[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：　表・図表

0.1 次のカッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{(ア)}$ であり, A の固有値は, 小さい方から順に $\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$ である.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式の値は $\boxed{(オ)}$ である. B の逆行列について, B^{-1} の $(2,1)$ 成分は $\boxed{(カ)}$ である。

(秋田大 2010)　　(m20100401)

0.2 次の極限を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数のことで, $\sin^{-1}$ と表されることもある.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \boxed{(キ)}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{1}{\boxed{(ク)}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(2x)}{x} = \boxed{(ケ)}$

(秋田大 2010)　　(m20100402)

0.3 次の定積分を求め, カッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

以下の arcsin は逆正弦関数, π は円周率, log は底が e である自然対数を意味する.

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \boxed{(コ)}\,\pi$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\log 2}{\boxed{(サ)}}\,\pi$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{\boxed{(シ)}}$

(秋田大 2010)　　(m20100403)

0.4 ある道路で歩行者の歩行速度の調査を行ったところ，以下の表のような結果となった．調査対象者全体の，歩行速度の平均値 $\overline{z}$ および不偏分散 $\hat{\sigma}_z{}^2$ を求めよ．

	調査した人数	歩行速度の平均値	不偏分散
60 歳未満	9 人	$\overline{x} = 1.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_x{}^2 = 0.2 \quad (m/s)^2$
60 歳以上	18 人	$\overline{y} = 0.8 \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_y{}^2 = 0.1 \quad (m/s)^2$
調査対象者全体	27 人	$\overline{z} \quad (m/s)$	$\hat{\sigma}_z{}^2 \quad (m/s)^2$

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170612)

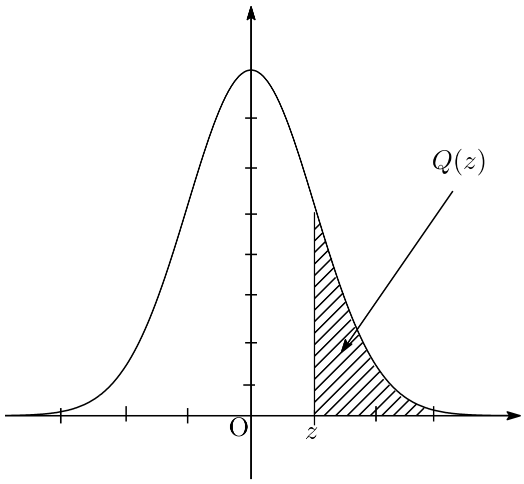
0.5 ある会社のペットボトル飲料水の容量表示が $500mL$ と印字されている．しかしながら，工場での注入の際に製品ごとに変動が生じる．含量は，平均 $\mu = 505.0mL$，標準偏差 $\sigma = 2.0mL$ の正規分布に従うことが分かっている．以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて付表 1 を利用せよ．

(1) 含量が表示である $500mL$ を下回る製品の割合を求めよ．

(2) $500mL$ を下回る製品の割合を 0.3% 以下にするためには注入機械の精度である標準偏差 σ をどれくらいにする必要があるか答えよ．

付表 1　正規分布 $N(0,1)$ の上側確率 ($z \to Q(z)$)

z	$Q(z)$
0.50	0.3875
0.75	0.2266
1.00	0.1587
1.25	0.1057
1.50	0.0668
1.75	0.0401
2.00	0.0228
2.25	0.0122
2.50	0.0062
2.75	0.0030
3.00	0.0013



(お茶の水女子大 2019)　(m20190603)

0.6 ある健康改善プログラムの参加者の最高血圧 (mmHg) は，実施前の測定において平均値 $\mu = 125.0$, 標準偏差 $\sigma = 10.0$ の正規分布に従うことがわかっている． このプログラムでは，最高血圧の目標値を 130.0 (mmHg) と設定している． 以下の (a) と (b) に答えよ． 必要であれば付表 1 を利用せよ. (※付表 1 は標準正規分布表)

(a) 参加者のうち，実施前に目標値を超過している人の割合を求めよ.

(b) プログラム実施後に最高血圧を測定したところ，目標値を超過する人の割合が 5% 以下になった． このとき，最高血圧の平均値はいくら未満であるか求めよ． ただし，プログラム実施後の最高血圧も正規分布に従い，標準偏差は変わらず $\sigma = 10.0$ とする.

