[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：平面

0.1 以下の問いに答えよ．ただし，ベクトルの内積を "·"，外積を "×" と表すものとする．

(1) 以下の文章では，平面の方程式を導いている．空欄（1）から（3）に適切な式を入れよ．
原点 O より平面 S に垂直におろした点を G（以下，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と呼ぶ），平面 S 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ は垂直であることから，両ベクトル間には（　1　）の関係がある．ここで，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,g_3)$ とすると，平面 S の方程式は x,y,z,g_1,g_2,g_3 を用いて，（　2　）で表される．また，平面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ と，原点 O から平面 S までの距離 p を用いると前式は，（　3　）で表される．

(2) 単位法線ベクトルが $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ で $(1,1,1)$ を通る平面を求めよ．

(3) 同一平面上に異なる 3 点 A,B,C が与えられたとき，外積を用いてこの 3 点より平面の方程式を求める方法を述べよ．

(4) 3 点 $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(0,3,1)$ によって与えられる平面の方程式を求めよ．

(北海道大 2004)　　(m20040102)

0.2 以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする．

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$（r,θ は実数）で表せ．
(a) $1+j$　　(b) j

(2) 次の複素数を $x+jy$（x,y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ．
(a) j の平方根　　(b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R=\cos\theta+j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ．

(北海道大 2004)　　(m20040104)

0.3 (1) 次の関係式が成り立つとき，w と z との関係を求めよ. ただし，w と z は複素数である.

$$e^z=e^w$$

(2) e^z は複素数平面の全域で正則であることを示せ.

(3) $\dfrac{de^z}{dz}=e^z$ となることを示せ.

(北海道大 2005)　　(m20050103)

0.4 次の設問に答えよ．ここで，z は複素数である．

(1) $e^z\neq 0$ を証明せよ．

(2) $e^z=e^{2z}$ を満足する z を求めよ．また z の値を複素平面上に図示せよ．

(3) e^{nz} は正則であることを示せ．n は整数とする．

(4) $\dfrac{d}{dz}e^{nz}=ne^{nz}$ を証明せよ．

(北海道大 2007)　　(m20070103)

0.5 原点を通り x 軸上に中心を有する円 C は無数にあるが，一般にその方程式は，$x^2+y^2+ax=0$（a は非ゼロの任意の実定数）と表せる．曲線 D は，y 軸およびすべての円 C に，交点において直交する．このような曲線 D を，以下の手順で求めよ．

(1) 円 C の点 (x,y) $(y\neq 0)$ における円 C の接線の勾配 m を求めよ．

(2) 曲線 D の方程式を $y = y(x)$ $(x \pm y \neq 0)$ とし，点 (x, y) における曲線 D の接線の勾配 $\dfrac{dy}{dx}$ と，(1) で求めた勾配 m には，直交関係 $m\dfrac{dy}{dx} = -1$ が成り立つ．これを用いて，曲線 D の方程式が満たすべき微分方程式

$$(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

を導出せよ．

(3) (2) の微分方程式を解き，題意を満たす曲線群 D が $x - y$ 平面上でどのような図形を描くか答えよ．

(北海道大 2009)　　(m20090104)

0.6 以下の設問に答えよ．ここで，$z(= x + iy)$ は複素数であり，$i = \sqrt{-1}$，x，y は実数である．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $z^3 = -8i$ を満たす z を全て求め，複素平面上に図示せよ．

(2) 次の関数が正則か否かを調べよ．

(a) $f(z) = z\overline{z} + 1$　　(ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数 $\overline{z} = x - iy$)

(b) $f(z) = \dfrac{z^2 + 3}{z}$　　(ただし，$z = 0$ を除く)

(3) 複素関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において，$u(x, y) = x^2 + y - y^2$ であるとき，$u(x, y)$ が調和関数であることを示し，$u(x, y)$ を実部に持つ正則関数 $f(z)$ を求めよ．

(北海道大 2014)　　(m20140104)

0.7 一次関数 $f = \dfrac{z - i}{z + 2}$ による，z 平面上の単位円 $|z| = 1$ の f 平面への写像を求めよ．
ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(北海道大 2016)　　(m20160104)

0.8 二つの複素数 $z_1 = a + bi$ と $z_2 = c + di$　(i は虚数単位，a, b, c, d は実数，$z_1 \neq 0$，$z_2 \neq 0$）に関して以下の設問に答えなさい．

(1) z_1 に z_2 を乗じたところ，その積 z_1z_2 は，絶対値と偏角がともに z_1 の 2 倍である複素数となった．z_2 を a と b を用いて表しなさい．ただし，偏角の範囲はすべての実数とする．

(2) z_1 と z_2 が設問 (1) の条件を満たし，かつ，積 z_1z_2 が純虚数となるとき，z_1 の取り得る値を複素数平面上に図示しなさい．

(北海道大 2017)　　(m20170111)

0.9 次の各設問に答えなさい．

設問 1. 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 10\sin x$ の一般解を求めなさい．

設問 2. 微分方程式 $2xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 - y^2 = 0$ の一般解を求め，xy 平面上でどのような図形となるかを説明しなさい．

(北海道大 2018)　　(m20180101)

0.10 複素数 z について，以下の設問に答えなさい．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) 方程式 $z^3 = 27$ を解きなさい．

(2) z が複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，次の 1 次変換により得られる w の軌跡を描きなさい．　$w = \dfrac{1 + iz}{1 + z}$

(北海道大 2020)　　(m20200106)

0.11 3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい.

平面 1 ： $x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2 ： $x+y=0$

(1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい.

(2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること.

(3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210101)

0.12 平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r>0$ とする．$z=f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.13 ベクトル $\overrightarrow{N}=(2,2,-1)$ に直交し，点 $(-1,2,3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(北見工業大 2011)　　(m20110207)

0.14 平面 $x+y+z=0$ および平面 $x+2y+3z=0$ と直交し,原点を通る平面の方程式を求めよ.

(北見工業大 2012)　　(m20120207)

0.15 ベクトル $\overrightarrow{N}=(1,2,-1)$ に直交し，点 $(0,1,2)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(北見工業大 2017)　　(m20170207)

0.16 平面の部分集合 D を次で定める.

$$D=\left\{(x, y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190204)

0.17 関数 $y=e^{-x^2}$ について次の問 (1), (2) に答えよ.

(1) y' および y'' を計算せよ.

(2) y', y'' の符号を調べ，増減，凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け.
（変曲点があれば変曲点における $y=e^{-x^2}$ の接線も同じ xy 平面上に描くこと.）

(北見工業大 2019)　　(m20190210)

0.18 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D=\{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+y \leqq 2\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy\,dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2019)　　(m20190211)

0.19 平面の部分集合 D を次で定める:

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geqq 0,\ y \leqq 1,\ y \geqq x\right\}$$

(1) D を図示せよ.

(2) 積分 $J = \iint_D xy^2 dxdy$ を計算せよ.

(北見工業大 2022)　　(m20220205)

0.20 x-y 平面上の半楕円

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad (x \geqq\ 0) \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

と x, y の関数

$$z = 2 + xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

を考える．ただし，半楕円上の点 (x, y) に対し，原点と点 $\left(\frac{x}{2}\ ,\ y\right)$ を結ぶ線分が x 軸となす角を θ とする．次の問に答えよ．

(1) θ を媒介変数とする半楕円 (i) の媒介変数方程式を求めよ．θ のとる範囲も明示せよ．

(2) 条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を求めるために，関数 (ii) を θ のみの関数として表せ．

(3) 前問で得られた θ の関数 $z = f(\theta)$ が極値をとる $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(4) $z = f(\theta)$ の極値を求めよ．

(5) $f(0)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(6) $z = f(\theta)$ のおよそのグラフを描け．

(7) 媒介変数 θ を用いずに，条件 (i) のもとでの関数 (ii) の極値を，ラグランジュの乗数法で求めたい．極値をとる (x, y) の値を求めるための条件式を書け．

(8) 極値をとる (x, y) の値を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980308)

0.21 xyz 空間に 2 つの平面

$$\alpha\ :\ x + 3y - 2z + 1 = 0$$

$$\beta\ :\ 2x - y + 3z - 2 = 0$$

があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) 2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(2) (1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい.

(3) 点 $(1, 2, -1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい.

(岩手大 2008)　　(m20080301)

0.22 xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする .

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい.

(3) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(4) (3) で求めた平面が, 球 $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=r^2 \quad (r>0)$ に接しているとき, r の値を求めなさい.

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.23 xyz 空間の点 $P(0,0,t)$ を通り, ベクトル $\vec{a}=(2,2,1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z=11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t>0$ とする.

(1) 平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2) 球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4) 球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100301)

0.24 重積分

$$I=\iint_D y\,dxdy$$

について次の問いに答えなさい. ただし, xy 平面上の領域 D は

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

の共通部分である.

(1) 領域 D を図示しなさい.

(2) 重積分 I を求めなさい.

(3) $x,\ y$ を極座標に変換して重積分 I を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100304)

0.25 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r=1+\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100305)

0.26 xyz 空間に 2 点 $A(5,3,4)$, $B(1,-1,2)$ を直径の両端とする球 S と点 $C(-1,-3,1)$ がある. 次の問いに答えよ.

(1) 球 S の方程式を求めなさい.

(2) 2 点 A, B を通る直線に垂直で, 球 S の中心を通る平面の方程式を求めなさい.

(3) 2 点 A, B を通る直線に平行で, 点 C を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S が交わる点の座標を求めなさい.

(岩手大 2011)　　(m20110301)

0.27 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ で表される xyz 空間内の線形変換を f とする．次の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 f によって直線 ℓ : $x-1=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(2) 線形変換 f によって平面 α : $x+y+z=1$ がどのような図形に移されるか答えなさい.

(3) 逆変換 f^{-1} を表す行列を求めなさい.

(4) 線形変換 f によって平面 β : $x+y=1$ に移されるもとの図形を求めなさい

(岩手大 2011)　　(m20110302)

0.28 xyz 空間内に 4 点 $A(-3,-3,1)$, $B(2,-8,1)$, $C(-2,-3,-2)$, $D(2,1,4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 4 点 A, B, C, D を通る球 S の方程式を求めなさい.

(2) 球 S の中心を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい.

(3) 点 C を通り，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ に垂直な平面 α の方程式を求めなさい．また，平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=z-2$$

との交点の座標を求めなさい.

(4) 点 D から平面 α に直線を引き，α との交点を E とするとき，線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい．このとき，線分 DE の長さを求めなさい.

(岩手大 2012)　　(m20120301)

0.29 方程式 $x^2+y^2+z^2-2x-8y-4z-4=0$ で表される球 S について，次の問いに答えなさい.

(1) 球 S の中心座標と半径を求めなさい.

(2) 球 S が xy 平面と交わってできる図形は円である．この円の中心座標 P と半径を求めなさい.

(3) 球 S が yz 平面と交わってできる円の中心座標を Q とするとき，2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(4) 直線 ℓ と球 S との交点座標を求めなさい.

(岩手大 2013)　　(m20130301)

0.30 xyz 空間内に 2 点 $A(1,0,0)$, $B(2,1,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) 点 A を通り，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めなさい.

(2) 点 B を通り，直線 ℓ に垂直な平面が y 軸と交わる点の座標を求めなさい.

(3) 点 B を中心とし，原点 O を通る球 S の方程式を求めなさい.

(4) 球 S と直線 ℓ が交わる 2 つの点の座標を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140301)

0.31 次の立体について，以下の問いに答えなさい.

曲面 $x^2+y^2=z^2$, 平面 $z=0$, 平面 $z=1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい.

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる． $\boxed{\text{（ア）}}$ ， $\boxed{\text{（イ）}}$ にあてはまる式を答えなさい．

$$V = \iint_D \left(1 - \boxed{\text{（ア）}}\right) dxdy \qquad D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \boxed{\text{（イ）}}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい．

（岩手大 2014）　　(m20140303)

0.32 xyz 空間内に 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,2)$ があるとき，次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求めなさい．その結果を用いて，3 点 A, B, C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい．

(2) 平面 α の方程式を求めなさい．

(3) 原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい．

(4) 接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい．

（岩手大 2015）　　(m20150301)

0.33 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \ \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z = 0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V = \pi \int_{-b}^{b} \boxed{\text{（オ）}} \, dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2 \iint_{D_1} \boxed{\text{（キ）}} \, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 (r, θ) を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

（岩手大 2015）　　(m20150303)

0.34 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0,1,-1)$, $B(2,0,3)$, $C(1,1,0)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(3) 原点を通り，(2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

(岩手大 2017)　　(m20170301)

0.35 点 O を原点とする xyz 座標空間において，中心が点 $(2,\ -1,\ -2)$ で，点 O を通る球面を S とする. 次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S と xy 平面の交わりは円になる. この円の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 S と平面 $z = k$ の交わりが半径 1 の円になる. k の値を求めなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180301)

0.36 3 次元直交座標系 (x, y, z) において，中心が点 $(-1, 2, 4)$ で半径 5 の球面を S とする.
次の問いに答えなさい.

(1) 球面 S の方程式を求めなさい.

(2) 球面 S の中心の x 座標が毎秒 2 で増加するとき，その球面の方程式を求めなさい. ただし，時刻 $t = 0$[秒] のときの中心は点 $(-1, 2, 4)$ とする.

(3) 上の (2) で求めた球面 S と平面 $x = 4$ との交わりが半径 4 の円になるときの時刻 t[秒] を求めなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190301)

0.37 3 次元直交座標系 (x, y, z) において $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2kz + 14 = 0$ が球を表すとき，次の問いに答えなさい. ただし，k は実数とする.

(1) k の範囲を求めなさい.

(2) この球は，xy 平面と交わらないことを示しなさい.

(3) この球が，yz 平面，zx 平面 と交わり，かつ，yz 平面との切口の面積が，zx 平面との切口の面積の 2 倍となるときの k の値を求めなさい.

(岩手大 2020)　　(m20200301)

0.38 (1) 点 $A(-3, 2, 6)$，点 $B(5, 2, 0)$ を直径の両端とする球面 C の方程式を求めなさい.

(2) 球面 C と yz 平面の交わりは円になる. この円の中心座標と半径を求めなさい.

(3) 球面 C と x 軸の交点は 2 点存在する. この交点間の距離を求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210301)

0.39 原点 O の xyz 空間に点 $A(2, 1, 3)$，点 $B(3, -2, 1)$ が与えられている. このとき，次の問いに答えなさい.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ を求めなさい. ただし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面 α の方程式を求めなさい.

(4) 点 $C(-1, -2, 3)$，点 $D(5, 6, 5)$ の両端を直径とする球 S の方程式を求めなさい.

(5) 平面 α が球 S を 2 つの半球に分割することを示しなさい.

(岩手大 2022)　　(m20220301)

0.40 次の問いに答えなさい．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (ただし，$r \geqq 0$, $0 \leqq \theta < 2\pi$) によって，xy 平面上の領域 D が $r\theta$ 平面上の領域 D' に対応しているとする．このとき，関数 f の重積分について，次の式が成り立つことを示しなさい．
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta\,,\, r\sin\theta)rdrd\theta$$

(2) xy 平面上の領域 D が $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9$ で与えられるとき，次の重積分の値を求めなさい．
$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy$$

(秋田大 2003)　　(m20030402)

0.41 平面 $2x + y + 2z = 0$ と球面 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい．ただし，空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には，その証明もしなさい．

(秋田大 2003)　　(m20030403)

0.42 (1) $x = u - w,\ y = u + w$ とおく．行列 $J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$ と，その行列式を求めよ．

(2) D は平面内の領域で，次の 4 直線で囲まれているとする．
$$y = x\ ,\quad y = -x\ .\quad y = x + 2\ ,\quad y = -x + 4$$
このとき，積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ．

(秋田大 2008)　　(m20080407)

0.43 ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1),\ \boldsymbol{b} = (2, 1, -1)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交することを示しなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を含み原点を通る平面上にある点 (x, y, z) を，媒介変数 s と t を用いた式で表しなさい．

(3) ベクトル $\boldsymbol{p} = (3, 1, 2)$ が (2) の平面に投ずる正射影を $\boldsymbol{q} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ と書くとき，係数 α と β を求めなさい．

(秋田大 2012)　　(m20120402)

0.44 関数 $f(x, y) = \log(x^2 + 2y^2)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 点 $(2, 1)$ における勾配ベクトルを求めなさい．

(2) 点 $(2, 1)$ におけるグラフの接平面の，点 $(3, 2)$ における z 座標と，接点の z 座標との差を求めなさい．

(秋田大 2012)　　(m20120404)

0.45 平面上に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があるとする．ただし，これらのベクトルの大きさ（長さ）はいずれも 0 ではなく，互いに平行ではないとする．また，t を実数とする．以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}|$ が最小になるときの t の値を，内積を用いて表しなさい．

(2) (1) で求めた t の値が 0 であるとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の図形的関係を答えなさい．

(秋田大 2017)　　(m20170401)

0.46 平面上の原点 O と点 $A,\ B,\ C$ の 4 点を考える．この 4 点は互いに異なり，どの 3 点も一直線上にないとする，$0 \leqq t \leqq 1$ なる t に対し，$OA,\ OB,\ CB,\ CA$ をそれぞれ $t : 1-t$ に内分する点を $P,\ Q,\ R,\ S$ とする．また，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b},\ \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PS},\ \overrightarrow{QR},\ \overrightarrow{SR}$ を $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ t$ を用いて表せ．

(2) 四角形 $PQRS$ の対角線の交点を X とする．t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化するとき，X が描く図形はどのようなものか説明せよ．

(秋田大 2019)　　(m20190402)

0.47 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ．

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ．

(秋田大 2019)　　(m20190404)

