[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：発散

0.1 ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div $\mathbf{a}$ を求めよ.

(2) 回転 rot $\mathbf{a}$ を求めよ.

(北海道大 1997)　(m19970103)

0.2 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}} + 3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　(m20180104)

0.3 関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \quad , \quad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　(m20040502)

0.4 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ.

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ.

(東北大 2018)　(m20180509)

0.5 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^\alpha (\log x)^n\,dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ．

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ．

(東北大 2022) (m20220511)

0.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $p > 1$ ならば収束し，$p \leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997) (m19970604)

0.7 (1) 次の級数の収束・発散を言え．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ．

(例) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots (\rho = 0)$

(i) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (ii) e^x (iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999） (m19990607)

0.8 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad ④$$

に対して, 以下の問いに答えよ. ここで $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである。また $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial x}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ の発散, $\nabla \cdot \left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ を求めよ $(r \neq 0)$. ただし, $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ である.

(お茶の水女子大 2010) (m20100608)

0.9 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める．

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ． また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ．

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する． 適当な多項式 P_m, Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ． また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.10　N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1)　$y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2)　広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.11　実 3 次元空間の任意の点を (x,y,z) と表すとき，ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 $(\mathrm{div}\vec{V})$ と回転 $(\mathrm{rot}\vec{V})$，及び $|\vec{V}|$ の勾配 $(\mathrm{grad}|\vec{V}|)$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220607)

0.12　3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2+z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \overrightarrow{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)$$

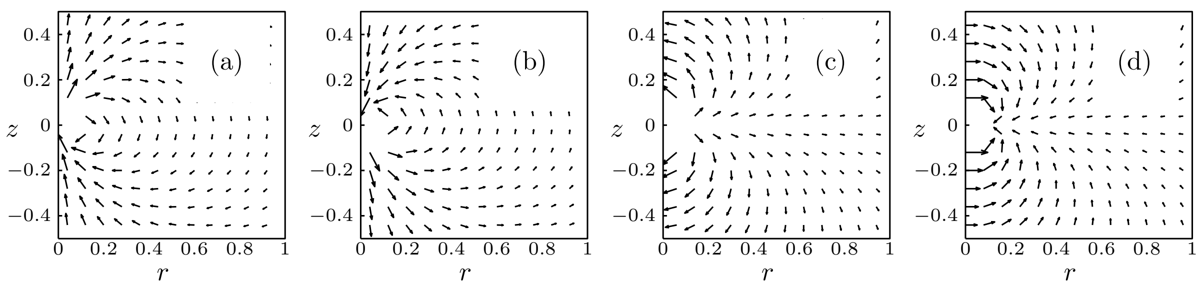
(1)　$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2)　$r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$$

(3)　$\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4)　ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 ($z_1 > 0$) に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.13 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ ，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする.

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする.

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = \int_0^x [-2\sin^2(t)]\, dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ.

(c) y の一般解を求めよ.

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする.

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ.

(b) y の一般解を求めよ.

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.14 $\beta, \gamma < 0$ とする．次の広義積分の値を求めよ．ただし，広義積分が ∞ に発散する場合には，その値を ∞ とする.

(1) $\displaystyle\iint_{0<x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)^\beta dxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\geq 1} (x^2+y^2)^\gamma dxdy$

(東京工業大 2009)　　(m20090803)

0.15 実変数 t の関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}$$

を満たしている.

(1) $t \to -\infty$ のとき，$x(t)$ は有限の値に収束することを示せ.

(2) $t \to +\infty$ のとき，$x(t)$ が $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないならば，$x(t)$ は定数関数であることを示せ.

(東京工業大 2009)　　(m20090804)

0.16 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，
$f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.

(3) n を任意に固定する．このとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111306)

0.17 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x \in [n, n+1) \text{ において} \quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.18 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする.

(埼玉大 2016)　　(m20161405)

0.19 広義積分 $I = \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2 + \sin x}dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021)　　(m20211902)

0.20 次の級数が収束するときはその和を求めよ．発散するときはその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006)　　(m20062001)

0.21 次の各問いに答えよ.