(お茶の水女子大 2020)　(m20200618)

0.7 あるサイコロを振ったところ, 出た目は次の通りであった． カイ 2 乗検定を行い，有意水準 5 %でこのサイコロが公平なサイコロと言えるかどうかを確かめよ． なお，カイ 2 乗分布表より $\chi_5^2(0.05)$ 値は 11.070 である．

目	1	2	3	4	5	6
回数	20	12	9	16	11	22

(お茶の水女子大 2021)　(m20210603)

0.8 方程式 $ax^2 + 4bx + c = 0$ が相異なる 2 つの実根をもつ確率を，(1), (2) それぞれの場合に対して求めよ.

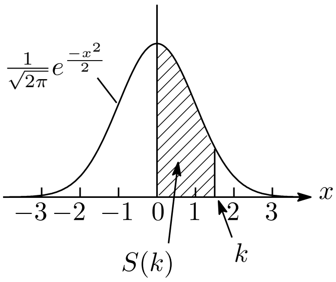
(1) a, b, c がそれぞれ無作為に 0, 1, 2 のいずれかの値をとるとき.

(2) a, c がそれぞれ無作為に 1, 2 のいずれかの値をとり，a, c と関係なく b は平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従うとき.

ただし，$\sqrt{2} = 1.4$ とし，次の表を利用してよい.

k	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.2
$S(k)$	0.117	0.191	0.258	0.316	0.341	0.385

ここに，$S(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^k e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ とする．たとえば，平均 0，標準偏差 1 の正規分布に従う変数 x が 0.7 から 1.0 をとる確率は，$P(0.7 < x < 1.0) = S(1.0) - S(0.7) = 0.083$ である.



(東京大 2004)　(m20040705)

0.9 確率変数 X, Y, U が互いに独立で，各々正規分布 $N(\mu_1, {\sigma_1}^2), N(\mu_2, {\sigma_2}^2), N(\mu_3, {\sigma_3}^2)$ に従うとする．

(1) 任意の定数 a, b, c に対して，$W = aX + bY + cU$ の分布を求めよ．

(2) $V = \left(\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Big/ \left(\dfrac{Y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ の分布を求めよ．

(3) $P\left(-3 \leq \dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1} \leq 3\right)$ を求めよ．

ただし，標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数を

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

とおくと，次表の値をとる．

z	0.0	1.0	2.0	3.0
$\Phi(z)$	0.5000	0.8413	0.9772	0.9987

(電気通信大 2001)　　(m20011011)

0.10 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) ２つのロットの中から 1 つのロットを選び, さらにその箱の中から 1 個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット 1 の製品である確率を求めよ.

(2) ロット 2 の製品を 30 個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と 2 項係数を使って表せ. ただし, 2 項係数は

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

で定義される.

(電気通信大 2005)　　(m20051009)

0.11 下の真理値表の空欄部 (ア)〜(オ) を埋め, これを用いて (1)〜(5) の命題の真偽（真理値）を答え，簡単な説明を加えなさい.

【真理値表】T は真，F は偽とする.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
T	T	F	F	T	T	T	(イ)
T	F	F	T	F	T	F	(ウ)
F	T	T	F	F	T	T	(エ)
F	F	T	T	F	(ア)	T	(オ)

(1) 北京は中国の首都であり，かつ，$7 \times 5 = 29$.

(2) 北京は中国の首都であり，または，$7 \times 5 = 29$.

(3) $7 \times 5 = 35$ ならば，大阪は日本の首都である.

(4) $7 \times 5 = 100$ ならば，大阪は日本の首都である．

(5) 北京は中国の首都であるとき，そして，そのときに限り $7 \times 5 = 100$ である．

(千葉大 2007)　　(m20071205)

0.12 次の表は，学生 10 人の数学と英語のテストの成績である．数学と英語の成績に相関関係があるか判断せよ．
(筑波大 2003)　　(m20031319)

学生番号	数学	英語
1	58	60
2	35	50
3	65	50
4	42	60
5	85	70
6	30	42
7	45	60
8	46	50
9	90	98
10	45	60

0.13 友人数人が旅行の相談をし, 次の条件 (a)〜(d) をすべて満たす場所を選ぶことにした.

(a) 温泉地であること

(b) 紅葉が見られるか, または湖があること

(c) 海辺ではないこと

(d) 所要時間が 3 時間以内であること

「温泉地である」,「紅葉が見られる」,「湖がある」,「海辺がある」ことをそれぞれ命題 A, B_1, B_2, C とし,「所要時間が x 時間以内である」ことを命題 $t \leqq x$ で表す.