0.48 平面上の 3 点 $P(2t^2 - t + 3,\ t^2 + 2t),\ Q(2t^2 + 3,\ t^2),\ R(3t^2 + t + 7,\ -t^2 - 2t - 8)$ があり，t は 0 でない実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $P,\ Q,\ R$ は 1 直線上にあることを示せ．

(2) $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{PR}$ とおくとき，k の範囲を求めよ．

(3) $P,\ Q,\ R,\ A$ の 4 点が，ある順序に等間隔で並んでいるとする．ただし，A は P と R 間にあり，Q と異なる点である．このとき，t の値を求めよ．

(秋田大 2020)　　(m20200402)

0.49 xyz 座標空間に 3 点 $A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ C(0,0,2)$ があるとする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) ２つのベクトル $\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}$ と直交するベクトルを求めなさい．

(2) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(3) (2) の平面に関して，点 $D(0,0,1)$ と対称な点を E とする．点 E の座標を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220402)

0.50 xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x(a-x),\ 0 \leq z \leq by^2$$

ただし，a, b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1) G を平面 $x = \dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2) G の体積 V を求めよ．

(3) a と b に関係 $b=e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940501)

0.51 xy 平面上に 2 点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ がある．原点 O と点 P,Q は同一直線上にはなく，また $d\neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P,R を通る直線と x 軸との交点 $S(e,0)$ の x 座標 e を a,b,c,d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0,d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940504)

0.52 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta=a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta\quad(a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ が，2 平面 $z=ax,\ z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.53 行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y=ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y=ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.54 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える．　球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き，　その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする．　この時, 各ベクトルの成分は

$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$,　　$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$,　　$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$,

$\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$　と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　　(m20040503)

0.55 x, y を実数とし，$0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ．

(3) $f(x, y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$，$y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.56 x と y を実数とし，関数 $f(x, y)$ を　$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$　と定義する．
不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x, y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．

(2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z = f(x, y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.57 t を実数とし，2 つの関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t), y(t))$ を考える．$x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする．ただし，α は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(2) $\alpha \neq 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(3) t $(t \geqq 0)$ が変化するとき，点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ の場合について描け．

(東北大 2008)　　(m20080502)

0.58 行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を α, β, γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．２次形式 $3x^2+2xy+3y^2+10z^2$ を標準形 $\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x+y+z=1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008)　　(m20080503)

0.59 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う３辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) ３辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，２点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.60 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t=\dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m=0,1,2,3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.61 xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ．

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ．

(3) 領域 R の面積を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110501)

0.62 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ とする．このとき．$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ．

(2) $(n+2)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}\cos\theta+na_n=0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて a_n $(n \geqq 3)$ を表せ, ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) $a_1 = 1,\ a_2 = i$ (ただし $i = \sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 OA_nA_{n+1} ($n \geqq 3$) の面積を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.63 実変数 x, y の関数 $f(x, y) = x^3 - y^2$ について以下の問に答えよ．

(1) (x, y) が実平面全体をうごくとき，$f(x, y)$ の臨界点 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ となる点}\right)$ をすべて求めよ．

(2) 各臨界点について，それが f の極値を与えるか調べよ．

(3) 点 (x, y) が円 $x^2 + y^2 = 1$ の上をうごくとき，関数 $f(x, y)$ の最大，最小とそのときの x, y の値を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120507)

0.64 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.65 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．
ただし，a は正の実数とする．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ．

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ．

(3) この曲線が囲む面積を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.66 xyz 空間の曲面 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a, b, c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1, 2, 3)$ が曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点となるとき，a, b, c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $P(1, 2, 3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a, b, c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.67 (x, y) 座標平面において，4 本の直線

$$y = x, \quad y = x - 1, \quad y = -x + 1, \quad y = -x + 3$$

で囲まれた閉領域 D を考える．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

を，変数変換 $u=x+y,\ v=x-y$ を用いて求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150510)

0.68　xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S}:(x+2)^2+(y+1)^2=4z$ および平面 $\boldsymbol{P}:z=a(x+y+2)$ について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1)　平面 $y=-1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め，図示せよ．

(2)　曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える．$a=1$ のとき，$\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ．

(3)　曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ．

(4)　$a=1$ のとき，曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170502)

0.69　xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=\sin t \\ z(t)=-a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ と $t=\pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

(2)　曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3)　曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4)　曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.70　xy 平面上の点 P の座標 (x,y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=(1+\cos t)\cos t \\ y(t)=(1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2)　曲線 C の長さを求めよ．

(3)　曲線 C と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.71　xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2,0,a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある．以下の問に答えよ．ただし，a，r はそれぞれ実数であり，$r>0$ とする．

(1)　S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ．

(2)　S_1 と S_2 が交線をもつとき，交線を含む平面の方程式を求めよ．

(3) $a=0,\ r=\sqrt{3}$ のとき，S_1 と S_2 の交線を C とする．交線 C の方程式を求めよ．

(4) 点 $Q(0,0,\sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする．点 R が交線 C 上を動くとき，点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019)　　(m20190502)

0.72 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $A(2,1,k),\ B(0,2,0),\ C(2,0,0)$ がある．ただし，k は正の実数である．線分 $BC,\ OC$ の中点をそれぞれ $D,\ E$ とする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ．

(2) $\angle DAE=30^\circ$ となるときの　k を求めよ．

(3) $k=1$ のとき，原点から点 $A,\ B,\ C$ を通る平面におろした垂線を ℓ_1 とし，平面との交点を H とする．

(a) $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}$ と表すとき，実数 $s,\ t$ を求めよ．

(b) 点 $A,\ D$ を通る直線を ℓ_2 とするとき，直線 ℓ_1 と直線 ℓ_2 の最短距離を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200501)

0.73 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．また，点 A，点 B を直径の両端とする球面を S とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB 上に点 P があり，点 A と点 P の間の距離を s とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ．

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，球面 S の方程式を示せ．

(3) $\boldsymbol{a}=(0,0,1),\ \boldsymbol{b}=(0,2,1)$ のとき，点 $D(0,0,d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする．ただし，d は $d>1$ を満たす実数である．

(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする．点 T の座標を $(p,q,0)$ と表すとき，p および q が満たす方程式を求めよ．

(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し，その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210504)

0.74 極座標変換を用いて次に示す重積分を計算する．以下の問に答えよ．

$$I=\iint_D \frac{x-y}{(x^2+y^2)^2}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 2,\ \ 0\leqq y\leqq \sqrt{3}x\right\}$$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 次に示す極座標変換のヤコビ行列とその行列式（ヤコビアン）を求めよ．

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

(3) (2) の極座標変換によって，xy 平面内の領域 D は $r\theta$ 平面内の領域 $\overline{D}$ に対応づけられる．下図に示す点 $O(0,0)$ を原点とする r と θ の直交座標を用いて，領域 $\overline{D}$ を図示せよ．

(4) 重積分 I を計算せよ．

(東北大 2022)　　(m20220505)

0.75 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3z)\,\mathbf{i} + (x^2yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，**i, j, k** は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.76 (1) $y^4 = x^4(1-x^2)$ は x-y 平面で閉じた曲線になる．この曲線のおおよその形を描け．

(2) この曲線に囲まれた領域の面積を計算するには積分　$4\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$　が必要である．
関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 上の積分を実行せよ．

(お茶の水女子大 1999)　　(m19990604)

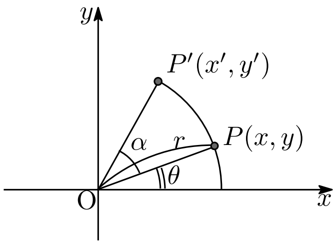
0.77 図の様に，x,y 平面上の座標が (x,y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x',y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は
$x = r\cos\theta,\qquad y = r\sin\theta$
と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．
$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha,\quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$
$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha,\quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x+iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999)　　(m19990610)

0.78　実数を成分とする $2\times\ 2$ 行列 A に対し，その転置行列 ${}^tA$ を右から掛けると，

$$A\cdot{}^tA$$

が単位行列になるという.

(1)　A はどんな行列か.

(2)　平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はどんな点になるか，位置関係を図形的に説明せよ.

(お茶の水女子大 2000)　　(m20000612)

0.79　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ を考える.

(1)　空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x-3y-2z=0$ をパラメーターを使って表せ.

(2)　(1) の平面はこの線型写像で何に写されるか.

(3)　この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x+5y=0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ.

(お茶の水女子大 2000)　　(m20000615)

0.80　平面の単位正方形 $\{(x,y)|\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ を，４点 $(0,0),(1,2),(0,4),(-1,2)$ を頂点とする菱形に写すような線型写像（ 2×2 型行列）を決定せよ.

(お茶の水女子大 2001)　　(m20010608)

0.81　平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100603)

0.82　二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x,y) はこの新しい座標軸では (x',y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A\equiv\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\qquad ①$$

以下の問いに答えよ.

(1)　行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2)　行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\qquad ②$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100606)

0.83 任意の実 $2\times\ 2$ 行列を無限回作用させることにより, 平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ. 以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし, または別の手順で解答してもよい.

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める.

(2) 行列 T の n 乗を計算する.

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合, 実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える. ただし, $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする.

(4) $2\times\ 2$ 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし. この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する. 行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ, 任意の $2\times\ 2$ 行列が上三角行列に変換されることを示す.　さらに. $T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す.

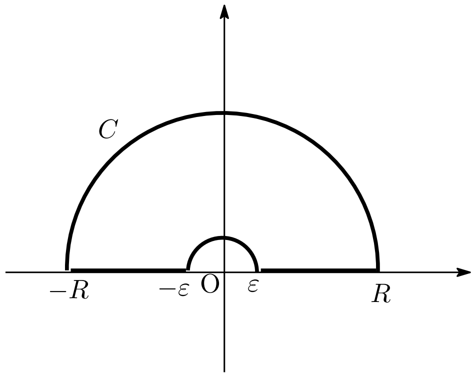
(5) 行列 B の要素がすべて実数で, 固有値の絶対値が 1 より小さいとする.　このとき行列 B を無限回作用すると, 実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.84

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

を下図のような複素平面上の経路 C で計算することにより, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を求めよ.



(お茶の水女子大 2019)　　(m20190610)

0.85　x-y 平面上を，ある一つの点が移動している．

時刻 $t=i$ (i は整数) におけるこの点の位置を $\mathbf{p}_i=\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ と表すとき，

$\mathbf{p}_0=\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_1=\begin{pmatrix} 16 \\ 13 \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix} 50 \\ 35 \end{pmatrix}$ であった．

また，$\mathbf{p}_{i+1}=A\mathbf{p}_i$ (A は行列) に従っているものとする．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) A^n を求め，時刻 $t=n$ (n は整数) におけるこの点の位置 $\mathbf{p}_n$ を求めよ．

(東京大 1998)　　(m19980702)

0.86　曲線 $y=x^2$ と 直線 $y=a$ $(a>0)$ で囲まれた図形 (図 1 灰色部分) を考える．この図形に一定の厚みを持たせて平面上に立てた場合（図２）に，点 O を接触点として安定に立っていられるかどうか調べたい．

(1) この図形の重心を求めよ．この場合厚みが一定であるので，重心は図形に属する各点の x,y 座標の平均となる．

(2) 図形がわずかに傾き，平面との接触点が点 O から微小量 u だけずれた時 (図３)，その新しい接触点 P における法線と y 軸との交点 Q を求めよ．

(3) 点 O で安定に立っているための，定数 a についての条件を求めよ．

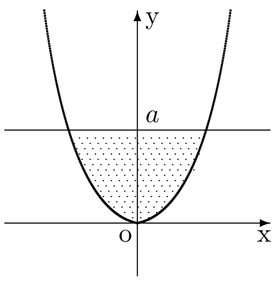


図 1

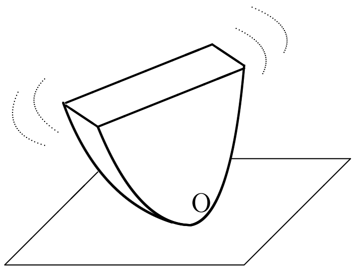


図 2

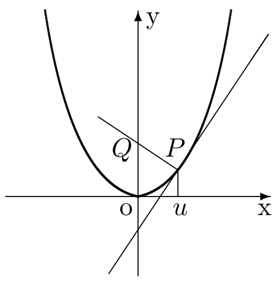


図 3

(東京大 1999)　　(m19990701)

0.87　半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001) (m20010702)

0.88 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される.

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ.

(2) 次の複素関数を特異点 $z = 0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ. また, 特異点の種類を答えよ.

$$f_1(z) = z \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ.

$$I = \oint_C f_3(z) dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする.

(東京大 2001) (m20010703)

0.89 (1) 座標平面上で, 直線 $y = x$ に関する対称変換（線形変換）を表す行列 A を求めよ.

(2) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

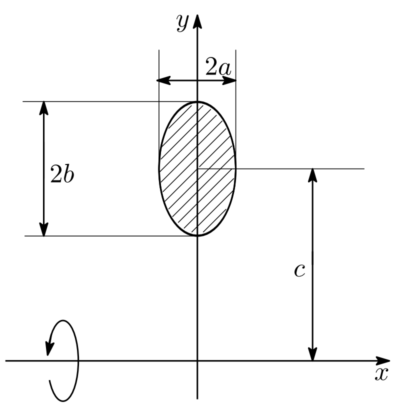
(3) (2) で求めた固有値, 固有ベクトルの幾何的意味を考え, そこから行列 A が直線 $y = x$ に関する対称変換を与えることを説明せよ.

(東京大 2002) (m20020701)

0.90 直交座標空間 (x, y, z) において，$x^2 + y^2 = a^2 \ (a > 0)$ で表される円筒の内部で，xy 平面の上方 $(z \geq 0)$，かつ $z = x$ で与えられる平面の下方 $(z \leq x)$ にある部分の体積を求めよ.

(東京大 2003) (m20030701)

0.91 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を $c \ (c > a,\ c > b)$ とするとき，以下の問いに答えよ.



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ.

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ.

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ.

(東京大 2004) (m20040701)

0.92 空間において, xz 平面上の単位ベクトル $(u, 0, w)$ を考える.

(1) y 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0, 0, 1)$ をベクトル $(u, 0, w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u, 0, w)$ を軸とする角度 θ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

0.93 複素数平面上で次の式を満たす点 $z = x + yi$ (x, y は実数) の軌跡の名称と概略図を示せ．また，この軌跡の特徴を説明せよ．軌跡の特徴については，特記しない限り，例えば軌跡が円の場合には中心点と半径について説明する程度でよい．

(1) $\left|z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 2$　　(2) $\left|z - \sqrt{2}i\right| = \left|z - \sqrt{2}\right|$

(3) $\left|z - \sqrt{2}i\right| + \left|z - \sqrt{2}\right| = 4$　　(4) $\left|z - \sqrt{2}i\right| - \left|z - \sqrt{2}\right| = 1$

この問 (4) の軌跡の特徴の説明については，軌跡の名称を明記するだけでよい．

(東京大 2006)　　(m20060704)

0.94 1 の n 乗根は，方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数 })$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる．ここで，各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は,

$0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする． また，複素数平面において, $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$，原点を O とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ．また，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ．

(2) 複素数平面上において，1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形, すなわち OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1, G_2, G_3 とする．三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ．

(3) 前問 (2) と同様にして，1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える．n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2\cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ．

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.95 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ $(a > 0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ．

(2) (1) の表面上の点 $(x.y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0 > 0$ とする．

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ 2 点 P_1, P_2 は，それぞれ $\left(\dfrac{a}{2},\ -a\right)$，$\left(-\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x, y) 成分を持つとする．点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ．

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.96 複素数 $z(t)=e^{i\omega t}$ を考える．ただし，t は 0 以上の実数，i は虚数単位，e は自然対数の底である．

(1) ω が実数であるとき，$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くかを，ω が正の場合，負の場合について図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸との交わる点の位置も明示すること．

(2) ω が複素数 $a+ib$ で表されるとき（a は正の実数，b は 0 でない実数），$z(t)$ は複素平面上で t の関数としてどのような軌跡を描くか図示せよ．$z(t)$ の移動方向を矢印で示し，実軸，虚軸と交わる最初の 4 点（出発点も含める）の値を求め，複素平面上に図示せよ．また，$b/a \to \infty$ で軌跡はどのような曲線になるかを図示せよ．

(3) (2) において，$z_n=z(n)$，ただし n を整数とする．複素平面上における z_{n+1} と z_n の間の距離 $d_n=|z_{n+1}-z_n|$ を a,b,n の関数として求めよ．

(4) (3) で求めた d_n を用いて，$D=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} d_n$ を a,b,N の関数として求めよ．また，a を固定して $b\to\infty$ および $b\to 0$ の極限をとったときの D の値を求めよ．ただし N は自然数とする．

(東京大 2009)　　(m20090701)

0.97 ２つの媒介変数 s,θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta)=(s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0\le s\le 1)\ ,\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta)=x(1,\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

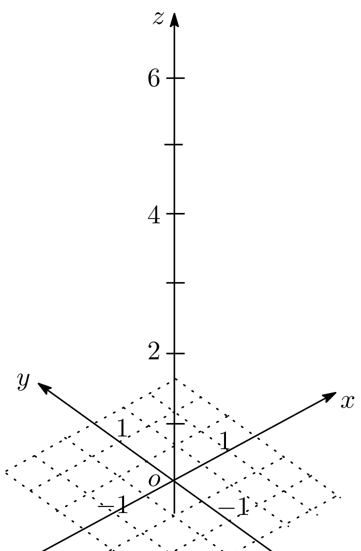
を得る．$\alpha=1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(=y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha=0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha=1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log_e\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+c \qquad (c\text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.98 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.99 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0\,,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.100 関数 $f(x) = \dfrac{x^{m-1}}{1+x^n}$ について

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

の値を求めたい. ただし, $m,\ n$ は自然数で, $m < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, 図 1 に示す $C = C_1 + C_2 + C_3$ の扇形 $\left(\text{半径 } R,\ \text{中心角} \dfrac{2\pi}{n}\right)$ の積分路が与えられている. この平面上の複素数を $z = x + iy$ (i は虚数単位) とするとき, 積分路 C の内部にある $f(z)$ の極を求めよ. ただし, $R > 1$ とする.

