4y' + 4y = e^x$

(和歌山大 2017) (m20176507)

0.392 微分方程式 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ に対して，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) 一般解を求めなさい．

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めなさい．

(3) (2) で求めた解 $y(t)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t)$ を求めなさい．

(和歌山大 2018) (m20186504)