下表のように候補地 1〜10 に対し, 命題 A, B_1, B_2, C の真偽（それぞれ T と F で表す）, および所要時間が与えられているとき, 以下の問に答えよ.

(1) 上記の (a)〜(d) をすべて満たすという命題を，A, B_1, B_2, C, $t \leqq x$ および命題結合記号 $\vee(OR)$, $\wedge(AND)$，$\neg(NOT)$ を使って表せ.

(2) (a) と (b) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(3) (a),(b) および (c) を結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ.

(4) (a)〜(d) をすべて結合した命題が真となる候補地をすべて挙げよ

候補地	命題 A	命題 B_1	命題 B_2	命題 C	所要時間
1	T	F	T	F	2
2	F	T	T	T	2
3	F	T	F	T	3
4	T	T	F	T	3
5	T	T	T	F	3
6	T	F	F	T	3
7	F	T	F	T	4
8	T	F	T	F	4
9	T	F	F	T	5
10	T	T	T	F	5

(筑波大 2004)　　(m20041304)

0.14 2つの確率変数 X と Y の結合確率分布 $P\{X=m\,,\ Y=n\}$ $(m=0,1,2,3\,;\ n=0,1,2,3,4)$ が下の表のように与えられている.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	c	0	0	0
$Y=1$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0	0
$Y=2$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0
$Y=3$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$
$Y=4$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	0

ただし, c は定数である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 定数 c の値を決めよ.

(2) X だけの確率分布 $P\{X=m\}$ $(m=0,1,2,3)$ を求めよ.

(3) X の平均 $E[X]=\displaystyle\sum_{m=0}^{3} mP\{X=m\}$ を求めよ.

(4) Y の平均 $E[Y]$ を求めよ.

(5) XY の平均 $E[XY]$ を求めよ.

(6) X と Y が独立であるかどうかを, 理由を示して判定せよ.

(筑波大 2005)　　(m20051304)

0.15 以下の (1)〜(3) において, 「前提」が正しい場合に「結論」が正しい例, 正しくない例をそれぞれ1つずつ, a,b,c 等の文字の具体的な数値例で示せ. 下の例も参照のこと.

- 正しい例／正しくない例が存在しない場合には解答欄に「なし」と記すこと.
- 考える数値は実数の範囲とし, $1\div 0$, $\sqrt{-1}$ のように実数として意味を持たない例は用いないこと.

	前提	結論	正しい例	正しくない例
例 1	$a>0$	$a=ab$	$a=b=1$	$a=b=2$
例 2	$x^2-3x+2=0$	$x>0$	$x=1$	なし

(1) 前提：$a>b,\ c>d$　　結論：$ac>bd$

(2) 前提：$a^2+b^2=1$　　結論：$2ab\leqq 1$

(3) 前提：$a>b>1$　　結論：$a^b>b^a$

(筑波大 2008)　　(m20081333)

0.16 確率変数 X と Y の同時確率分布 $P[X=x,\ Y=y]$ $(x=0,1,2;\ y=0,1,2,3)$ が下の表のように与えられている. ただし, c は実数である.

$x\setminus y$	0	1	2	3
0	c	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0

このとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) 定数 c の値を示しなさい.

(2) $X > y$ となる確率 $P[X > Y]$ を求めなさい.

(3) 確率変数 X と Y が独立であることの定義を記述し，表に与えられた X と Y が独立であるかどうかを判定しなさい.

(筑波大 2015)　　(m20151316)

0.17 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる.

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ.

(2) $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ.

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.18 $E_1, \cdots, E_n$ を互いに排反で網羅的な事象とし，各事象 E_k が生起する確率を θ_k とする．今，実験を m 回独立に試みたとき，事象 E_k が観測される度数を x_k とすると，$(x_1, \cdots, x_n)$ が実現する確率 $P(x_1, \cdots, x_n)$ は多項分布により求められる．ここで，$m = x_1 + \cdots + x_n$ である．$\theta_1, \cdots, \theta_n$ が既知であるとき，サンプル $(x_1, \cdots, x_n)$ が多項分布に従う母集団からとられたという帰無仮説は次の統計量

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m\theta_k)^2}{m\theta_k}$$

で検定できる．m が十分大きいときは，統計量 S は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従う．自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布の 100α% 有意水準点を $X^2(n-1,\ \alpha)$ により表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 上記の問題において，5% 有意水準で帰無仮説が棄却される条件を式で示せ.