(2) C に沿っての複素積分

$$\int_C f(z)\,dz$$

の値を求めよ.

(3) $R \to \infty$ のとき, C_2 に沿っての複素積分

$$\int_{C_2} f(z)\,dz$$

の値を導出過程とともに示せ.

(4) 虚数単位 i を含まない形で

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

の値を求めよ.

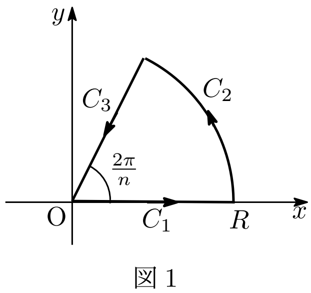


図 1

(東京大 2010)　　(m20100704)

0.101 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1,3,1)$, $B(2,4,3)$, $C(3,-3,-1)$ を通る平面を α とする．

(a) 平面 α の方程式を求めよ．

(b) 点 $P(1,1,1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ．

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ．

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする．

(a) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めよ．

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である．

(東京大 2011)　　(m20110703)

0.102 (1) 実数 α と β に対して，下記の等式を満たす複素数 z が複素平面上でどのような図形になるか示し，図示せよ．ただし，i を虚数単位とする．

$$\left|\frac{z+\alpha-\alpha i}{2z-\beta+\beta i}\right| = 2$$

(2) 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

を考える．複素平面上において (p,q) を中心とする半径 $r(>0)$ の円を C とするとき，C が f により変換された像がどのような図形になるかを示せ．

(3) (1) の等式を満たす複素数 z に対して，複素平面上での z の図形と $f(z)$ の図形が一致するときの α と β を求めよ．

(東京大 2011)　　(m20110704)

0.103 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

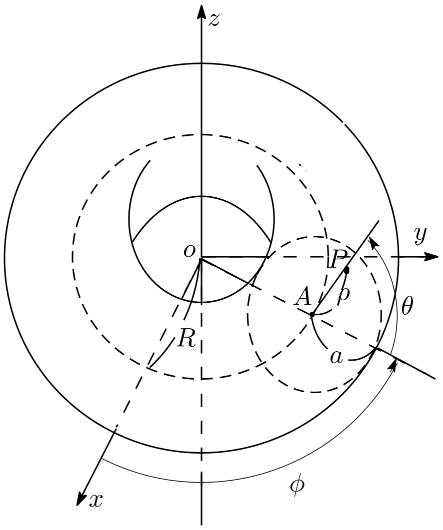
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R>a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho=a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.104 以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．
C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.105 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．

(1) 複素数の範囲で -4 の 4 乗根をすべて求めよ．

(2) 複素関数 $f(z) = z^2$ を複素平面上の点 $1+i$ から点 $2+2i$ にいたる線分に沿って積分した結果を示せ．

(3) 実関数の定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta} \qquad (a > 1)$$

を求めたい．$z = \exp(i\theta)$ とし，I を複素積分の形で表せ．積分路も示すこと．

(4) 留数定理を用いて (3) の I の値を計算せよ．

(5) 複素関数 $f(z) = f(x + iy) = \left(x^2 - y^2\right) + ibxy$ が正則となるように係数 b を定めよ．また，そのときの $f(z)$ の導関数を求めよ．

(東京大 2013) (m20130704)

0.106 複素変数 $z = x + iy$（x, y は実数）から複素変数 $w = X + iY$（X, Y は実数）への写像 $w = f(z)$ を考える．以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z) = z^2$ のとき，z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(2) $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき，z 平面上の単位円周 $|z| = 1$ と単位円の内部 $|z| < 1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

(3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ のとき，z 平面上の領域 $1 \leq |z| \leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(東京大 2014) (m20140704)

0.107 xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$ (ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする． 点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

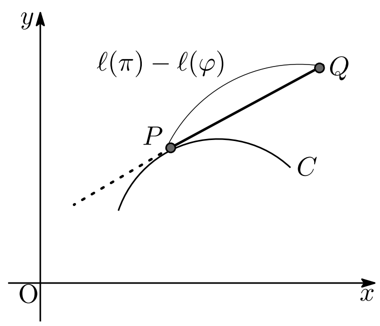


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.108 複素積分を利用して実数積分を求めることを考える．以下の問いに答えよ．

(1) まず，ガウス積分と呼ばれる実数積分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ を考える．α は正の定数であり; x は実数である．y を実数とするとき，$\{I(\alpha)\}^2$ は以下の式で表される．

$$\begin{aligned}\{I(\alpha)\}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dxdy\end{aligned}$$

この式を極座標 (r, θ) 表示に変換せよ．

(2) $I(\alpha) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}$ となることを導出過程とともに示せ.

(3) 図 4.1 に示すように x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面上において半径 R の扇形で C_1，C_2，C_3 からなる経路 C を反時計回りに一周することを考える．i を虚数単位とし，z を複素数とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\oint_C e^{iz^2} dz$$

(4) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} e^{iz^2} dz = 0$ となることを示せ．ただし，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin\varphi \geq \dfrac{2\varphi}{\pi}$ を用いてよい．

(5) 上記のガウス積分と複素積分を用いて，実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ の値を求めよ．

(6) 実数積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ の値を求めよ．

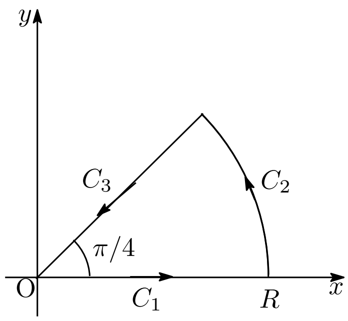


図 4.1

(東京大 2015)　　(m20150704)

0.109 3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1) (a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

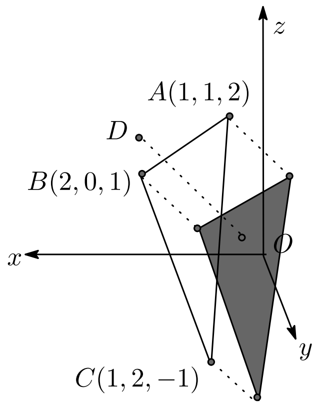
(b) 頂点 A と頂点 B, C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2) 下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1,1,2)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,-1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1,1,1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1,-1,-1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．
ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x + 3d_y + d_z - 9 > 0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.110　以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1 < |z| < 2$, および $2 < |z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.111　i を虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1) $-i$ の 3 乗根

$$A = (-i)^{1/3}$$

を考える．

(a) A を全て求めて $a + ib$ の形で答えよ．a と b は実数とする．ただし，最終的な a と b の表式に三角関数を用いてはならない．

(b) A の全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) x と y を実数として複素数 $z = x + iy$ を考える．次の関数に関して以下の問いに答えよ．

$$u = \sin x \cosh y$$

(a) u を実数部分として持つ正則関数 $w(z)$ を求めよ．

(b) $\dfrac{dw(z)}{dz}$ を求めよ．

(3) 次の複素関数積分 I を考える．

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^5 - 3iz^4/2 + z^3} dz$$

ただし，積分路は複素平面上の単位円周上を反時計回りに一周するものとする

(a) 全ての極と対応する次数と留数を求めよ．

(b) 積分 I を求めよ．

(東京大 2018)　　(m20180704)

0.112 i を虚数単位とし，z は複素数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の複素数を $x+iy$（x, y は実数）の形ですべて求めよ．ただし，x, y の表式に三角関数を含んではならない．

(a) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$　　(b) $i^{1/2}$　　(c) $\dfrac{(1-i)^6}{(1+i)^8}$

(2) 関数 $z = \tan\omega = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}$ の逆関数を $\omega = \tan^{-1} z$ で表す．

(a) 次の式が成り立つことを示せ．　$\tan^{-1} z = \dfrac{i}{2}\log\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$

ただし，log は複素対数関数である．

(b) $\tan^{-1} z$ の z に関する微分を求めよ．

(3) 複素平面において，曲線 C を $z = e^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ とする．

(a) 次の積分 $I(k)$ を求めよ．ここで，k は $0<k<1$ の定数とする．　$I(k) = \displaystyle\int_C \frac{1}{k^2z^2+1} dz$

(b) $k = 2-\sqrt{3}$ のとき，I の値を求めよ．

(4) 実積分 J の値を留数定理により求めることを考える．　$J = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$

(a) J の積分範囲を $[-\infty, \infty]$ と変形して，被積分関数に e^{ix} を用いて J を表せ．

(b) 関数 $f(z) = 1/(z^2+1)^2$ とする．複素平面において，図 1 の半径 Γ（円弧 ADB）の半径 R が十分に大きい時，次のことが成り立つことを示せ．　$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$

(c) 図 1 の C に関する周回積分を考えることにより，J の値を求めよ．

このとき，複素平面の上半平面において，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0$$

であることを用いてよい．

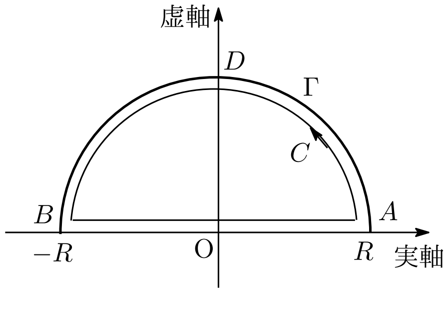


図 1

(東京大 2020)　　(m20200703)

0.113 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x+iy \quad (x,y$ は実数$)$ の形で求めよ．x,y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x+iy \quad (x,y$ は実数$)$ の形で求めよ．ただし，x,y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a)=\int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\log_e(1+ae^{it})\right]dt$$

(a) $z=e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1+ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z=x+iy$ が上半面 $y>0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

(東京大 2022) (m20220703)

0.114 (x,y) 平面内の領域 $D=\{\,0\leqq y\leqq x\leqq 1\,\}$ における重積分 $\displaystyle\iint_D\sqrt{2x^2-y^2}\,dx\,dy$ を計算せよ．

(東京工業大 1998) (m19980801)

0.115 (x,y) 平面の領域 $\{x>0,\ y>0\}$ で定義された関数 $f(x,y)=x^{\log y}$ について次の問いに答えよ．

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ． (2) f は狭義の極値を持たないことを示せ．

(東京工業大 2007) (m20070801)

0.116 (1) 空間 $\boldsymbol{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\boldsymbol{R}^3\}$ 内の平面 $H=\{x+y+z=0\}$ の正規直交基底を一組求めよ．

(2) 写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を，ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，(1) の平面 H への $\boldsymbol{v}$ の正射影を対応させる線形写像とする．f を与える行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(東京工業大 2007) (m20070804)

0.117 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，平面 $z=0$，曲面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ．ただし，a,b は正の実数とする．

(東京工業大 2013) (m20130804)

0.118 (x,y) 平面内の 4 個の曲線

$$y^2=x,\qquad y^2=3x,\qquad xy=1,\qquad xy=2$$

で囲まれた領域を D とする．

(1) $u=\dfrac{y^2}{x}$，$v=xy$ とするとき，D は (u,v) 平面内のどのような領域にうつるか．

(2) 積分

$$I=\iint_D e^{xy}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(東京工業大 2015)　　(m20150802)

0.119 p, q を実数とする．連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ 3x \quad\quad + qz = 1 \\ -2x + py - 6z = 0 \end{cases}$$

が解を持たないとき，点 (p, q) が pq 平面内で動き得る範囲を図示せよ．

(東京工業大 2017)　　(m20170801)

0.120 a, b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y + ay^2 - by$$

を考える． (x_0, y_0) が関数 $f(x, y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ を満たす任意の点 (x, y) について

$$f(x, y) \geqq f(x_0, y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b > 0$ のとき，$f(x, y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ).

(2) $b = 0$ のとき，$f(x, y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ).

(東京工業大 2022)　　(m20220801)

0.121 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\, dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.122 点 $P(1, 2, 3)$ から平面 $\pi : x + 2y + 2z = 2$ に下ろした垂線の足を H とするとき，線分 HP の長さを求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060901)

0.123 関数 $z = x^3 - 3xy + y^3$ の表す曲面を S とする．S 上の点 $P(-2, 1, -1)$ における S の接平面の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060905)

0.124 xy 平面において曲線 $y = \log x$ と x 軸と直線 $x = 2$ とで囲まれる領域を D とするとき，次の 2 重積分の値を求めなさい．　$\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} dxdy$

(東京農工大 2007)　　(m20070903)

0.125 $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の表す xy 平面上の曲線を C とする．次の問いに答えなさい．

(1) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dx}$ を求め，t の式で表しなさい．

(2) $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求め，t の式で表しなさい．

(3) x の関数 $y = f(x)$ の極値を求めなさい．ただし，極小値か極大値か，そのときの x の値も書きなさい．

(4) 曲線 C の全長 L を求めなさい．

(東京農工大 2009)　　(m20090902)

0.126 関数

$$u = x^2 - xy + y^2 \ , \qquad v = x^2 + xy + y^2$$

によって定められる (x, y) 平面から (u, v) 平面への写像 F を考える．(x, y) 平面の円の内部

$$D \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

の F による像 $E = F(D)$ の面積を求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941002)

0.127 (1) $xy-$平面内の曲線 $f(x, y) = x^3 + 3xy + 4y^4 - x - 4 = 0$ 上の点 $(2, -1)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ．

(2) 点 (x, y) が条件 $y^2 - x^2 - 1 = 0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x, y) = y^3 + 2x$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2005)　　(m20051003)

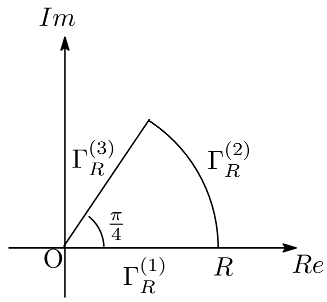
0.128 (1) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$ の極をすべて求め，それらを複素平面上で図示せよ．

(2) (1) の関数 $f(z)$ について次の積分を計算せよ．

$$(a) \quad \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} f(z)dz \ . \qquad\qquad (b) \quad \int_{|z-i|=\frac{3}{2}} f(z)dz \ .$$

(電気通信大 2006)　　(m20061005)

0.129 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(>0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx \ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz \ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr \ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr \ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2\cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1),(2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.130 複素平面の円 $|z+i| = \sqrt{3}$ を正の向きに 1 周する積分路を C とするとき，次の複素積分の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$

(電気通信大 2007)　　(m20071005)

0.131 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ．

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ．

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ．

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.132 複素関数

$$f(z) = \frac{z^3+3}{z-2i}, \quad g(z) = \sin\left(f(z)\right)$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $f(1)$, $f'(1)$, $g(0)$, $g'(0)$ のそれぞれの値の実部と虚部を求めよ．

(2) 次の積分値を求めよ．

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2-1} dz$$

ただし，C は複素平面の原点を中心とし半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を正の向きに 1 周する積分路である．

(電気通信大 2009)　　(m20091005)

0.133 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．

(2) 原点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ．

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 A を求めよ．

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である．

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである．

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである．

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える．k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ．

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする． A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

0.134 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x + z = 0$ に関する対称移動とし，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y - z = 0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $x + z = 0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ を解け．

(4) 平面 $x + z = 0$ と平面 $y - z = 0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.135 複素関数 $f(z)\ \dfrac{z^2}{z^4 + z^2 + 1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $z^6 = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．

(2) 上半平面 $\mathbb{H} = \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$ 上にある $f(z)$ の各特異点 α に対して，その留数 $\mathrm{Res}(\alpha)$ を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131005)

0.136 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\, f) \cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.137 関数 $f(x,y)=x^2+3xy-y^3+1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y)=0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ を $x=2$ の近くで

$$\varphi(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots$$

とテイラー展開したときの係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.138 以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) 複素数平面において $|z|=1$ 上を正の向きに 1 から i に至る曲線を C_1 とし，i から 1 に至る積分を C_2 とする，このとき，次の複素積分 $I_1,\ I_2$ の値を求めよ．

$$I_1=\int_{C_1}\frac{dz}{z^2}\,,\qquad I_2=\int_{C_2}\frac{dz}{z^2}$$

(2) 複素関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$ に対して，次の複素積分 I の値を求めよ．

$$I=\int_{|z-1|=1}f(z)dz\qquad \text{（積分路は正の向きに 1 周）}$$

(3) 複素関数 $g(z)=\dfrac{1}{z(1-\cos z)}$ の極 $z=0$ における位数と留数を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171005)

0.139 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})\qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S:z=u(x,y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r)=r^2e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I=\iint_D u(x,y)\,dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.140 関数

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z=f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．
ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ．

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.141 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(2,1,3)$, $\mathrm{B}(1,1,2)$, $\mathrm{C}(3,0,1)$, $\mathrm{D}(2,-1,2)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ．

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2021)　　(m20211001)

0.142 xy 平面上の曲線 C ： $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0<x<1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x=\dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x)=a_0+a_1\left(x-\frac{1}{2}\right)+a_2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots$$

の係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.143 a , b は正の定数で， $3a>b$ を満たすとき，空間内に頂点を $(0,0,a)$ ，底面を $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$ とする円錐 K を考える．また，点 $(0,2,b)$ を通る x 軸に平行な直線および点 $(0,-1,0)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α の方程式を求めよ．

(2) 平面 α と円錐 K の交わりのうちで， x 座標が最大となる点を求めよ．

(横浜国立大 1992)　　(m19921102)

0.144 3次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0<\theta<\pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993)　　(m19931102)

0.145 xy 平面上の点 $P(x,y)$ が， $t \geqq 0$ の範囲で，次の連立微分方程式に従って移動する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-|y| \\ \dfrac{dy}{dt}=-|x| \end{cases}$$

ここで， $t=0$ で， $x=1$, $y=3$ とする．

(1) 第 1 象限（ $x>0$ ， $y>0$ ）で， x と y を t で表せ．

(2) 第 1 象限で点 P の描く曲線の方程式を求めよ．また，$x=0$ となるときの y と t を求めよ．

(3) 第 2 象限（ $x<0$ ， $y>0$ ）で， x と y を t で表せ．また，第 1，第 2 象限で点 P の描く曲線の概略を図示せよ．

(4) 点 P の描く曲線と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1994)　　(m19941101)

0.146 xy 平面上の点 $P(x,y)$ が， $t \geq 0$ の範囲で，次の連立微分方程式に従って移動する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(1) この連立微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $t=0$ で $x=1$ ， $y=3$ とするとき x と y を t で表せ．

(3) $x=0$ となる y と t を求めよ．

(4) 点 P の描く曲線の方程式を求め，略図を描け．

(横浜国立大 1997)　　(m19971101)

0.147 複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z|=1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5+0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.148 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図 2 のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

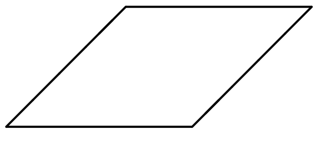


図 1

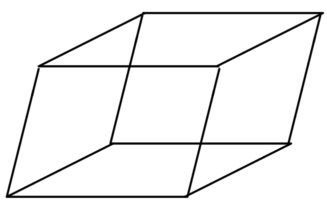


図 2

(千葉大 2000)　　(m20001202)

0.149 2 次元平面上の直交座標系を x, y とする．原点から点 (a, b) までの距離を r，原点と点 (a, b) を結ぶ直線と，x 軸の正の方向とがなす角度を反時計回りの弧度法で計った角度を θ とする．このとき，曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$，$a > 0$ によって囲まれる有限の領域の重心の x 座標を求めなさい．

(千葉大 2000）　(m20001203)

0.150 三次元空間 O- xyz 座標系で, 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a > 0)$ である.