(1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ を示せ.

(2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限値を求めよ．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

(新潟大 2012)　　(m20122014)

0.22　任意の x,y,z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+y+4z \\ -4x+3y+2z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える．次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1,p_2,p_3 を求めよ．

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$, $\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)}<\mu_2^{(n)}<\mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n=\dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.23　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$

(金沢大 2015)　　(m20152206)

0.24　λ を実数，$t>0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x \geqq\ 0,\ x^2+y^2 \leqq\ t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t)=\iint_{D_t}(1+x^2+y^2)^{\lambda}dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ．

(2) $t\to\infty$ としたとき，$I(t)$ の収束・発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.25　次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである．

(1) スカラー関数 $\phi=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　　(m20162209)

0.26　ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

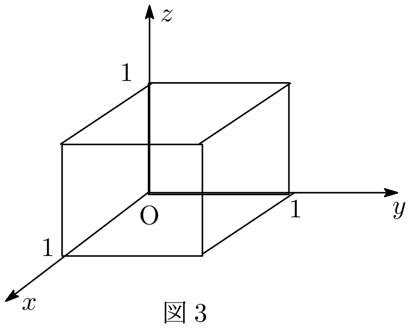


図 3

(金沢大 2022)　(m20222213)

0.27 (1) 位置ベクトル $\overrightarrow{r}=(x,y,z)$ とし，スカラー関数 $f(x,y,z)=\dfrac{1}{|\overrightarrow{r}|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配 grad f を，$\overrightarrow{r}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x,y,z)=(x^2y,xy^2,2z)$ の発散 div $\overrightarrow{A}$ を求めよ．

(3) スカラー関数 $f(x,y,z)$ について，その勾配の回転 rot grad f は，常に零ベクトルとなることを示せ．

(富山大 2009)　(m20092302)

0.28 $\phi(x,y,z)=e^{2x^2-4y^3+z^2}$, $\overrightarrow{A}(x,y,z)=2xyz^3\overrightarrow{i}+x^2z^3\overrightarrow{j}+3x^2yz^2\overrightarrow{k}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) rot $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{0}$ を示せ．

(2) 点 $(1,1,-1)$ において，$\phi\overrightarrow{A}$ の発散の値を求めよ．

(3) 点 $(1,1,-1)$ における ϕ の点 $(-3,5,6)$ に向かう方向の方向微分係数を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}dS$ の値を求めよ．ただし，S は円柱面 : $x^2+y^2=1$ の $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $0\leqq z\leqq 1$ を満たす部分とし，$\overrightarrow{n}$ は S の単位法線ベクトルとする．

(富山大 2014)　(m20142303)

0.29 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r$ $(r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ．

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ．

(富山大 2015)　(m20152307)

0.30 スカラー関数 $f(x,y,z)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について， 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の x，y，z 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x，y，z 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla \cdot \nabla f$ を求めよ.

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla \times \nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ.

(4) 点 $Q(1,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ.

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.31　ベクトル解析に関して以下の問いに答えよ.

(1) $f = e^x \sin y$ に対する勾配（grad f）を求めよ.

(2) ベクトル $\mathbf{v} = 3xz\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ の発散（div $\mathbf{v}$）を求めよ.
(ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ はそれぞれ x-, y-, z- 方向の単位方向成分を表すものとする.）

(岐阜大 2001)　　(m20012613)

0.32　$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ.

(1) 微分方程式

$$(E_1)\quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 微分方程式

$$(E_2)\quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ.

(3) e を自然対数の底として，α, β を実数とする．微分方程式

$$(E_3)\quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ.

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4)\quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ.