(2) サイコロを 120 回投げ，出た目の度数を数えたとき，下記のようになったとする.

出た目	1	2	3	4	5	6	計
度　数	15	19	23	20	21	22	120

このとき，サイコロが偏っていないという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されないという条件を式で示せ.

(3) ランダムに選ばれた 800 個の材料のうち 400 個に処理 1（事象 A）を，残りの 400 個に処理 2（事象 $\overline{A}$）を行った．さらに，これらの材料の強度試験を行ったところ，もろい（事象 B）ともろくない（事象 $\overline{B}$）という 2 種類に下表のように分離された;

	もろい	もろくない
処理 1	77	323
処理 2	177	223

この問題では，$n=4$, $m=800$ となるが，各事象が生起する確率 $P(A)$, $P(B)$ は未知である．そこで，観測された度数の割合で求められる値を $P(A)$, $P(B)$ の推定量として置き換えて計算する．このとき，統計量 S は m が十分に大きいならば，自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．材料の処理と強度とは独立であるという帰無仮説が 5% 有意水準で棄却されるという条件を式で示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181313)

0.19 テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p, q で視聴すると仮定する．また，各世帯は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．なお，$0 \leq a \leq 1$ を満たす a に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-a)\%$ 点 z_a は

$$P_r(Z \geq z_a) = a$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$P_r(Z \geq z_a)$ は Z が z_a 以上になる確率である．

a	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_a	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\hat{p}=0.1$ を得た．このとき，p の 95% 信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\hat{q}=0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191313)

0.20 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ．

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする．

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である．

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2020)　　(m20201308)

0.21 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるために，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A,\ \sigma_A^2)$, $N(\mu_B,\ \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学 で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表３ F 分布表：分子の自由度 m_1，分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1, m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1, m_2)$（下段）

m_1 \ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表４ t 分布表：自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120

(筑波大 2021)　　(m20211314)

0.22 次は，あるクラスのテストの点数である．

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は 72.0，標本不偏分散は 124.5 である．テストの点数は，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする．このとき，以下の各問に答えよ．なお，計算の過程で適宜，有効数字 3 桁に丸めてよい．

(1) 母分散 σ^2 の 95 % 信頼区間を求めよ．

(2) 母平均 μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(3) $\sigma^2 = 121$ と判明したとき，μ の 95 % 信頼区間を求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221309)

付表１

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表２

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

付表３ 標準正規分布表：$Q(z) = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$，ただし，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数 （省略）

付表４　χ^2 分布表：自由度 m の χ^2 分布の上側 $100\alpha\%$ 点 $\chi^2_\alpha(m)$

α ＼ m	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表５　t 分布表：自由度 m の両側 $100\alpha\%$ 点 $t_\alpha(m)$

α ＼ m	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228

0.23　ある店の単位時間あたりの来客数 X は，平均 λ のポアソン分布に従う．すなわち，t 時間あたりの来客数 X_t は，

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

に従う．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 来客の発生間隔 T の確率密度関数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t > 0)$ を導出せよ．

(2) 1 時間平均 1.5 人の来客があるとき，2 時間以上来客が無い確率を求めよ．

(3) 開店時間 t_0 から s 時間来客が無いとき，時刻 $t_0 + s$ から初めて客が来るまでの時間 H の確率密度関数を導出せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221310)

付表２

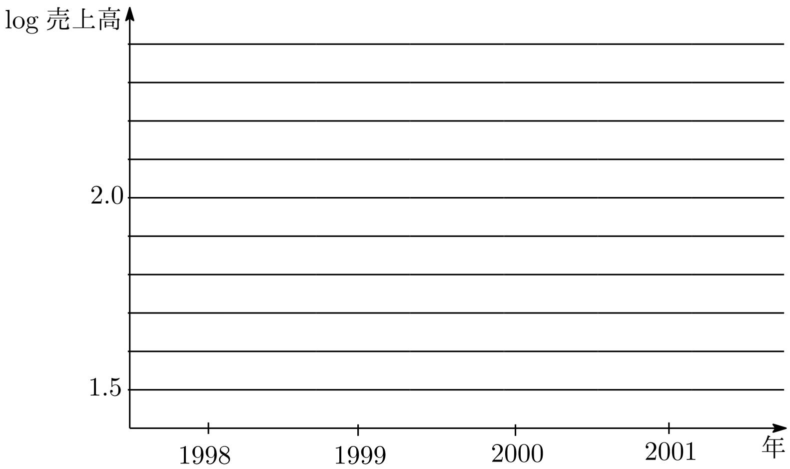
$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$