(千葉大 2010)　(m20101203)

0.151 三次元空間 $O - xyz$ 座標系で，曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z = a^{-1}$ $(1 < a)$ で囲まれた図形を図示し，その体積 V を求めなさい.

(千葉大 2011)　(m20111203)

0.152 三次元空間 $O - xyz$ 座標系で，円柱 $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ が 2 つの平面 $z = bx$ $(b > 0)$ と $z = 0$ とで切り取られる立体について，以下の問に答えなさい.

(1) 立体を図示しなさい.

(2) xy 平面上に極座標系 $(r,\ \theta)$ をとって，$O - r\theta z$ 円柱座標系で見た場合，z 軸を通る θ 平面と $\theta + d\theta$ 平面とで立体が切り取られる体積 dV を求めなさい.

(3) 立体の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2014)　(m20141203)

0.153 三次元ユークリット空間の中でデカルト直交座標系 $O - XYZ$ が定義され，次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられている．このとき，以下の問に答えなさい.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として，行列 $A^T A$ を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列である.

(3) 行列 $A^T A$ の逆行列 $\left(A^T A\right)^{-1}$ を求めなさい.

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T \boldsymbol{c}$ を求めなさい.

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め，このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$，及び，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき，点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり，かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し，行列 $A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい.

(千葉大 2015)　(m20151202)

0.154 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている.

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$, $a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.155 次の重積分に関して以下の問に答えなさい．

$$I=\iint_D \frac{x+y}{y^2}\sin(x+y)\,dxdy$$

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le y\le 2,\ 0\le x\le y\right\}$$

(1) 積分領域 D を $u=x+y,\ v=\dfrac{x}{y}$ の関係で (u,v) へ変数変換した場合の D に対応する積分領域を D' とする．$O-xy$ 平面での D, および, $O-uv$ 平面での D' を図示しなさい．

(2) 関数行列式（ヤコビアン）$J(x,y)=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 I の値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161203)

0.156 楕円面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$　について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0,y_0,z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z=z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし， $-c<z_0<c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000）　　(m20001304)

0.157 xy 平面上において原点を中心とする半径 b の円周上を等速度で運動する点の時刻 t における位置は $x=b\cos(\omega t+\phi)$, $y=b\sin(\omega t+\phi)$ で表すことができる．ここに，ω,ϕ は定数で，それぞれ，角速度，位相と呼ばれる．

(1) 位置を時間に対して微分すると速度ベクトル $\vec{v}$ が得られる．$\vec{v}$ を求め成分表示しなさい．

(2) 速度ベクトルをさらに時間に対して微分すると加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ が得られる．$\vec{\alpha}$ を求め成分表示しなさい．また，$\vec{\alpha}$ と $\vec{v}$ は互いに直交することを示しなさい．

(3) ベクトル $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ の絶対値 $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{v}|$ を計算しなさい．

(筑波大 2003)　　(m20031312)

0.158 xy 平面上に 2 本の曲線 $y=x^2-1$ と $y=-(x-k)^2+(k+1)$ が与えられているとする．

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ．

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を公式として用いてよい．

（筑波大 2004）　　(m20041311)

0.159 ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}t+1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\t+1\\2\end{pmatrix}$ と, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ位置ベクトルとする 3 点 $A,\ B,\ C$ を考える. ただし, t は実数である. 以下の設問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は, t の値によらず常に一次独立であることを示せ.

(2) 外積 $(\mathbf{b}-\boldsymbol{a})\times\ (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})$ を計算せよ.

(3) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面 Π の方程式を求めよ.

(4) 実数 t が変化するとき, 平面 Π が通らない点の集合を求めよ.

(筑波大 2005) (m20051307)

0.160 2 次元 $x-y$ 直交平面上で原点を中心とする半径 a の円の第一象限内にある部分を D とする．このとき，次の二重積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D xydxdy$

(筑波大 2006) (m20061310)

0.161 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 x, y をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell : y = ax$ に関して折り返すという線形写像を P としたとき，P の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006) (m20061319)

0.162 (1) ２つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{2},1,1)$, $\vec{b}=(0,-1,-1)$ のなす角を求めなさい．

(2) ２つのベクトル $\vec{x}=(1,0,3)$, $\vec{y}=(2,-1,1)$ の両方に直交する単位ベクトルを求めなさい．解答する単位ベクトルは一つでよい．

(3) ３点 $A(2,1,-3)$, $B(3,1,-1)$, $C(1,4,4)$ を通る平面の方程式を求めなさい．

(筑波大 2006) (m20061324)

0.163 球面 $C : x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ.

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2007) (m20071332)

0.164 列ベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}7\\9\\3\end{bmatrix}$ を二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$ が張る空間に射影することを考える. いま $\boldsymbol{a}_1$ を第一列, $\boldsymbol{a}_2$ を第二列, としてもつ 3 行 2 列の行列を A とする.

(1) 3 次元空間にベクトル $(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_1)$ を示す図を描きなさい.

(2) $\boldsymbol{b}$ を $(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_1)$ の張る平面へ射影する点を $p=A\overline{x}$, ここで $\overline{x}$ は 2 × 1 行列, とする. $\overline{x}$ を求める式が $A^TA\overline{x}=A^T\boldsymbol{b}$ で与えられる理由を説明しなさい. なお A^T は行列 A の転置をあらわす.

(3) この時射影された点 p の座標を示しなさい.

(4) この射影を与える $\overline{x}$ の成分 $\overline{x}=(\overline{x}_1\ ,\ \overline{x}_2)^T$ を求めなさい.

(筑波大 2008) (m20081302)

0.165 $z = x^2 + 2y^2$, 平面 $x + y = 1$, および 3 座標面で囲まれる立体の体積を求めなさい.

(筑波大 2008)　　(m20081307)

0.166 1 直線上にない 3 点 O, A, B をとり, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ とする. また, ベクトルの内積は $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, 絶対値は $|\overrightarrow{a}|$ $(= \sqrt{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a})})$ のように表し, $a = |\overrightarrow{a}|$, $b = |\overrightarrow{b}|$ とする.

O, A, B を含む平面上の任意の点 P は, 適当な実数 p, q により:

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{a} + q\overrightarrow{b} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

のように表すことができる. これについて, 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P が線分 AB（両端 A, B を含む）の上にあるとき, $(*)$ の p, q はどのような条件を満たすか.

(2) 点 P が線分 AB の中点のとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(3) $\angle AOB$ の 2 等分線と線分 AB の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(4) A から直線 OB に下ろした垂線の足を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $(*)$ の形で表せ.

(5) $\triangle OAB$ が直角三角形のとき, $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ が取りうる値をすべて示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081336)

0.167 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z) = z^i$ $(i = \sqrt{-1})$ において, $f(i)$ の値をすべて求めよ.

(2) xyz 空間における曲面 $z = (x + y)^2 e^{x-y}$ 上の点 $(1, 0, e)$ での接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.168 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$ の一般解を求め, それが xy 平面上でどのような曲線群になるか調べよ. さらに, 代表的な場合（一通りとは限らない）について, そのグラフを xy 平面上に図示せよ.

(筑波大 2010)　　(m20101307)

0.169 3 次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^3$ における平面 $W_1 : x + y + z = 0$ および $W_2 : x + y - z = 0$ について以下の設問に答えよ.

(1) W_1, W_2 に垂直な直線を l_1, l_2 とする. これらの直線が原点を通るとき, l_1, l_2 を表す方程式を求めよ.

(2) l_1, l_2 の両者と直交する直線 l_3 を表す方程式を求めよ.

(3) W_1 と W_2 の交線を表す方程式を求めよ.
また, この交線と前問で求めた直線 l_3 のなす角 θ $(0 \leq \theta \leq \pi/2$ とする$)$ を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101310)

0.170 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ において, 平面 $P : x - y + z + 1 = 0$ と直線 $L : 2(x - 1) = -y = -z$ を考える.

(1) 平面を張る 2 つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, 直線を張るベクトル $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

(2) 任意の点を直線 L と平行に平面 P 上へ射影する線形変換を表す行列 A を求めよ.

(3) 任意の点を平面 P と平行に直線 L 上へ射影する線形変換を表す行列 B を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101313)

0.171 複素数 $z = x + iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり, その実部 $u = u(x, y)$, 虚部 $v = v(x, y)$ は $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x$, $v(0, 0) = 0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ．必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい．

(2) $f(z)$ を求めよ．

(3) C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ．

(筑波大 2011)　　(m20111303)

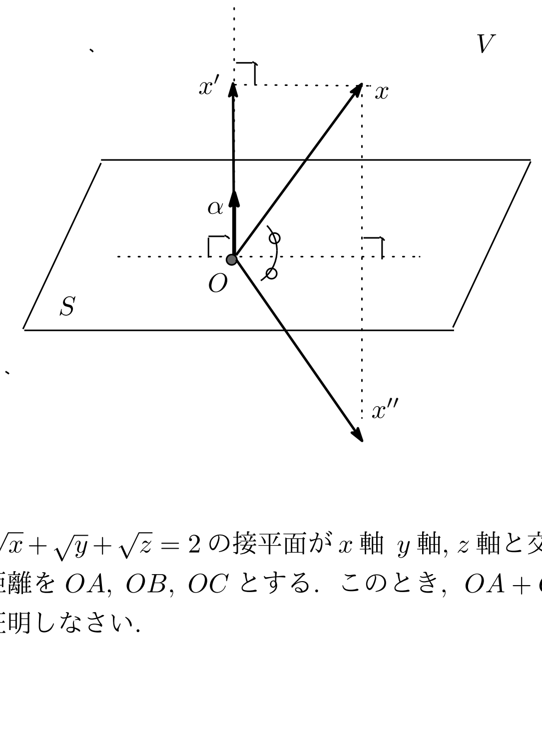
0.172 ３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と表すこと．

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

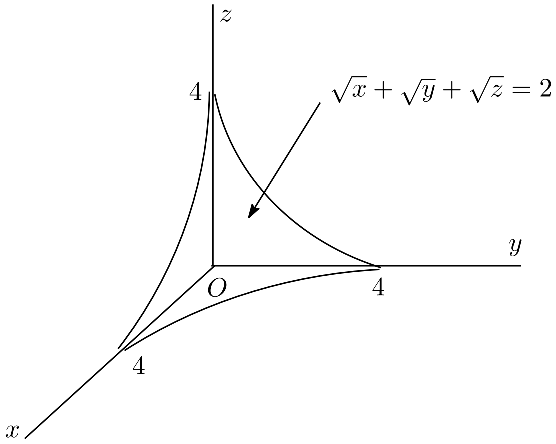
(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ．



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.173 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし，原点 O から点 A, B, C への距離を OA, OB, OC とする．このとき，$OA+OB+OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい．



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.174　3次元幾何ベクトル空間において,

平面 A :　$x+y+mz-1=0$

平面 B :　$x+my+z-3=0$

平面 C :　$mx+y+z-2m=0$

を考える. ただし, m は実定数とする.

(1)　3平面が一点でのみ交わる条件を求めよ.

$m=0$ のとき, 以下の (2) から (5) の問いに答えよ.

(2)　平面 A, 平面 B, 平面 C の交点を求めよ.

(3)　平面 A と平面 B の交線 L と平行なベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を求めよ.

(4)　平面 C を張る2つの線形独立（一次独立）なベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を求めよ.

(5)　3次元空間中の任意の点を交線 L と平行に平面 C 上へ射影する線形変換を表す行列 Q を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121302)

0.175　2次曲線 $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-4x-4\sqrt{3}y-12=0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}-12=0$ と表すことにする.
ここで, $A=\begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$
である. この2次曲線について以下の問いに答えよ.

(1)　A の固有値 a_1, a_2 $(a_1<a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めよ.

(2)　$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った2次の正方行列を $P=(\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2)$ とする.
${}^tPP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ.

(3)　前問で作った P を使って座標変換 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと, この2次曲線は
${}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}'+2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}'-12=0$ と書ける. この式を x', y' を使って表せ.

(4)　さらに, 座標の平行移動 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{c}$ を行って, この2次曲線を標準形で表せ.
ここで, $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である. c_1, c_2 の値も答えよ.

(5)　XY 平面上にこの2次曲線の概形を描け. さらに, その図中に $x'y'$ 座標軸および xy 座標軸も描き加えよ.

(筑波大 2012)　　(m20121312)

0.176 (1) 関数 $y = \sin^2 x$ のグラフを (x, y) 平面上に描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か. 定義を述べなさい.

(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である. この面積を km^2 の単位で表しなさい.

(筑波大 2012)　　(m20121313)

0.177 2 変数関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ (ただし, $(x, y) \neq (0, 0)$) と定義する. ここで, $\log$ は自然対数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の全微分を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ について, 点 $(a, b, f(a, b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ を $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ として求めたい. $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において定義されていないので,
$D_\varepsilon = \left\{(x, y) \,\middle|\, \varepsilon^2 < x^2 + y^2 \leq 1,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\right\}$ として, $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy$ を計算せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.178 以下でベクトルは位置ベクトルとし, 3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点 (x, y, z) とベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とを同一視する. 特に原点 $(0, 0, 0)$ はゼロベクトル $\boldsymbol{0}$ と同一視する. また, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, $A\boldsymbol{x}$ と表せる点全体の集合を H とする. つまり $H = \left\{A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\right\}$ である,

(1) H は平面となる. その平面の方程式を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, $A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ を示しなさい.

(3) 次の 3 条件を満たす 3 次正方行列 B を求めなさい.

追記： ただし，B はゼロ行列ではないとする.

(a) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{y} \in H$ に対し, $B\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ とは直交する.
（注：ゼロベクトルは任意のベクトルと直交する.）

(b) $\boldsymbol{y} \in H$ に対し, $B\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ である.

(c) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ なら $B\boldsymbol{z} = 3\boldsymbol{z}$ である.

(4) A と前問の B に対し, 行列 $A + B$ は正則であること（逆行列を持つこと）を示しなさい.

(筑波大 2013)　　(m20131309)

0.179 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において, 曲面 $z = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ と平面 $z = 1$ によって囲まれた図形の体積を求めよ.

(筑波大 2014)　　(m20141314)

0.180 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C : x^3 - 3xy + y^3 = 0$ について, 次の問いに答えよ.

(1) C の特異点をすべて求めよ.

(2) C 上の点 (x, y) に関する xy の極値をすべて求めよ.

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおき, C の極方程式を求めよ.