(岐阜大 2022)　　(m20222602)

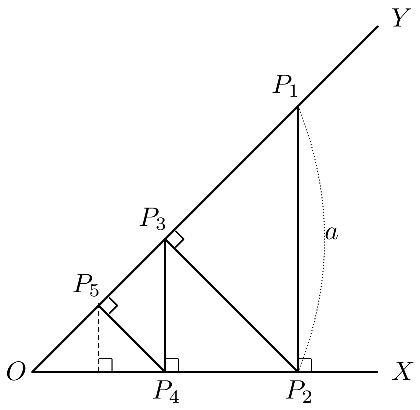
0.33　次の各問いに答えよ.

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ.
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$
(b) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, $\sqrt{4} - \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY = \pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ.

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ.

(b) 垂線（線分）の和を求めよ.



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.34 xyz 空間で円柱 $x^2+y^2=4$，xy 平面，放物面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032904)

0.35 ３次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする．ここで，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x,y,z 軸方向の単位ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ は，div $\boldsymbol{r}$ とも書く．

(2) $\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla\times\ \boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla\times\ \boldsymbol{v}$ は，rot $\boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007)　　(m20073209)

0.36 以下の級数の収束，発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143206)

0.37 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.38 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008) (m20083510)

0.39 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b は実数とする．

(1) A の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ．

(2) A の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 A^{-1} が存在するときの連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(4) A を対角化する行列 P を一つ示し，A を対角化せよ．

(5) A^n を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき A^n のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための a, b の範囲を示せ．

(大阪大 2020) (m20203501)

0.40 以下の問に答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ．

(2) m 桁の自然数のうちで，0 の文字が入らないものの個数を答えよ．例えば $m = 3$ のときなら，$111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で，9^3 である．

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項，例えば，$\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき，$\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ．

(神戸大 2012) (m20123806)

0.41 $(-1, 1)$ で定義された C^{∞}-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく．

(1) a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.42 (1) 不等式 $0 \leqq\ t - \log(1+t) \leqq \dfrac{t^2}{2} \quad (t \geqq\ 0)$ が成り立つことを示せ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

は $K=1$ のときに発散し，$k=2$ のとき収束することを示せ．

(3) 全ての $x>0$ に対して，級数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ．

(4) 全ての $x \geqq\ 0$ に対して，級数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ．

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.43 関数 $f(x)$ を $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) $a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ を $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad$ により定める．$a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分 $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^0 f(x)dx \quad$ が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.44 以下の問いに答えよ．

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$ を求めよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ．

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.45　非負整数 n に対し,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める．ただし，$0! = 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　x を実数とする．級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し，$4|x| > 1$ のとき発散することを示せ.

(2)　$4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

と定める．このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ．ここで，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3)　$4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4)　級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021)　　(m20214105)

0.46　無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ の収束発散を調べ，収束する場合はその値を求めよ.

(広島市立大 2012)　　(m20124201)

0.47　一般項が $a_n \geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して, 次を示せ.

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する.

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004）　　(m20044401)

0.48　自然数 n に対して　$H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$　とおく．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{H_n\}$ は発散することを示せ.　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$ であることを示せ.

（高知大 2001）　　(m20014502)

0.49　(1)　$n = 0, 1, 2$ に対して，次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ．

$$\int_1^\infty \frac{x^n}{x^2+1}dx$$

(九州大 2007)　　(m20074711)

0.50 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$， $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$， $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.51 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ．

(1) 次の不定積分をを求めよ．

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104710)

0.52 次の各問いに答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.53 a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.54 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 次の広義積分は収束することを示せ．

$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

(2) $D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(3) $D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(九州大 2021)　　(m20214710)

0.55 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.56 以下の問に答えよ.

(1) (x,y,z) 空間内の 3 点を $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ をこれらの座標で示せ.

(2) $f(r) = \dfrac{1}{r}$,　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とするとき, $f(r)$ の傾き $\nabla f(r)$ およびその発散 $\nabla\cdot\Big[\nabla f(r)\Big] = \nabla^2 f(r)$ を求めよ. 但し, $r \neq 0$ とする.

(長崎大 2005)　　(m20055014)

0.57 次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005)　　(m20055412)

0.58 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか ？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ.

(島根大 2007)　　(m20075805)