0.24　ある会社では，３種の商品の過去４年間の売上高が次のようであった．以下の３問に答えよ．

	1998 年	1999 年	2000 年	2001 年
商品 A	91 万円	123 万円	170 万円	229 万円
商品 B	31 万円	51 万円	78 万円	126 万円
商品 C	46 万円	83 万円	141 万円	257 万円

(1) 伸び率を見るために，片対数グラフを作成したい．売上高を１万円を単位に対数変換すると，次のようになった．対数の底は 10 とし，小数第３位で四捨五入した．図に商品の売上高を点で示し，各商品ごとの売上高の推移がわかるようにもっとも適切な直線を図に書き込め．

売上高（万円）	31	46	51	78	83	91	123	126	141	170	229	257
log 売上高	1.50	1.66	1.71	1.89	1.92	1.96	2.09	2.10	2.15	2.23	2.36	2.41



(2) 売上高を対数にしたときの，商品 B の y 年の売上高 t を近似したら，$\log t = ay + 1.5$ になった．定数 a を求め，y 年の売上高 m を示す式を示せ．

(3) 売上高の伸び率が今後もほぼ一定だと仮定したとき，商品 B の売上高が 1000 万円を超えるのは何年と推測できるか．

(群馬大 2003)　　(m20031501)

0.25 命題の証明に関する以下の問いに答えなさい．

(1) p と q を命題とする．命題 $p \to q$ が真であることを証明するために，下表に示す 3 つの方法がある．直接法に関する説明を参考にして，対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい．

直接法	pを真と仮定して, qが真であることを証明する.
対偶法	（解答用紙に説明しなさい）
背理法	（解答用紙に説明しなさい）

(2) 命題関数 $P(n)$ を「最初の n 個の正の奇数の和は n^2 である」とする．すべての正の奇数 n に対して $P(n)$ が真であることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181804)

0.26 (1) 正四面体のサイコロとは，正四面体の 4 頂点に 1〜4 の数値が割り当てられており，上の頂点の数値を出目とするサイコロである．出目を確率変数 X とすると，その確率分布表は以下のとおりである．

X	1	2	3	4
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

さて，2 個の正四面体サイコロを振り，2 つの出目の和を Y とする．まず，確率変数 Y について確率分布表を求めなさい．そして，Y の期待値を求めなさい．

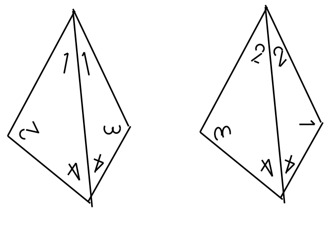


図 正四面体のサイコロ
（左のサイコロの出目は 1 で，
右の出目は 2 である）

(2) n 人がいるとき，少なくとも 2 人の誕生日が同じ月日である確率を求めなさい．
ただし，$1 < n < 365$ とし，うるう年は考えないこととする．

(山梨大 2019)　　(m20191805)

0.27 表に示すように，xy 直交座標平面上に

(x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ で表される 5 個の点がある．

$$\sum_{i=1}^{5}\{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

を最小にする条件で，a と b を求め，

5 個の点に対する近似直線を求めなさい．

i	x_i	y_i
1	2	3
2	3	4
3	6	5
4	9	5
5	10	8

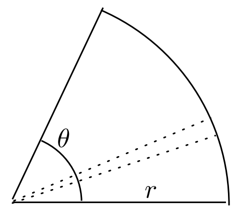
(福井大 2004)　　(m20042421)

0.28 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．

ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は

1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする．

r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$



(1) ある量の i 回目の観測値を x_i，n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき，
$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする．最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい．

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ．

(3) 角度の最確値を度 ($^\circ$) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ．また，同じ角度をラジアン単位で示せ．だたし，円周率は π とする．

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から，もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい．

(5) この扇形の面積を，図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい．

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.29 下表のデータに対する最小 2 乗近似 1 次式を求めよ．

K	1	2	3	4	5
x_k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f_k	0.25	1.2	2.0	3.1	4.4

近似 1 次式は，$p(x) = a + bx$ とする． 誤差 $G\left(= \displaystyle\sum_{k=1}^{k=5}|f_k - p(x_k)|^2\right)$ を最小にするように, 係数 a，係数 b を決定せよ．

(岐阜大 2004)　　(m20042607)