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ．
(ヒント：極方程式を用いて，$t = \tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015)　　(m20151303)

0.181　2 変数関数 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x, y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x, y) = (0, 0)$ を中心とする $f(x, y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x, y) = (1, 1)$ を中心とする $f(x, y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z = f(x, y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1, 1, f(1, 1))$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.182　$x^2 + 3y^2 = 3$ で与えられる楕円 E について，以下の問いに答えよ．計算過程も示せ．

(1) $(x, y) \in R^2$ が楕円 E 上を動くとき，実関数 $f(x, y) = xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ．

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2 + 3y^2 \leq 3)$ で $0 \leq y \leq x$ を満たす領域の面積を求めよ．

(3) x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面を考える．この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする．このとき $z = x + iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5} e^{-z} dz$ の値を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151310)

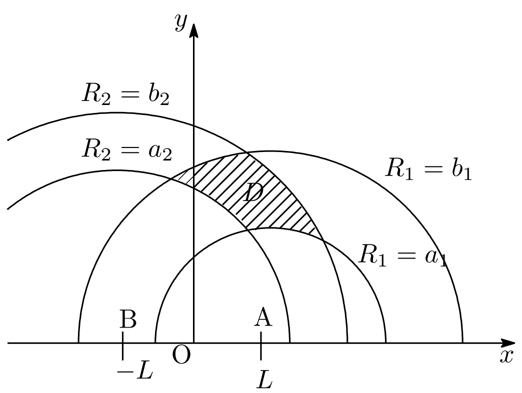
0.183　曲面 $x^2 = y(2 + 3x + z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151318)

0.184　xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x - L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x + L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ.

(3) a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1\le R_1\le b_1$, $a_2\le R_2\le b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D ydxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ.

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ.

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.185 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=\sinh 2z$ 　について，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする．　なお，$\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いてよい.

(1) $f(z)=u+iv$ とするとき，u, v を x, y を用いて表せ．　ただし，u, v は x, y の実関数とする.

(2) $f(z)=0$ となる z を求めよ.

(3) $w=f(z)$ により z 平面上の直線 $x=\dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ.

(筑波大 2017)　　(m20171302)

0.186 $f(x,y)=xy$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ.

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y)=c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p>0$ とする.

(3) C_p 上にあり $x>0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D=\bigcup_{1\le p\le 2}D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D\frac{1}{x^2}dxdy$$

の値を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.187 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+4x_1+2x_2-2x_3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の設問に答えよ.

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad \cdots\cdots ② $$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T = {}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t = 1, 2, 3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1, 2, 1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において y_1 y_2 y_3 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$ \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③ $$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1, y_2, y_3 を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.188 xyz 直交座標系において円柱面 $x^2 + y^2 = 1$, xy 平面，平面 $z = x$ により囲まれた部分の体積を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181314)

0.189 $f(x, y) = x^2 + y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2 + y^2$ を考える．この座標系上の点を (x, y, z) と表し，座標系の原点を $O(0, 0, 0)$ とする．

(1) 点 $A(1, 1, 2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$ I = \iiint_D (x^2 + y^2)\,dxdydz $$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.190 行列

$$ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A+2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.191 $z = \dfrac{1}{xy}$, $x > 0$, $y > 0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x, y) = (1, 2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x + 3y + 9z + 18 = 0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$, $z = 2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.192 (1) $z = f(x, y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 u, v に対して，$x = u+v$, $y = uv$ のとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 - 4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x,\ y) = x^4 + y^4 - 2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211303)

0.193 $x + 2y + z + e^{2z} - 1 = 0$ から定まる陰関数 $z = f(x, y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z = f(x, y)$ が表す曲面上の点 $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x, y)$ の原点 $(x, y) = (0, 0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.194 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21\ ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ．

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.195 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x,y)$ $\big((x,y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.196 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれる xy 平面内の有界領域を D とする．

領域 D を図示し，重積分 $\displaystyle\iint_D y dxdy$ を計算せよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071411)

0.197 (1) 関数 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい．

(3) 次の極限値を求めなさい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y = \dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい．

(埼玉大 2009)　　(m20091401)

0.198 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x,y)$ は，正値で 2 階微分可能であり，

$$f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x,y) = \log f(x,y)$ とおく．

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ．

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ．

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ．

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.199 点 (x, y) を点 (x', y') に対応づける xy 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，1 次変換と呼ばれる（ここで a, b, c, d は定数であり，下式は「 $x' = ax + by$ かつ $y' = cx + dy$ 」と同値）.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，以下の 2 問に答えよ.

(1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」(すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように k の値を定めよ.

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，xy 平面上の直線を形成する．この直線の方程式を求めよ.

(群馬大 2006) (m20061503)

0.200 平面 π : $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ と点 A:(1,2,3) について，以下の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ を求めよ.

(1) π は x 軸と点 $\boxed{\text{ア}}$，y 軸と点 $\boxed{\text{イ}}$，z 軸と点 $\boxed{\text{ウ}}$ でそれぞれ交わる.

(2) π に垂直で長さが 1 の法線ベクトルは $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3) A と π との距離は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(図書館情報大 2002) (m20021608)

0.201 次の各問に答えよ.

(1) 複素平面で，i を中心とした，原点を通る円の方程式を求めよ.

(2) 複素関数 $w = \dfrac{1}{z}$ によって，(1) で求めた円がどのような図形に移るか具体的に答えよ.

(茨城大 1998) (m19981704)

0.202 複素関数 $\omega = \dfrac{z - i}{z + i}$ について

(1) $z = 1$ のとき，$|\omega| = 1$ であることを示せ.

(2) z を ω の式で表せ.

(3) z 平面の円 $|z + 1| = \sqrt{2}$ は，ω 平面内のどのような曲線に写るか.

(茨城大 2003) (m20031704)

0.203 (u, v) 平面における正方形 $A = \{(u, v) | 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1\}$ が,

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

で表される写像により,(x, y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x, y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B x dx dy$ を求めよ.

(茨城大 2004) (m20041701)

0.204 複素平面上の曲線 $z(t) = \cos t + i(1 + \sin t)$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ を C とするとき,

(1) C を複素平面上に図示せよ.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C z dz$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z} dz$ を求めよ．ただし,$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す.

（茨城大 2004）　　(m20041704)

0.205 $t>0$ とする．xy 平面内の領域 $D(t): t^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 4t^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ 上の二重積分 $F(t)=\displaystyle\iint_{D(t)} \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$ 　について，次の問に答えよ．

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビ行列式（ヤコビアン）を計算し，$F(t)$ を $r\theta$ 平面内の領域上の二重積分に変換せよ．

(2) $F'(t)$ を計算せよ．

(茨城大 2006)　　(m20061702)

0.206 (1) 2 次元ユークリット空間（即ち平面）$\mathbb{R}^2$ の部分集合に関する次の性質を考える：
(1) 開集合である；**(2)** 閉集合である；**(3)** コンパクトである；**(4)** 連結である．
次の条件を満たす空でない部分集合の例をひとつずつあげよ：

(a) **(1)** かつ **(2)**　　(b) **(1)** であるが **(2)** ではない

(c) **(1)** ではないが **(2)** である　　(d) **(1)** でも **(2)** でもない

(e) **(3)** でないがその閉包（closure）は **(3)**　　(f) **(4)** でないがその内部（interior）は **(4)**

(2) 整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべてあげよ．

(3) 実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ の 2 つの部分集合 $[0,1]$ と $[0,1]\cup[2,3]$ の間には全単射対応（即ち 1 対 1 かつ上への対応）が存在し得るか否か，その理由もこめて，述べよ．
ここで，$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}|a \leqq x \leqq b\}$ である．

(茨城大 2006)　　(m20061707)

0.207 (x,y) を平面上の直交座標, (r,θ) を極座標とする．以下の問に答えよ．
$\rho>0$ とする．関数 $f(x,y)=r\sin 2\theta$ の正方形 $A=\{(x,y)\mid 0<x<\rho,\ 0<y<\rho\}$ 上の積分

$$I(\rho)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

と扇形 $B=\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\mid 0<r<\rho,\ 0<\theta<\pi/2\}$ 上の積分

$$J(\rho)=\iint_B f(x,y)dxdy$$

の大小関係を積分計算によらずに論ぜよ．次に積分計算を行って $I(\rho)$ と $J(\rho)$ を ρ の式で表し，大小関係を比較せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071705)

0.208 (x,y) を平面上の直交座標, (r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．
関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また, 偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007) (m20071706)

0.209 $x > 0,\ y > 0$ とする．$a > 0,\ 0 < b < 1$ のとき，以下の各問に答えよ．

(1) 変数変換 $u = xy,\ v = \log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ．log は自然対数である．

(2) 直線 $y = ax,\ y = (a^2+1)x$，および曲線 $xy = b,\ xy = b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて，領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ．

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a} = \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0$ となる点 (a,b) を求めよ．その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ．

(茨城大 2008) (m20081702)

0.210 次の連立不等式で表される領域を D とする． $x + y \leqq 2$， $0 \leqq y \leqq \sqrt{x}$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ． (2) 領域 D 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1+y)\,dxdy$ を求めよ．

(茨城大 2008) (m20081704)

0.211 n を正の整数とする．C は複素平面上の円 $|z| = \dfrac{1}{2}$ を正の向きに一周する閉曲線とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n}\,dz$ を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{z^n(z-1)} = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{z^n} + \dfrac{b}{z-1}$ を満たすような定数 $a_1, a_2. \cdots, a_n, b$ を求めよ．

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^n(z-1)}\,dz$ を求めよ．

(茨城大 2008) (m20081707)

0.212 (1) 関数 $y = \cos(x^2)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ と $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

(2) 次の連立不等式で表される範囲を xy 平面に図示せよ．

$$0 \leqq y \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ y \leqq x \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(3) 次の累次積分の順序を交換し，値を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_y^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \cos(x^2)dx \right) dy$$

(茨城大 2009) (m20091701)

0.213 複素数 $z = x + iy$（x, y は実数）の関数 $f(z) = x^2 - y^2 + y + i(2xy - x)$ について，次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z)$ はすべての z で正則で，$f'(z) = 2z - i$ となることを示せ．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{f'(z)} dz$ の値を求めよ．ただし，C は複素平面上の円 $|z| = 1$ を正の向きに一周する閉曲線とする．

(茨城大 2009)　　(m20091704)

0.214 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし，$g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0\,,\,1\,] \times \left[\,0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} g(x, y) dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a, b) = \iint_{[0,\infty)\,\times\,[0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)} dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2 + b^2 = 1$ の下での $I(a, b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.215 2 変数関数 $z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ について, 以下の各問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 11)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{f(1 + at\,,\ 2 + bt) - f(1, 2)}{t}$ を求めよ．

(3) 「$f(0, 0)$ は極大値である」，「$f(0, 0)$ は極小値である」，「$f(0, 0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ．

(茨城大 2010)　　(m20101701)

0.216 座標平面内の領域 $D = \{(x, y)\,|\,x,\ y$ は実数で $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ．

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x, y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする．

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ．

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x, y)\, dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ．

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.217 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ について．以下の各問に答えよ．

(1) すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し，等式

$$f(x,y)=(\alpha x-y)(\beta x+y)$$

が成り立つように正定数 α, β を定めよ．

また $f(x,y)=0$, $f(x,y)=1$ の軌跡の概形を xy直交座標平面にそれぞれ図示せよ．

(2) 点 (x,y) が原点を中心とする単位円周上を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 点 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ を中心とする単位閉円盤を D とするとき，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\pi}\iint_D f(x,y)dxdy=f(a,b)$$

(茨城大 2011)　　(m20111702)

0.218 xy直交座標平面において $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqq 1$ と $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ とを満たす領域を D とする．二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ の値を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121702)

0.219 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$y\geqq x\,,\ y\geqq -x\,,\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9$$

以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ に対して，$J=\dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial\theta}-\dfrac{\partial x}{\partial\theta}\dfrac{\partial y}{\partial r}$ とおく．J を計算せよ．

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2012)　　(m20121704)

0.220 a を実数の定数とする．xy 平面において，関数 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ のグラフが 3 点 $(2,1)$, $(3,-1)$, $(a,0)$ を通るとする．このような実数 α, β, γ がただ 1 組定まるための必要十分条件は，$a\neq 2$ かつ $a\neq 3$ であることを示せ．また，この条件のもとで，α, β, γ の値を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141704)

0.221 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1, a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.222 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z = f(x + ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial z}{\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

(2) $z = f(x + ay)$ が表す曲面上の点 $\bigl(0.0.f(0)\bigr)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.223 xy 平面内の領域 D を $D = \{(x, y) \mid x + y > 0\}$ とする．D から $\mathbb{R}$ への 2 変数関数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x, y)$ および $f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\bigl(f_x(x, y) + f_y(x, y)\bigr)$ が存在するかどうか確かめよ.

(茨城大 2016)　　(m20161702)

0.224 xy 平面内の領域 $E = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y,\ 1 \leq y \leq 2\}$ 上の 2 重積分 $\displaystyle\iint_E \frac{x - y}{(x + y)^3}dxdy$ を計算せよ.

(茨城大 2016)　　(m20161703)

0.225 次の連立不等式で表される領域を D とする．　$\dfrac{1}{2}y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 累次積分 $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 e^{x^2}dx\right)dy$ の順序を交換して，値を計算せよ.

(茨城大 2016)　　(m20161704)

0.226 複素平面において，0 を始点，π を終点とする曲線 $C : z(t) = t + i\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ を考える．以下の各問に答えよ.

(1) 曲線 C を複素平面上に図示せよ.

(2) 導関数 $z'(t)$ を求めよ.

(3) 複素積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$ を計算せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す.

(茨城大 2016)　　(m20161707)

0.227 実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3x - 3y^2$ に対して，xyz 空間内の曲面 S を

$$S = \bigl\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid\ z = f(x, y)\bigr\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2) k を正の定数とする．曲面 S 上の点 $(k, k, f(k, k))$ における接平面が原点 $(0, 0, 0)$ を通るように定数 k の値を定めよ.

(茨城大 2017)　　(m20171702)

0.228 n を正の整数，a を正の実数とする．xy 平面内の領域 $D_a = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\right\}$ 上の 2 重積分

$$I_a(n) = \iint_{D_a} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^n} dxdy$$

について，以下の各問いに答えよ．

(1) $I_a(1)$ を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のとき，$I_a(n)$ を求めよ．

(3) $n \geq 2$ のとき，極限値 $\lim_{a \to \infty} I_a(n)$ を求めよ．

(茨城大 2017)　　(m20171703)

0.229 $\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x, y)$ を考える．

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{y^2 - 1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ となる点 (x, y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ．

(茨城大 2018)　　(m20181702)

0.230 次の関数を考える．

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2$$

$0 \leqq t$ に対して $D(t) = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1,\ f(x, y) \geqq t\right\}$ とするとき，次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ．

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき，$F(t)$ を求めよ．
ただし，平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t) = 0$ とする．

(3) 次の等式を示せ．

$$\int_0^\infty F(t) dt = \iint_{D(0)} f(x, y) dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.231 実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y + 2$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $z = f(x, y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1, 2))$ における接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.232 xy 平面内の領域 $D : 0 \leqq x \leqq 1,\ \sqrt{x^2 + 3} \leqq y \leqq \sqrt{x^2 + 8}$ における 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y^2} dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201704)

0.233 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$ とする．このとき，つぎの小問 (1) および (2) に答えよ．

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{(\sqrt{25-6x^2+15y^2})^3}dxdy$ の値を求めよ.

(茨城大 2021)　　(m20211703)

0.234 $-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ.

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ.

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ.

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.235 $f(x,y) = x^2y$ として，次の問に答えよ.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x,y) \mid y \geqq x,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ を xy–平面上に図示せよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dy\,dx$ を求めよ.

(4) D での $f(x,y)$ の最大値を求めよ.

(山梨大 2002)　　(m20021803)

0.236 2 次元の実座標平面上のベクトルを直線 $y = 5x$ に関して線対称移動する変換 f を考える．また，基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 基底となる 2 つの直交するベクトルを $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$，$\mathbf{a}_2 = -5\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ とする．また，直線 $y = 5x$ に関してベクトル $s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ と線対称なベクトルを $S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ とする．即ち，$f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = S\mathbf{a}_1 + T\mathbf{a}_2$ で，S, T, s, t は実数．このとき，S, T を s, t を用いた式で表せ.

(2) 基底であるベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ に対応する変換 f の行列 A を求めよ.

(3) $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めよ.

(4) $f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2$ とするとき，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 F を行列 A, B を用いて表し，行列 F を求めよ.

(山梨大 2003)　　(m20031806)

0.237 $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 7$ とする. 点 $(1,2)$ での曲面 $f(x,y) = 0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051805)

0.238 (1) 領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ を xy– 平面に図示しなさい.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めなさい.

(山梨大 2006)　　(m20061804)

0.239 座標平面上の領域 $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$ を考えるとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D e^x \sin y\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2007)　　(m20071806)

0.240 座標平面上に曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸とで囲まれた領域を D とし，関数 $f(x) = e^{\sin x}$ を考える．ここに，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{df(x)}{dx}$ を求めなさい．

(2) α が定数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos x\,dx$ を α の式で表しなさい．

(3) D における二重積分 $\displaystyle\iint_D f(x)\,dxdy$ の値を求めなさい．

(山梨大 2008)　　(m20081804)

0.241 α を正の定数として，座標平面上の領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq y \leqq \alpha\}$ を考える．このとき，D における二重積分 $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\,dxdy$ を求め，α の式で表しなさい．

(山梨大 2009)　　(m20091804)

0.242 方程式 $z = f(x,y) = x^2 + g(y) - 1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ．
但し，$g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1) 点 $(1, s, f(1,s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ．

(2) 接平面 S' の z 軸切片が $z = -3s^4 + 2s^2 - 1$ であるとき，$g(y)$ を求めよ．

(3) $z = f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ に停留点を持つとする． このとき，(2) で求めた $g(y)$ を用いて，$z = f(x,y)$ が極大または極小となる (x,y) およびそのときの極値を全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.243 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.244 z は複素数で，$z^n = 1$ を満たす 1 の n 乗根（但し，n は自然数）であるとする．このとき，以下の小問に答えよ．

(1) 全ての z（n 乗根）を求めよ．また要点を押さえて，n 乗根の概略を複素平面上に図示せよ．

(2) 1 でない n 乗根の一つを ω とし，ω^2, $\cdots$, ω^{n-1} のいずれも 1 でないとする．また，m が自然数で n の倍数でないとき，次の 2 式 P, S_m の値を求めよ．

$$P = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})\ ,$$

$$S_m = 1 + \omega^m + \omega^{2m} + \cdots + \omega^{(n-1)m}\ .$$

(3) $n=10$ の場合を考え，ω, ω^2, ω^3, $\cdots$, ω^9 がいずれも 1 にならないような ω はいくつあるか求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181803)

0.245 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5=1$ の解を全て求めよ．また，$z\neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5=5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n=1,2,3,4,5)$ により α を変換せよ．

(山梨大 2019)　　(m20191803)

0.246 円周　$x^2+y^2=1$ ，直線　$y=x$　及び　y　軸によって囲まれた第 1 象限内の平面領域を　D　とする．次の 2 重積分を計算せよ．

$$\iint_D x^3y\,dx\,dy$$

(信州大 1998)　　(m19981903)

0.247 (1) 次の行列式を因数分解せよ．

$$\begin{vmatrix} {a_1}^2 & a_1 & 1 \\ {a_2}^2 & a_2 & 1 \\ {a_3}^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 1 直線上にない平面上の 3 点 (a_1,b_1) , (a_2,b_2) , (a_3,b_3) の x 座標が相異なるとき，この 3 点を通る放物線　$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$　は存在し，ただ 1 つであることを証明せよ．

(信州大 1998)　　(m19981904)

0.248 円柱 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ の xy 平面の上方で, 平面 $z=x$ の下方にある部分の体積を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041901)

0.249 次の問に答えよ．

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x)>0$ となるとする．$0<h<b-a$ となる h をとるとき $[a,b-h]$ で定義される関数 $g(x)=f(x+h)-f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ．

(2) 曲面 $z=y^2-x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.250 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t)=(f(t),g(t))$ で与えられている．但し，$f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[\,0,1\,]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり，それらの導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ は同じ開区間で連続である．

さて，動点 P が時刻 $t=0$ に原点 $O(0,0)$ を出発して時刻 $t=1$ に点 $A(1,1)$ に到着するとせよ．このとき，途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t)=(f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ．

(信州大 2007)　　(m20071904)

0.251 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える．f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ および $f_y(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする．このとき，ある $\theta_0\in(0,2\pi)$ が存在し，
$-f_x(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\sin\theta_0+f_y(\cos\theta_0,\sin\theta_0)\cos\theta_0=0$　　となることを示せ．

(信州大 2008)　　(m20081903)

0.252 xy 平面上で定義された関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$，$f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141901)

0.253 平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$\triangle f(x,y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とし，$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) z_r，z_θ を r，θ，f_x，f_y を用いて表せ．

(2) $z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=\triangle f$ を示せ．

(3) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.254 曲面 $z=x^2y^3$ 上の点 $(2,1,4)$ における接平面の方程式を求めよ．

（新潟大 2004）　　(m20042003)

0.255 座標空間において, 3 点 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,2)$ を通る平面を α とし, 原点 $O(0,0,0)$ から平面 α に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ の両方に垂直な単位ベクトルを 1 つ求めよ.

(2) α の方程式を求めよ.

(3) H の座標を求めよ.

(4) H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ.

(新潟大 2005)　　(m20052004)

0.256 $\mathbb{R}^3=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ :\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ をユークリッド空間とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) A を 3 次の実正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ によって定義する．点 $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^3$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を W とする．このとき，$T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り，ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ．ここで，${}^t(A^{-1})$ は，A の逆行列 A^{-1} の転置行列である．

(2) a,b,c を正の実数とし，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ を C とする．C 上の点 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ．

(新潟大 2006)　　(m20062006)

0.257 位置ベクトル $\overrightarrow{r}=(\sqrt{3},1,0)$ と力をあらわすベクトル $\overrightarrow{F}=(2,2,0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) xy 平面内にあり，ベクトル $\overrightarrow{r}$ に垂直な単位ベクトル $\overrightarrow{e}$ を求めよ．

(2) トルク $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$ を計算せよ.

(3) 二つのベクトル $\overrightarrow{r}$ と $\overrightarrow{F}$ の間の角度を求めよ.

(新潟大 2007)　　(m20072001)

0.258 次の複素数を極形式 $(re^{i\theta})$ であらわし，複素数平面上に図示せよ.

(1) $2i$

(2) $-1+\sqrt{3}i$

(3) $2+2i$

(新潟大 2009)　　(m20092001)

0.259 (1) $z = 4 - x^2 - y^2$ 上の点 $(a, b, 4 - a^2 - b^2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接平面が点 $(1, 2, 4)$ を通るとき，接点の軌跡を x- y 平面上に投影してできる図形を求めよ.

(新潟大 2011)　　(m20112008)

0.260 x–y 平面上の曲線 $y = ax^2 + 1$ と直線 $y = x$ が接するとき，a の値と接点の座標を求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122003)

0.261 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ において $ax + by + cz + d = 0$ で与えられる平面 H を考える． 平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする． また，$\boldsymbol{v} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$（H と直交する長さ 1 のベクトル）を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle\, \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交することを示せ．また $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle\, \boldsymbol{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ.
ただし，$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す.

(3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|$ で与えられることを説明せよ.

(4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大 2012)　　(m20122015)

0.262 座標平面において，曲線 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする． このとき，次の各問いに答えよ.

(1) F の概形をかけ.

(2) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta$，$y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ.

(3) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta$，$y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122016)

0.263 以下の問に答えよ.

(1) $F(\omega) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-j\omega t} dt$ を求め，$F(\omega)$ のグラフを描け.

(2) $F'(\omega) = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ を $\omega = 0$ 以外で求めよ.

(3) $y = \tan(a\omega)$ のグラフを，横軸を $a\omega$ 軸，縦軸を y 軸とする座標平面に，$-\dfrac{\pi}{2} \leq a\omega \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で描け．

(4) $F(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に ● 印で示せ．

(5) $F'(\omega) = 0$ となる $a\omega$ の値の位置を，問 (3) で描いた座標平面に ⊙ 印で示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142004)

0.264 x-y 平面上の曲線 $y = 2x^2$ を，原点のまわりに 45°回転して得られる曲線の方程式を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142009)

0.265 $m.\, n$ を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が解をもつとき $x,\ y,\ z$ はどのような関係を満たすか，以下の設問に答えなさい．

ただし，$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix}$ とおくとき，与式は $m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$ とかける．

(1) $\boldsymbol{r} = 0$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(2) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(3) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{q}$ のとき連立 1 次方程式の解を答えなさい．

(4) 点 (x, y, z) の存在する領域が空間内のどのような図形で表されるか推量し，次の 5 つの中から選択しなさい．

ア．3 つの点　　イ．直線　　ウ．円　　エ．双曲線　　オ．平面

(5) 点 (x, y, z) の存在する領域が表す図形を定める方程式を求めなさい，

(6) この図形を描きなさい．

(新潟大 2015)　　(m20152004)

0.266 $xyz-$ 空間において，3 点 $P_1(a_1,\ b_1,\ c_1)$，$P_2(a_2,\ b_2,\ c_2)$，$P_3(a_3,\ b_3,\ c_3)$ は，同一直線上にないとする．多項式 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}$$

によって定める．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y, z)$ の定数項を求めよ．

(2) $i = 1, 2, 3$ に対して，$f(a_i,\ b_i,\ c_i) = 0$ が成り立つことを説明せよ．

(3) $f(x, y, z) = 0$ は，3 点 $P_!$，P_2，P_3 を通る平面の方程式であることを示せ．

(新潟大 2015)　　(m20152021)

0.267 X-Y 座標平面上に点 $A(x_1,\ y_1)$ がある．原点を中心として点 $A(x_1,\ y_1)$ を 45° 回転した時の座標点 $B(x_2,\ y_2)$ を求めよ．また点 $A(x_1,\ y_1)$ を，点 $P(1, 2)$ を中心として 60° 回転した時の座標点 $C(x_3,\ y_3)$ も求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172003)

0.268 平面 $2x+4y-z=3$ について，点 $(2,5,0)$ と対称な点の座標を求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172011)

0.269 座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 0)$, $B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $C(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ $\overline{AC}$ と線分 BC の長さ $\overline{BC}$ の和 $\overline{AC}+\overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172015)

0.270 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+2xy+y^4-\dfrac{2}{3}y^3+1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) 平面 $z=2x+2y+b$ が曲面 $z=f(x,y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172021)

0.271 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ の平面 L を次のように定める．

$$L=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-y=0 \right\}$$

線形変換 $f;\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ から平面 L への射影とする．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ について，$f(\boldsymbol{x})$ は平面 L 上にあり，$\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})$ は平面 L に垂直なベクトルとなる．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ を満たす行列 A を求めよ．

(3) f の像空間 $\mathrm{Im}(f)=\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(4) f の核空間 $\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x})=0\}$ の基底を一組求めよ．

(新潟大 2019)　　(m20192017)

0.272 2 つの行列 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ と逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 2 つの行列の積 AB を求めよ．

(3) 4 つの行列 A, B, A^{-1} および AB は，いずれも二次元 XY 座標平面上における任意の点 $P(x,y)$ をそれぞれ異なる $P'(x',y')$ に移動させる．A, B, A^{-1} および AB が，それぞれどのように点 P を点 P' に移動させるか，幾何学的意味を述べよ．

(新潟大 2020)　　(m20202007)

0.273 $0\leq x\leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1+\sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする．

(新潟大 2022)　　(m20222008)

0.274 球 ： $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に接する平面のうちで，点 $A(0,0,3)$ を通るものについて次の問に答えよ．

(1) このような平面で y 軸と平行なものの方程式を求めよ．

(2) このような平面のうちで x 軸 , y 軸のいずれとも交わるものを考える．それぞれの交点を P , Q とするとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(長岡技科大 1992） (m19922106)

0.275 以下の問いに答えよ．

(1) 平面上のベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ について，$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ が成り立つとき，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ のなす角，$\overrightarrow{c}$ と $\overrightarrow{a}$ のなす角を求めよ．

(2) 一直線上にない 3 つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある．A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| + |\overrightarrow{CP}|$ とおくとき，次の式を証明せよ．

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{BP}|} + \frac{\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする．このとき前問 (1)(2) を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ．

(長岡技科大 1994) (m19942105)

0.276 空間の点 (x, y, z) の平面 $z = \sqrt{3}x$ に関する対称点を (x', y', z') とする．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(長岡技科大 1994) (m19942107)

0.277 $a > 0$ とする．

(1) 平面において，x 軸からの距離と点 $(0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲線の方程式を求めよ．

(2) 空間において，xy 平面からの距離と点 $(0, 0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲面 S_1 の方程式を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x + y + z = 0$ からの距離と点 $(1, 1, 1)$ からの距離が等しいような点からなる曲面を S_2 とする．S_2 と平面 $x + y + z = 3$ とで囲まれる部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972105)

0.278 (1) xy 平面における領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x + y \leqq 1 , 0 \leqq x - y \leqq 1\}$ を図示せよ．

(2) (1) の D に対して重積分 $\displaystyle\iint_D (x - y)\, e^{x+y}\, dxdy$ を求めよ．

(長岡技科大 1998) (m19982104)

0.279 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $y > 0,\ z > 0$ の部分を M とし，$A(1, 0, 0),\ B(-1, 0, 0)$ とする．M 上の点 $P(x, y, z)$ から xy 平面に下ろした垂線の足を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABQ の面積 S を $x,\ y$ で表せ．

(2) 三角錐 $PABQ$ の体積 V を $x,\ y$ で表せ．

(3) P が M 上を動くとき，V の最大値を求めよ．

(長岡技科大 1999) (m19992101)

0.280 xy 平面で, 2 曲線 $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$ で囲まれる部分を S とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) S の概形を描き, その面積を求めよ.

(2) S を y 軸の回りに回転させてできる回転体を V とする. V の体積を求めよ.

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, V の $t \leqq y \leqq t+1$ にある部分の体積の最大値を求めよ.

（長岡技科大 2004） (m20042101)

0.281 xyz 空間において, 平面 $H: x+y+z=0$ に関する対称移動を表す行列を A とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) $s+t+u=0$ を満たす s,t,u について, $A\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ を求めよ. また, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 等式 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s+t+u=0$ が成り立っているとき, k,s,t,u を x,y,z で表せ.

(3) 任意の x,y,z に対して, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を求めよ.

(4) A を求めよ. （長岡技科大 2004） (m20042103)

0.282 (1) $(1+i)^{16}$ を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

(2) a を実数とする. xy 平面の 3 直線 : $ax+3y+1=0$, $2ax-y+2=0$, $2x+ay+3=0$ が 1 点で交わっているとき, a の値を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052101)

0.283 xyz 空間において, 球面 S : $x^2+y^2+z^2=1$ と点 $A(3,0,0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x=c$ と球面 S とが交わるような実数 c の範囲を求めよ.

(2) c が前問の範囲を動くとき, 平面 $x=c$ と S との交わりの円を底面とし A を頂点とする円すいの体積を最大とする c の値を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052103)

0.284 xyz 空間に 4 点 $O(0,0,0)$, $A(1,-2,-1)$, $B(-2,-5,0)$, $C(2,1,0)$ をとる．以下の問に答えよ.

(1) 直線 AB と yz 平面との交点を求めなさい.

(2) 3 点 A,B,C を通る平面と x 軸との交点を求めなさい.

(3) 三角形 OBC の面積を求めなさい.

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい.

(長岡技科大 2006) (m20062102)

0.285 座標平面に 2 点 $A(3,0)$, $B(0,4)$ をとる． 点 P が円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値と最小値を求めなさい.

(長岡技研大 2007) (m20072103)

0.286 $z=x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2) 空間の曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい.

(3) 前問の接平面が点 $(0, 0, -\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008) (m20082102)

0.287 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい.

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき, a の値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092102)

0.288 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めなさい.

(2) xy 平面で, $t \leqq x^2 + y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする. D_t の概形をかき, その面積を求めなさい.

(3) t が正の実数の範囲を動くとき, 2 重積分 $V(t) = \displaystyle\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2009) (m20092103)

0.289 xy 平面上において, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x+1$, $x \leqq y \leqq x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_E (x+y)^2\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2010) (m20102103)

0.290 xy 平面において, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2012) (m20122102)

0.291 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える. $\mathrm{A}(r, 0)$ とし, 円周上に点 B を $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ になるようにとる. 下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014) (m20142104)

0.292 xy 平面において, 原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする. x 軸上に点 $T(t, 0)$, $0 < t < 1$ をとる. 点 T を通る直線 ℓ と円 C との交点を A, B とする. ただし, 直線 ℓ は点 O を通らないとする. $\triangle OAB$ の面積を S とするとき, 下の問いに答えなさい.

(1) 直線 ℓ と点 O の距離を h とするとき, h の取りうる値の範囲を t で表しなさい.

(2) 前問の h を用いて S を表しなさい.

(3) S の最大値 $f(t)$ を t で表しなさい.

(長岡技科大 2016)　　(m20162102)

0.293　xy 平面において，連立不等式 $\sqrt{y} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とする．下の問いに答えなさい．

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq f(x)$ で表される領域が D であるような $f(x)$ を求めなさい．

(3) 積分順序の変更をして，重積分 $V = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3}\,dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2016)　　(m20162104)

0.294　xyz 空間における曲線 $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ について下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $z = x^2 + y^2$ 上の点 $(a, b, a^2 + b^2)$ における接平面の方程式を求めなさい． ただし，曲面 $x = f(x,y)$ 上の点 $(a, b, f(a,b))$ における接平面の方程式は，f_x，f_y を f の偏導関数とすると，

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる，

(2) 前問の接平面が点 $(0,0,-1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 $z = x^2 + y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172104)

0.295　a, h を正の定数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = h - a(x^2+y^2)$ とする．$f(x,y) \geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし，その面積を S とする．また，xyz 空間で，曲面 $z = f(x,y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする．下の問いに答えなさい．

(1) D を xy 平面上に図示しなさい．また，S を a と h で表しなさい．

(2) $V = \dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい．

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

0.296　xy 平面において，領域 S, T を

$$S \ :\ x^2 + y^2 \leqq 1$$

$$T \ :\ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)dxdy$ を求めなさい．

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2020)　　(m20202103)

0.297　xy 平面において，D を不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1$$

で表される領域とする．下の問いに答えなさい．

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ を求めなさい．

(2) $s=x+y,\ t=x-y$ とおくとき，行列式 $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ を求めなさい．

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy$ を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212103)

0.298 平面上の直線 $y=2x$ を ℓ とする．任意の点 P に対して，P を通る傾き 1 の直線と ℓ との交点を P' とする．下の問いに答えなさい．

(1) $P(3,\,2)$ に対する P' の座標を求めなさい．

(2) $P(X,\,Y)$ に対する P' の座標を X と Y を用いて表しなさい．

(3) P を P' に移す一次変換を表す行列 A を求めなさい．

(4) 前問 (3) の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222101)

0.299 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y=x^3$ 上の点 $P(t,t^3)$ から，$y=x$ へ下ろした垂線の足を Q とする．点 Q の座標を，t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする．$t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を，(2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする． $y=x$ と $y=x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を，$y=x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を，s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122207)

0.300 xy平面上の関数

$$f(x,y)=x^3y^2-y^3-x^4$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x,\ f_y$ の値が共に 0 となる点をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた点での $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2$ の値を求めよ.

(3) f は極値をとらないことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142207)

0.301 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1 \leqq x+y \leqq 5,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$ とおく．次の問いに答えよ.

(1) 変数変換 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}v \\ y=\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{2}v \end{cases}$ のヤコビ行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ.