0.30 (1) 2 組の事象群 $X = \{x_1, x_2\}$，$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ がある. それぞれの事象群の要素は互いに排他的である. また, x_i が起こる確率を $P(x_i)$，y_j が起こる確率を $P(y_j)$ としたとき, $P(x_1)+P(x_2) = 1$ および $P(y_1)+P(y_2)+P(y_3) = 1$ が成立する. x_i と y_j が同時に起こる確率（同時確率）を $P(x_i, y_j)$ で表す. さらに, x_i を条件としたとき y_j が起こる確率（条件付き確率）を $P(y_j \,|\, x_i)$ で, 逆に y_j を条件としたとき x_i が起こる確率を $P(x_i \,|\, y_j)$ で表す. 同時確率 $P(x_i, y_j)$ が下表で示すように与えられている. このとき次の問いに答えよ.

(a) $P(x_2)$ を求め, ついで $P(y_1 \,|\, x_2)$，$P(y_2 \,|\, x_2)$ および $P(y_3 \,|\, x_2)$ を求めよ.

(b) $P(y_1)$ を求め, ついで $P(x_1 \,|\, y_1)$ および $P(x_2 \,|\, y_1)$ を求めよ.

(c) $P(y_j\,|\,x_i)$ を $P(x_i)$, $P(y_j)$ および $P(x_i\,|\,y_j)$ で表す式を導け. ただし, $P(x_i) \neq 0$ とする.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.2	0.3
x_2	0.2	0.1	0.1

(2) 1 回の試行で 1 から 10 までの整数からなる一つの乱数を発生する装置がある.

(a) 3 回の試行で得た 3 個の整数がいずれも異なる確率を求めよ.

(b) 試行回数を増やすと, 得た整数の中に重複するものが存在する確率が次第に増加する. この確率が初めて 50 %を超えるのは何回目か.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052706)

0.31 関数の微分の定義は次式で与えられる.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという.

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい.

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば, $f(x) + g(x)$ は微分可能であり,
次の公式が成り立つ.

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

(三重大 2002)　　(m20023107)

0.32 以下の式で表される，二つの 3 次関数について， (1)〜(3) のすべてに答えよ.

$$y = -2x^3 + 8x^2 - 6x \quad ①$$

$$y = x^3 - 2x^2 + ax \quad ②$$

(1) ①，②で表される 2 本の曲線は，原点 $(0,0)$ で交差する．このほかに，ただ 1 点で両者が接するような， a の値を求めよ．以下の問題で， a はこの値を取るとする.

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる.

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする.

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）.

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する.

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する.

また， xy 平面上に， ①, ② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ.

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ.

（三重大 2004）　　(m20043106)

0.33 交通事故が一日に平均 2 回起こり, 火事が平均 1 回起こる町がある. 交通事故と火事はそれぞれ独立にポアソン分布 $f(x) = \dfrac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$ に従って起こるものとして以下の問に答えよ. ただし, μ はポアソン分布の平均である.

(1) この町で交通事故も火事も起こらない日は 1 年 (365 日) に何日あるか, その期待値を求めよ.

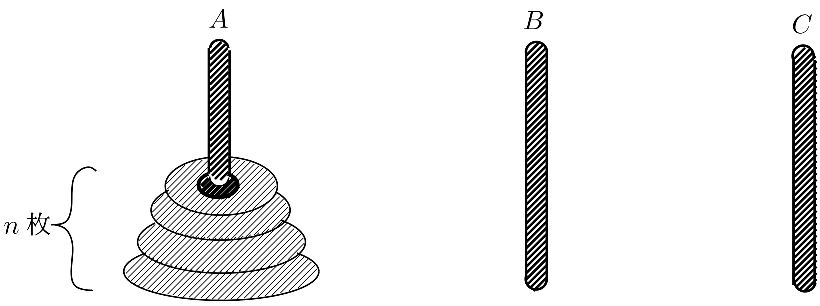
(2) この町で交通事故と火事があわせて 2 回起こる日は 1 年に何日あるか, その期待値を求めよ.

e^{-x} の値は右の表の値を使用せよ.

x	e^{-x}
1	0.37
2	0.14
3	0.050
4	0.018
5	0.0067

(三重大 2005)　　(m20053120)

0.34 以下の問題は，ハノイの塔と呼ばれる問題である．以下の設問 (1)-(3) に答えよ．



ハノイの塔の問題

> 図のように，n枚の円盤を積んだ塔がある．最初，３本の棒A,B,Cのうち，Aに全ての円盤を大きいものから小さいものへ順に積んである．このn枚の円盤全てを,Cの棒に移動したい．ただし，移動は，棒の最上の円盤１枚を別の棒の最上に動かすことしかできない（1回に２枚以上動かせない）．また，大きい円盤を小さい円盤の上に置いてはいけない．さらに，棒以外のところに円盤を置いてはいけない．

例えば n が 2 のとき，$A \to B$, $A \to C$, $B \to C$ と 3 回円盤を動かすことで，全てを移動できる．（$A \to B$ は，A の棒の最上の円盤を B の棒の最上に移動して置くことを意味する.）

(1) n が 3 のとき，全ての円盤を移動する最小の手順を $A \to B$, $\cdots$ のように記述せよ．

(2) 一般に n 枚 ($n \geq 1$) の円盤全てを最小の手順で移動したときの，円盤の総移動回数を $X(n)$ とする．$X(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(3) ハノイの塔の問題に，$A \to C$ および $C \to A$ の移動を禁止する制約を追加する（他の制約は同じ）．この制約下で，n 枚 ($n \geq 1$) の円盤全てを最小の手順で移動したときの円盤の総移動回数を $Y(n)$ とする．$Y(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023501)

0.35 以下の問題に対して全て有効数字 3 桁で答えよ.

(1) 次の問いに答えよ.

(1-1) 区間 [1, 6] 上の一様分布の平均を求めよ.

(1-2) ある企業の工場 A, B, C が不良液晶ディスプレイを製造する確率はそれぞれ 5%, 4%, 2% である．その企業で生産される全液晶ディスプレイの 40% が工場 A で，40% が工場 B で，20% が工場 C で製造されている．もしその企業の液晶ディスプレイの中から取り出した一

台が不良品だったとき，その不良液晶ディスプレイが工場 A で製造されたものである確率を求めよ．

(2) 200 人が受験した試験において無作為に 5 名の受験生を抽出した所，以下の標本を得た．次の問いに答えよ．

	学生 A	学生 B	学生 C	学生 D	学生 E
数学の得点	50	50	50	50	60
電磁気学の得点	90	60	70	75	80

(2-1) 数学の得点の標本平均 $\overline{x}$，標本分散 s_x^2，不偏分散 u_x^2 を求めよ．

(2-2) 数学の得点の母分散が $\sigma_x^2 = 45$ の場合，母平均 μ_x の 95% 信頼区間を求めよ．数値計算に際して，必要ならば標準正規分布表を用いよ．

(2-3) 数学と電磁気学の得点の相関係数 ρ を求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183504)

0.36 (1) 次の表に示すデータ x, y について，以下の問いに答えよ．

	No.1	No.2	No.3	No.4	No.5
x	1.0	3.0	2.5	2.0	4.0
y	11.0	17.0	15.0	13.0	19.0

(1-1) データ x, y の分散 S_{xx}, S_{yy} および共分散 S_{xy} をそれぞれ求めよ．

(1-2) データ x と y の相関係数を r とするとき．r^2 の値を求めよ．

(1-3) x を説明変数，y を目的変数とするとき，データ x, y の回帰直線の式を求めよ．

(2) テレビの視聴率について，以下の問いに答えよ．

ただし，$0 < \alpha < 1$ である値 α と標準正規分布に従う確率変数 Z について

$P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる z_α を考える．このとき，

$z_{0.050} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.960$, $z_{0.010} = 2.326$, $z_{0.005} = 2.576$ とする．

(2-1) 無作為に抽出された 900 世帯について調査したところ，180 世帯がある番組を視聴していた．この番組の視聴率 p を信頼係数 95% で推定せよ．
ただし，信頼限界は小数第三位まで求めよ．

(2-2) 95% の信頼区間の幅を 0.05 以下にするためには，何世帯以上調査すればよいか答えよ．

(大阪大 2020)　　(m20203504)

0.37 (1) 100 円玉 2 枚，10 円玉 4 枚，5 円玉 6 枚が入った財布から，同時に 3 枚の硬貨を取り出す．いずれの硬貨を取り出すのも同様に確からしいとする．

(1-1) 取り出した 3 枚の金額の合計が 115 円である確率を求めよ．

(1-2) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上である確率を求めよ．

(1-3) 取り出した 3 枚の金額の合計が 200 円以上になる事象を A，取り出した 3 枚の中に 10 円玉が含まれる事象を B とした場合の条件付き確率 $P(B|A)$ を求めよ．