(2) (1) の変数変換で，領域 D に対応する uv 平面の領域を E とする．領域 E を図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162208)

0.302 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A,B,C，3 点 A,B,C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする．

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.303 $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1\cdots(*)$ を次の手順で，(x,y) 平面に図示せよ．

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x\quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ．

(2) A の固有値 $(\lambda_1<\lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），

$v_2=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a>0,\ c>0$ と選ぶ．

(3) 行列 $P=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x,y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X,Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X,Y) 平面上で図示せよ．

(5) $(*)$ を (x,y) 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.304 関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 a,b,c を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x,y)dxdy,\quad D=\{(x,y)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.305 (1) $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB，BC，CA 上にそれぞれ点 P，Q，R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P，Q，R は A，B，C のいずれとも異なるとする．$Q(t,0)$，$\angle CQR=\theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D=\left\{(t,\ \theta)\in\boldsymbol{R}^2\ \middle|\,-1<t<1,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t}=\dfrac{\partial S}{\partial\theta}=0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ．

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.306 次の問いに答えよ．

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; A(x-\alpha)^2 + By^2 \leqq 1\right\}$$

で表される図形の面積を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1\right\}$$

と平面 $H = \left\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x+z=1\right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ．

(金沢大 2021)　　(m20212210)

0.307 虚数単位 i の平方根を複素平面上に図示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212211)

0.308 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a, b$ は正の定数）によって描かれる $x-y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.309 $x = a\cos\theta$, $y = b(1+\sin\theta)$ $(\pi \leq \theta \leq 2\pi$, a, b は正の定数) によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ．

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2$ $(c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.310 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042306)

0.311 関数 $f(x,y) = 2xy - x^2 - y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1,2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005) (m20052303)

0.312 以下の問に答えよ.

(1) 変数変換

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (r \geq 0)$$

により, $(x, y) = (2, 2)$ に対応付けられる (r, θ) 平面の点の座標を求めよ. また, この変数変換のヤコビ行列式を求めよ.

(2) xy 平面の領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

と定める. 定積分

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

を求めよ.

(富山大 2005) (m20052305)

0.313 図のように直交座標軸と点 A, B, C で交わる平面 S がある. 各点の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a} = a\vec{i}$, $\vec{b} = b\vec{j}$, $\vec{c} = c\vec{k}$ として以下の問いに答えよ. ただし, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は各軸の単位ベクトルである. また, $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}$ は平面 S に垂直である.

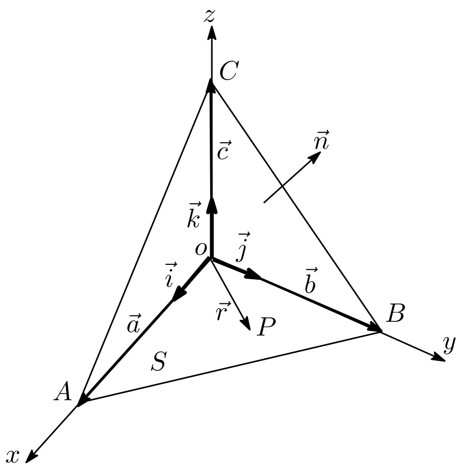
(1) 平面 S 上の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると, 平面 S の方程式は

$$\vec{r} \cdot (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

となることを示せ.

(2) 平面 S の方程式を x, y, z, a, b, c を用いて表せ.

(3) $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ のとき, 原点 O から平面 S までの最短距離 d を求めよ.



(富山大 2007) (m20072304)

0.314 関数 $f(x, y, z) = \exp\{-(x^2 + 2y^2 + z^2)\}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $f = c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f = \dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f = c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(= \nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.315 空間に位置ベクトル $\overrightarrow{a}$ が示す点 A と位置ベクトル $\overrightarrow{b}$ が示す点 B がある．

(1) 点 A を通る直線 ℓ のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表せ．ただし，直線 ℓ の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とする．

(2) 直線 ℓ のうち，$\overrightarrow{b}$ に平行な直線のベクトル方程式を媒介変数を用いずに表せ．

(3) 点 B を通る平面 S のベクトル方程式を求めよ．ただし，平面 S の単位法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とする．

(4) 点 A から平面 S までの最短距離を媒介変数を用いずに表せ．

(富山大 2013)　　(m20132303)

0.316 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)\ \in \mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．$f_1,\ f_2\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし，$f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2) = (f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))$ $\big((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\big)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ．

(富山大 2014)　　(m20142309)

0.317 x, y を実数とする．座標平面上の点 (x, y) に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 2 \\ y & 1 & y \\ 2 & y & x \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 直交行列 $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，${}^tPAP$ を求めよ．

(2) A の相異なる固有値の個数が 2 であるような点 (x, y) の集合を図示せよ．

(富山大 2015)　　(m20152303)

0.318 xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$，$B(3,\ 1)$，$C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと．

(1) 頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ．

(2) 点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ．

(3) (2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ．

(4) 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152308)

0.319　次の各問いに答えよ．ただし，計算の概略も示すこと．

(1)　次の微分方程式が，一般解 $y = A\sin(nx+\alpha)$ をもつとき，$p(x)$ と $q(x)$ を求めよ．ただし，A, α は任意定数，$n \neq 0$ とする．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

(2)　xy 平面上の点 (a, b) を中心とする直径 $R(>0)$ の円が満たす微分方程式を求めよ．ただし，微分方程式に a, b および R を含んではならない．

(3)　次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$x^{-1}\frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

(富山大 2017)　　(m20172306)

0.320　θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.321　次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021)　　(m20212304)

0.322　$(0, -2, 0)$ を中心とする球上の点 $(1, -3, \sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が 3 つの座標軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.323　以下に二つの線型変換がある．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

(1)　これらの行列による変換は平面上でどのような幾何学的意味を持つか説明せよ．

(2)　A, B による合成変換の行列を求めよ．

(3)　(2) で求めた合成変換の行列の逆変換行列を求めよ．

(4)　(2) で求めた合成変換によって，直線 $y = 3x + 2$ はどのような図形に変換されるか．

(福井大 2001)　　(m20012418)

0.324　底面の半径 1，高さ 1 である直円柱がある．この底面の半径を含み，底面と $45°$ をなす平面で直円柱を 2 分するとき，小さいほうの体積を求めなさい．

(福井大 2003)　　(m20032408)

0.325　$y = \dfrac{1}{5}x^5 - x^4 + x^3 + 2$ のグラフの概形を, xy 直交座標平面上に図示しなさい. また, 極値を求めなさい.

（福井大 2004）　　(m20042404)

0.326 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=k$ (一定, $k\neq 0$) のとき, xyz 直交座標系上の平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ が, 一つの定点を通ることを証明し, その定点を求めなさい. ただし, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ とする.

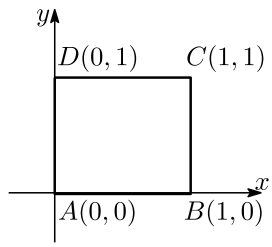
(福井大 2004)　　(m20042415)

0.327 xy 平面上における同一平面上への一次変換が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられている. xy 平面上の図形 $ABCD$ が,

どのような図形に変換されるか図示しなさい.



(福井大 2004)　　(m20042418)

0.328 表に示すように, xy 直交座標平面上に

(x_i, y_i) $(i=1,2,3,4,5)$ で表される 5 個の点がある.

$$\sum_{i=1}^{5}\{y_i-(ax_i+b)\}^2$$

を最小にする条件で, a と b を求め,

5 個の点に対する近似直線を求めなさい.

i	x_i	y_i
1	2	3
2	3	4
3	6	5
4	9	5
5	10	8

(福井大 2004)　　(m20042421)

0.329 次の行列 $\boldsymbol{B}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ がある．行列 $\boldsymbol{B}$ で定まる一次変換で，平面の図形　$2{x_1}^2+{y_1}^2=4$　が異なる図形にうつされる．

(1)　変換後の図形の式を求めなさい．　　(2)　変換後の図形を描きなさい．

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

(福井大 2006)　　(m20062406)

0.330 以下の問に答えよ．なお，i は虚数単位である．

(1)　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式（$\cos\theta+i\sin\theta$ の形式）で表せ．

(2)　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の 3 乗根を複素平面上に図示せよ．

(福井大 2006)　　(m20062411)

0.331 3 次元の列ベクトルのつくる線形空間（R^3）において,

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をベクトルとする．以下の問いに答えよ.

(1)　ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は一次従属であるか一次独立であるかを示せ.

(2)　もし一次従属であるなら，ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は，直線上にあるか，あるいは平面上にあるかを示せ.

(3)　もし一次独立であるなら，ベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を正規直交化せよ．ただし，正規直交化とは $\vec{p}$ は $\vec{a}$ の一次結合，$\vec{q}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一次結合，$\vec{r}$ は $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ の一次結合であるような正規直交系 $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ をいう.

(福井大 2007)　　(m20072412)

0.332 2 次元平面で，整数 d を含む次の二次正方行列でベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ を一次変換するとベクトル $\boldsymbol{y}$ に移る．

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} d & 3/5 \\ 5 & 2d \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ がある直線を表すベクトルのとき，そのすべての点について，一次変換で位置が変わらなかったとする．整数 d とその直線の式を求めよ．

(福井大 2013)　　(m20132413)

0.333 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$ からなる正方形がある．関数 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ．

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.334 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = f_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = f_{xy}(x, y), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ について，$z = f(x, y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\bigl(x_0,\ y_0,\ f(x_0, y_0)\bigr)$ における接平面の方程式は

$$z - f(x_0, y_0) = \bigl(f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0)\bigr) \bullet (x - x_0,\ y - y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\bigl(1,\ 2,\ f(1, 2)\bigr)$ における接平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\bigl(1,\ 2,\ f(1, 2)\bigr)$ での曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式となるような a, b, c, d を求めよ．

(3) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

を満たす (x, y) の組を，$f(x, y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x, y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x, y)$ を

$$\phi(x, y) = \bigl\{f_{xy}(x, y)\bigr\}^2 - f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1, y_1) に対して，

- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ　$f_{xx}(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極小
- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ　$f_{xx}(x_1, y_1) < 0$ ならば (x_1, y_1) は極大
- $\phi(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

0.335 xy 平面上の座標 (m,n) (m と n は整数) に，サイコロの目に従って右方向と上方向へ移動する点 P が存在する (図 1 参照)．この点 P は，サイコロを振って出た目が整数 D 以下の場合には右方向へ 1 移動して座標が $(m+1,n)$ となる．一方，出た目が D より大きい場合には，上方向へ 1 移動して座標が $(m,n+1)$ となる．

また，点 P から x 軸におろした垂線と x 軸との交点を点 Q，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を点 R とし，座標 $(0,0)$ を原点 O とする．

サイコロの各目が出る確率を $\dfrac{1}{6}$ とするとき，以下の (1)〜(3) に答えよ．

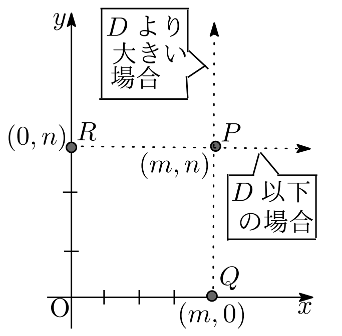


図 1 : xy 平面上の点 P

(1) $D=4$ の場合を考える．すなわち，サイコロを振って 1 から 4 の目が出たら点 P が右方向に 1 移動し，5 か 6 の目が出たら上方向に 1 移動する．いま，原点 O に位置する点 P がサイコロを 2 回振ったときに座標 $(2,0)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 4 以下の目が出た回数，4 より大きい目が出た回数をそれぞれ示せ．

(b) サイコロを 2 回振ったときに，点 P が座標 $(2,0)$ に位置する確率を求めよ．

(2) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを 3 回振ったときに座標 $(2,1)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 例えば，1 回目に D 以下の目（右へ移動），2 回目に D 以下の目（右へ移動），3 回目に D より大きい目 (上へ移動）が出ると，点 P は座標 $(2,1)$ へ移動する．このように，原点 O から $(2,1)$ へ点 P が移動する経路の総数を答えよ．

(b) サイコロを 3 回振ったときに; 点 P が座標 $(2,1)$ に位置する確率を D を使って表せ．

(3) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを L 回振ったときに座標 (s,t) (s と t は整数) へ移動したとする．このとき，

(a) 座標 (s,t) の y 座標 t を L と s を使って表せ．

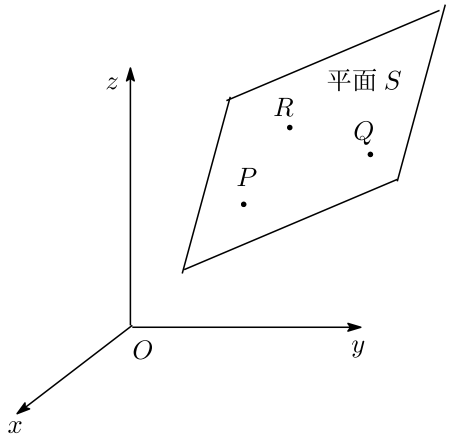
(b) サイコロを L 回振ったときに，点 P が座標 (s,t) に位置する確率を D,L,s を使って表せ．

(c) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積を s と L を使って表せ．さらに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる点 P の座標が 1 つだけ存在することを示し，面積が最大になるときの点 P の座標と面積を求めよ．

(d) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる座標に点 P が位置する確率を D と L を使って表せ．

(福井大 2018)　　(m20182423)

0.336 xyz 空間に平面 S がある．平面 S 上には 3 点 P,Q,R がある．点 P の座標は $(1,1,1)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(0,3,1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-1,1,2)$ である．このとき，平面 S の方程式を求めよ．ただし，平面 S の方程式を表すために用いてよい変数は x,y,z のみととする（解答の過程でこれら以外の変数を用いた場合でも，最終的な答えは x,y,z のみを用いて表すこと）．考え方と計算過程を明記すること．



(福井大 2020)　　(m20202418)

0.337 実数 x と y に対する連立方程式 $2x-3y=0,\ ax+6y=0$ について，以下の問いに答えよ．，

(1) この連立方程式を 2×2 行列 A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて $A\boldsymbol{u}=0$ の形に表せ．また，その結果を使い，連立方程式が $x=y=0$ 以外の解を持つように実数 a の値を定めよ（逆行列 A^{-1} が存在すればどのような解が得られるか考えるとよい）．

(2) 上で求めた a の値を a_0 とする．$2x-3y=0$ と $ax+6y=0$ の図形的意味（それらが xy 平面上で表す図形はどのようなものか）に基づき，$a=a_0$ のときに連立方程式が $x=y=0$ 以外の解を持つ理由を説明せよ．

(福井大 2021)　　(m20212417)

0.338 (1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2+4z+1}dz$ を求めよ．ここで，C は複素数平面の原点を中心とする半径 1 の円周を正の向きに 1 周する積分路とする．

(2) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$ を (1) を利用して求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042507)

0.339 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{(z-i)^3}\,dz$ の値を求めよ. ここで i は虚数単位, C は複素平面上の原点を中心とする半径 2 の円周で向きは反時計回りとする.

(静岡大 2005)　　(m20052505)

0.340 (x,y) 平面上の任意の点 A における法線へ原点から下ろした垂線の長さが，点 A の y 座標に等しい曲線は $x^2+y^2=cx$ (c は定数) となることを示せ．

(静岡大 2006)　　(m20062509)

0.341 空間内の 3 点 $P_1(1,-2,1),\ P_2(-2,3,5),\ P_3(2,-5,-7)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_3 を通りベクトル $\overrightarrow{P_1P_2}$ に平行な直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 点 P_1 を通り直線 ℓ と直交する平面 M の方程式を求めよ．

(3) 直線 ℓ と平面 M の交点の座標を求めよ．

(静岡大 2007)　　(m20072507)

0.342 平面 π ： $ax+2y-z=6$ と直線 l ： $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+2}{7}$ について以下の問いに答えよ．

(1) π と l が平行となるように a の値を定めよ．

(2) 平面 π 内にあって直線 l と平行で l に最も近い直線 m の式を求めよ．

(3) 2 直線 l, m の距離を求めよ.

(静岡大 2008) (m20082504)

0.343 4 点 $A(1,2,3),\ B(-2,1,3),\ C(-1,-2,1),\ D(2,1,-3)$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) 3 点 A, B, C を含む平面 α の式を求めよ.

(2) 点 D を通り, 平面 α に垂直な直線の式を求めよ.

(3) $AB,\ AC,\ AD$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(静岡大 2009) (m20092501)

0.344 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を $x = 1$ を中心にテイラー展開せよ.

(2) 複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3}+2i),\ B(2\sqrt{3}+3i)$ をとる. 以下の問いに答えよ.

(a) 点 C を三角形 ABC が正三角形となるように定める. 点 C を表す複素数を求めよ.

(b) 点 D は直線 AC に関して B と線対称となる点である. 点 D を表す複素数を求めよ.

(静岡大 2009) (m20092505)

0.345 原点を通り, 直線 $\ell_1\ :\ \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+5}{1}$ と直交する直線を ℓ_2 とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 直線 ℓ_2 の方程式を求めよ.

(2) 2 直線 ℓ_1 , ℓ_2 を含む平面の方程式を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102503)

0.346 xyz 空間内に 4 点 $A(1,0,2),\ B(-1,1,1),\ C(0,2,6),\ D(4,2,-1)$ が与えられている. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 3 点 $A,\ B,\ C$ を通る平面 π の方程式を求めよ.

(2) 平面 π と点 D の距離を求めよ.

(3) 点 D から平面 π に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

(静岡大 2011) (m20112503)

0.347 3 つの複素数を $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i,\ \beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i,\ \gamma = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とする. ここで, i は虚数単位をあらわす. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素平面上に図示せよ.