(2) 次の表は，ある試験の結果である．各教科の得点分布は，それぞれ正規分布に従うものとする．

教科	受験者数（人）	平均（点）	標準偏差（点）
数学	400	60.0	15.2
国語	500	119.7	30.1
英語	600	120.3	20.6
物理	200	50.8	8.0
歴史	100	65.8	11.5

(2-1) この試験を受験した S 君の得点は，数学 85 点，国語 151 点，英語 135 点，物理 67 点，歴史 81 点であった．数学，国語，英語，物理，歴史を S 君の偏差値が高い順に並べよ．

(2-2) S 君の数学の得点が 85 点である場合，数学における S 君の上からの順位に最も近いものを 10 位，20 位，50 位，100 位，150 位の中から 1 つ選択し，理由と共に示せ．必要ならば以下に示す標準正規分布表を用いよ．
（標準正規分布表 $P(0 \leq Z \leq z)$ は省略）

(大阪大 2022)　　(m20223504)

0.38 ある町の 1 日における天気（晴，雨）と交通事故発生（有，無）について，1 年間のデータを調べたところ，その同時確率が次の表のようになった．

	事故無	事故有
晴	0.4	0.2
雨	0.3	0.1

(1) 天気が雨であることを条件とみなして事故が発生する条件付確率を求めなさい．

(2) ある日のデータを見ると事故が発生していた．このとき，天気が晴であった確率を求めなさい．

(3) ある日の天気の晴雨いずれかを知ったときに得られる情報量を求めなさい．
ただし，$\log_2 10 = 3.32$, $\log_2 3 = 1.58$ とし，途中の計算式も書きなさい．

(山口大 2007)　　(m20074302)

0.39 ある県の交通安全週間 7 日間の交通死亡数は以下の表の通りであった. 平均死亡者数とその標準偏差を求めよ.

	1 日目	2 日目	3 日目	4 日目	5 日目	6 日目	7 日目
死亡者数	0 人	1 人	3 人	6 人	1 人	1 人	3 人

(長崎大 2005)　　(m20055020)

0.40 次の問いに答えなさい．ただし，$|x| < 1$ とする．

(1) $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を用いて，$\tan^{-1} x$ の Maclaurin 展開を求めなさい．なお，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

である．

(2) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1}{5}$ とするとき，

$$\tan 2\theta = \frac{5}{12},\ \tan 4\theta = \frac{120}{119},\ \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

であることを示して，$\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ を導きなさい．

(3) (1),(2) を用いて，π の近似値を小数第 5 位まで求めなさい．必要であれば，以下の補助表を用いてもよい．

補助表

x	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$	$\frac{x^6}{6}$	$\frac{x^7}{7}$	$\cdots$
$\frac{1}{5}$	0.2	0.02	0.00267	0.0004	0.00006	0.00001	0	$\cdots$
$\frac{1}{239}$	0.00418	0.00001	0	0	0	0	0	$\cdots$

(熊本大 2013)　　(m20135203)

0.41　確率変数 X の確率分布が下表により与えられているとき，X 平均値および分散を求めよ．

X	2	4	6	8
確率分布 P	0.4	$0,3$	0.2	0.1

(宇都宮大 2007)　　(m20076110)

0.42　ある工場で製造される製品の重さ（単位 kg）が正規分布 $N(2,\ 0.0016)$ に従っているとする．ある日，100 個の製品を抜き取り，重さを測定したところ平均が 2.011kg であった．この日の製品が，平常と比べて重くなっているといえるか．危険率（有意水準）1% で検定しなさい．なお，解答にあたっては，次の定理および正規分布表を用いてよい．

定理 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ が，正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ に従う独立な確率変数であるとき，

$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ は正規分布 $N(\mu,\sigma^2/n)$ に従う．

よって，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ は正規分布 $N(0,1)$ に従う．

(和歌山大 2008)　　(m20086503)

0.43　出る目の確率分布が次の表で与えられるサイコロがある．

出る目	1	2	3	4	5	6	計
確　率	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1

次の問いに答えよ．

(1)　このサイコロを 1 回投げたときの出る目の期待値と分散を求めなさい．

(2)　このサイコロを 2 回投げたとき, 出る目の積が 6 になる場合の確率を求めなさい．

(3)　このサイコロを 3 回投げたとき, 出る目がすべて異なる場合の確率を求めなさい．

(和歌山大 2010)　　(m20106502)