(2) α^{2011} を $x + yi$ $(x, y$ は実数$)$ という形にあらわせ.

(3) $\alpha^m = \beta,\ \alpha^n = \gamma$ をみたす整数 m, n があれば求めよ.

(4) 複素平面上で $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を結んでできる三角形の内角をそれぞれ a, b, c とするとき,

$$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)(\cos c + i\sin c)$$

を求めよ.

(静岡大 2012) (m20122507)

0.348 空間内に 4 点 $A(1,1,1),\ B(2,3,2),\ C(-2,0,3),\ D(0,2,5)$ をとる. 3 点 A, B, C を含む平面を π とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 平面 π の方程式を求めよ.

(2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ.

(3) 点 D と平面 π との距離を求めよ.

(4) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.

(静岡大 2013)　　(m20132501)

0.349　二つの平面 $x+y+z=1$ と $x+3y-z=1$ との交線を表す方程式を求めよ.

(岐阜大 2001)　　(m20012609)

0.350　座標平面の点 $(3,4)$ を通り，直線 $2x+y-3=0$ と角度 $45°$ で交わる直線の方程式を求めよ.

(岐阜大 2003)　　(m20032606)

0.351　xyz 空間における平面 $\pi:x+2y+3z-5=0$ および直線 $g:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{2}$ について，次の問に答えよ.

(1) 平面 π の単位法線ベクトルを求めよ.

(2) 直線 g の単位方向ベクトルを求めよ.

(3) 平面 π と直線 g の交点の座標を求めよ.

（岐阜大 2004）　　(m20042605)

0.352　放物面 $z=1-x^2-y^2$ と平面 $z=0$ で囲まれる体積を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052603)

0.353　曲線 S が $3x^2+2y^2+z^2=20$ で与えられたとき, S 上の点 $P(1,2,3)$ における S の接平面を求めよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052605)

0.354　次の重積分を計算せよ．ただし，D は xy 平面上，原点中心で半径 1 の円板とする.

$$\iint_D |\,x+y\,|dxdy$$

(岐阜大 2007)　　(m20072604)

0.355　次の 3 点 $A(1,1,2)$, $B(-3,2,1)$, $C(1,-1,-3)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072606)

0.356　実平面上の x-y で表される直交座標系がある． その上で定義される関数 $f=3x^2+3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ とする． $OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\,dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\,dS}$$

は，いくらになるか計算せよ．なお式中の dS は面要素である.

(岐阜大 2009)　　(m20092601)

0.357　2 平面 $x+2y-3z=-1$, $3x-y-2z=4$ のなす角を求めよ.

(岐阜大 2009)　　(m20092608)

0.358 xy 平面に直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて三角形を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，直線の方程式は ① $x-y+1=0$，② $2x+y-4=0$，③ $x+3y+3=0$ とする．

(1) 直線の方程式 ①, ②, ③ の傾きと y 軸の切片を求めよ．

(2) 直線の方程式 ①, ②, ③ を用いて xy 平面に三角形を図示せよ．

(3) 問 (2) で図示した方程式 ① と ② の交点を A，③ と ① の交点を B，② と ③ の交点を C とし，交点 A,B,C の座標を求めよ．

(4) 交点 A,B,C で囲まれた三角形（$\triangle ABC$）の面積を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092615)

0.359 (1) $f(x)=\dfrac{1}{e^x-4}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) x-y 平面において，$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，　$(a>0,\ 0\leq t\leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092619)

0.360 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $B=A^2-4A-4E$ とするとき, 行列の積 BA が零行列になることを示せ. ただし, E は 3 次の単位行列とする.

(3) xyz 空間の点 $P=(x,y,z)$ から, XYZ 空間の点 $Q=(X,Y,Z)$ への一次変換 T を行列 A を用いて次のように定める.

$$T\ :\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

xyz 空間上の任意の点 P は, 変換 T によって XYZ 空間内の同一の平面 H 上の点 Q にうつる. その平面 H の方程式を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102603)

0.361 $a,b>0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x=a\cos^4 t.\ y=b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y=y(x)$ と表し，$y'(x)=\dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a-0}y'(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0+0}y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.362 xyz 空間 $(\mathbb{R}^3)$ の線形変換 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を表す行列を $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする．すなわち，A は $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を満たす行列である．次の問に答えよ．

(1) 線形変換 f がベクトルの大きさを変えないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ．

(2) 線形変換 f が x 軸上の点を動かさないとき，行列 A の満たすべき条件を求めよ．

(3) (1) と (2) の条件を満たし，平面 $x+y+z=0$ 上の点を平面 $5x-y+7z=0$ 上に移す線形変換 f を表す行列 A を求めよ

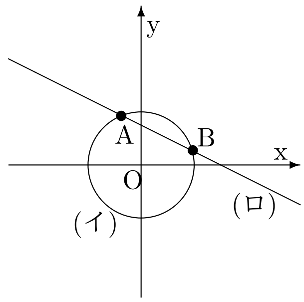
(岐阜大 2016)　　(m20162603)

0.363　以下の問に答えよ．

(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，円と直線の交点をそれぞれ A，B とする．

$x^2+y^2=5$ $\cdots$ （イ）

$x+2y=3$ $\cdots$ （ロ）



(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 線分 AB の長さを求めよ．

(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている．

$x^2+y^2+z^2=4$ $\cdots$ （ハ）

$x+2y+3z=7$ $\cdots$ （ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ．

(豊橋技科大 1998）　　(m19982710)

0.364　平面上で直線 $y=3x+2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

0.365　平面上の点 $A(1,2)$ を，点 $B(3,4)$ を中心として時計回りに 90 度回転させた．回転後の点 A の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999）　　(m19992706)

0.366　列ベクトル $\mathcal{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が平面上の点の座標 (x,y) に対応するとき，次の行列 A を用いて $A\mathcal{X}$ で表される 1 次変換について，以下の問に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 平面上の点 $(1,2)$ はどんな点に移るか．

(2) 平面上の直線 $x+4y-1=0$ はどのような直線に移るか．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032708)

0.367　空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$C(0,0,2)$ がある. 以下の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ を成分で表し, それぞれの大きさを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(3) 3 点を通る平面を α とするとき, 原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042706)

0.368　(1) 球面 S : $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$ の中心 P の座標と半径を求めよ.

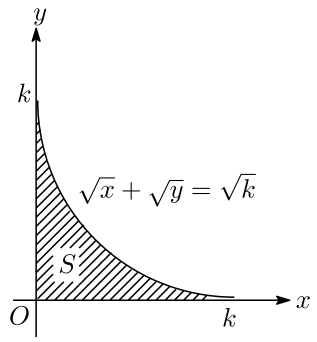
(2) 直線 : $x = 2y - 2 = -z + 1$ と直交し，点 $(a, 0, 0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ．

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ．

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072704)

0.369 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ $\ (k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け．



(2) 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ と z 軸に垂直な平面 $z = t$ $\ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z = t$ $\ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1 - \sqrt{t})^4$ と表されることを示せ．

(4) 立体 V の体積を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　　(m20142701)

0.370 $x - y$ 平面上の 2 つの曲線 $y = f(x) = a - \cos 2x$ と $y = g(x) = 2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x) = g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ．

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152701)

0.371 xy 平面上の曲線 $y = \cos(x - \pi) + 1$ $\ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = 0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.372 xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x$ $\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x$ $\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ.

(3) 領域 R の面積 S を求めよ. .

(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ.

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2018) (m20182704)

0.373 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $(1,2,9)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0$ をみたしており,

さらに $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$ とする. $t = 0$ のとき,

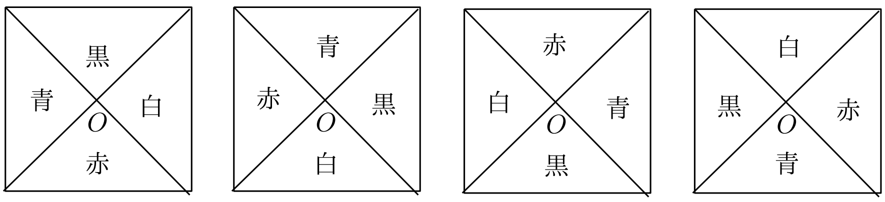
単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ.

(豊橋技科大 2019) (m20192701)

0.374 (1) ある平面上に正方形があり, その対角線の交点を O とする. 対角線によりこの正方形を 4 等分してできる 4 つの直角二等辺三角形を塗装する. 辺を共有する隣り合う三角形が異なる色となるように塗装することを考える. ただし, この平面上で点 O を中心に, この正方形を回転させると一致する塗装の仕方は同じものと考える. たとえば, 下図で示されている 4 つの塗装は同一の塗装の仕方である.

ア. 黒, 白, 赤, 青, 黄の 5 色から 2 色を選択し, 塗装する方法は何通りかを求めよ.

イ. 黒, 白, 赤, 青, 黄の 5 色から 3 色を選択し, その 3 色全てを使用して塗装する方法は何通りかを求めよ.



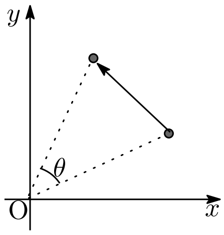
(2) 2 つのサイコロを同時に投げ, 出た目の和が奇数とんる事象を事象 A, 1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を事象 B とするとき, 確率 $P(A \cap B)$ を求めよ.

(3) 白玉 3 個, 赤玉 4 個が入った袋の中から玉を 1 つずつ取り出し, 取り出した順に左から右へ一列に並べる. ただし, 一度取り出した玉は袋に戻さないものとする. 7 個全ての玉を順に取り出し並べるとき, 白玉が隣り合わない様な並び方となる確率を求めよ.

(豊橋技科大 2019) (m20192702)

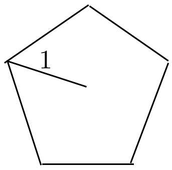
0.375 xy 平面上において, 原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される. この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに, 図形の面積の値を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) $A_\theta{}^2$, $A_\theta{}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．

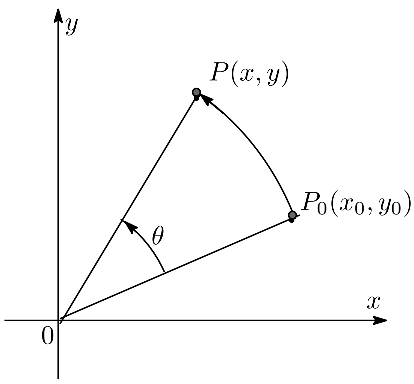


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.376 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.377 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する A の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 α を考え，その上の任意の点 P を (x, y, z) とする．この α がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 α を表す式を，x, y, z を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 α 上の任意の点 Q を f によって移動した点 Q' も平面 α 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

0.378 (1) $x = 0$ のとき $y = 4$ を満たす微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3}{16}y^2$ の解を求めよ．

(2) xy 平面上で，アで得られた解が表す曲線と，$x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ の 3 つの直線で囲まれる領域に含まれる点 (x, y) のうち，x, y が共に自然数となる点の数を求めよ．ただし，境界上の点は含まないものとする．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222705)

0.379 xyz 空間において，同一直線上にない 3 点 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，(x_3, y_3, z_3) を通る平面の方程式を求めよ．

(名古屋大 1999)　　(m19992802)

0.380 3 次元空間内において，平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_X，$\boldsymbol{a}$ と平行な単位ベクトルを e_Y，e_X と e_Y のいずれにも垂直な単位ベクトルを e_Z とし，e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする新たな直交座標系を考える．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて e_X，e_Y，e_Z を表せ．ただし，e_X，e_Y，e_Z はこの順に右手系をなすものとする．

(2) 設問 (1) で求めた e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする直交座標系における $\boldsymbol{b}$ の成分 (b_X, b_Y, b_Z) を求めよ．

(3) ある直交座標系において $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1, 1)$ と成分表示されるものとする．この直交座標系の xy 平面上において放物線 $\boldsymbol{p} = (x, y, z) = (t, t^2, 0)$ を考える．ただし，t は実数とする．放物線 $\boldsymbol{p}$ を e_X，e_Y，e_Z を基本ベクトルとする直交座標系の成分で表せ．ただし，これら 2 つの直交座標系の原点は互いに一致するものとする．

(名古屋大 2015)　　(m20152803)

0.381 曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 1998)　　(m19982903)

0.382 (1) 二次元平面上の第一象限において $0 \leq x^2 + y^2 \leq R$ によって定められる部分を A とする．次の A 上での重積分を求めよ．$a > 0$ とする．

$$\iint_A e^{-(ax)^2-(ay)2} dx\, dy$$

ただし，次の変数変換を用いて計算を行うこと．

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

(2) (1) で求めたことを用いて次の積分を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} e^{-(ax)^2} dx$$

(名古屋工業大 1999)　(m19992904)

0.383 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) A の二つの固有値 λ_1 , λ_2 と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を求めよ．

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は， $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける．このことを用いると， $A^n\mathbf{x}$ は， λ_1 , λ_2 $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか． α , β は，実数である．

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$A\mathbf{x}\,,\ A^2\mathbf{x}\,,\ \cdots\,,\ A^n\mathbf{x}\,,\ \cdots$$

なるベクトルの列は，二次元平面上の点列を表すが，この点列の挙動は， $\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる．このことを，(1) と (2) で求めたことを用いて論じよ．

(名古屋工業大 1999)　(m19992907)

0.384 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　(m20012903)

0.385 xyz 空間で円柱 $x^2 + y^2 = 4$，xy 平面，放物面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003)　(m20032904)

0.386 xy 平面の 5 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(0,2)$ を頂点とする 5 角形が作る閉領域を D とする. 重積分

$$\iint_D ydxdy$$

を求めよ.

(名古屋工業大 2004)　(m20042903)

0.387 xyz 空間内の半円柱面 $y^2 + z^2 = 1$, $z \geqq 0$ を 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ によって切ったときに得られる曲面

$$S = \{(x,y,z) \,|\, y^2 + z^2 = 1\,,\ z \geqq 0\,,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$$

に対し, ベクトル場 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ が外向きに（つまり S 上の $z > 0$ なる点では z の正方向に）貫く流束 (flux) を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　(m20052904)

0.388 (1) 次の累次積分 I を計算しなさい.

$$I = \int_0^2 \left\{ \int_0^{\sqrt{3(x^2+5)}} \frac{1}{x^2 + y^2 + 5}\, dy \right\} dx$$

(2) 次の 2 重積分 J を指示に従って計算しなさい.

$$J = \iint_D e^{-(x^2-2xy+4y^2)}\,dxdy\ , \quad D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(a) 変数変換 $s = x - y\ ,\ t = \sqrt{3}y$ により D が st 平面内の集合 K に移されるとき, J を (s,t) 変数の 2 重積分として表しなさい. ただし K を具体的に表示する必要はない.

(b) (a) の集合 K を求めなさい.

(c) さらに st 平面における極座標変換を行って J の値を計算しなさい.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102904)

0.389 4 点 $P(1,3,2),\ Q(1,1,a+2),\ R(4,0,2),\ S(a+1,6,-3)$ が同一平面上にあるとき, a の値を求めよ.

(名古屋工業大 2010)　　(m20102906)

0.390 $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 6x$ とする.

(1) 方程式 $f(x,y) = 0$ の表す平面曲線はどのような図形か答えよ.

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112903)

0.391 (x,y,z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X,Y,Z) 空間の図形の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.392 空間内の直線 $x - 6 = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ を含み，点 $(7,8,10)$ を通る平面の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2015)　　(m20152905)

0.393 平面内で $ax^2 + 2xy + y^2 = 1$ を表す曲線が双曲線となるような実数 a の範囲を求めよ.

(名古屋工業大 2015)　　(m20152908)

0.394 関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - y$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $P\bigl(-1,1,f(-1,1)\bigr)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(名古屋工業大 2017)　　(m20172901)

0.395 xy 平面上で，$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフと y 軸，直線 $y = 1$，直線 $y = 2$ で囲まれる領域を D とする．このとき，次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D (\log y)^2 dxdy$$

(名古屋工業大 2022)　　(m20222904)

0.396 座標空間において 3 つの平面

$$x + 3z = a, \qquad x + (a+1)y - z = -1, \qquad x + 6y - 9z = a - 6$$

の共通部分が直線 l であるとき，定数 a の値および直線 l の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2023)　　(m20232905)

0.397 底面の半径が a，高さが a の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と 30° の傾きをなす平面で直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さいほうの立体の体積を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023111)

0.398 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x$ の極大値，及び，極小値の値と，その点の座標の値を求めよ．次に曲線 $f(x,y)=0$ のグラフの概形を x–y 平面上に描け．また，同じ x–y 平面上に極値も書き込め．

(三重大 2003)　　(m20033106)

0.399 3 点 $P_1(3,-2,-1),P_2(1,3,4),P_3(2,1,-2)$ を通る平面の方程式を求めよ．また，その平面と原点 O との最短距離を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033108)

0.400 (1) 次の行列の行列式を $\mathrm{det}A$ とする．

$$A=\begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで，a,b,c,d,e,f,l,m,n は定数として，方程式 $\mathrm{det}A=0$ が 3 次元空間（xyz 空間）上の平面の式を与えることを示せ．また，この平面の法線ベクトルを求めよ．

(2) この平面に直線 $\dfrac{x-d}{l}=\dfrac{y-e}{m}=\dfrac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ．

(三重大 2003)　　(m20033112)

0.401 以下の式で表される，二つの 3 次関数について， (1)〜(3) のすべてに答えよ．

$$y=-2x^3+8x^2-6x \qquad ①$$
$$y=x^3-2x^2+ax \qquad ②$$

(1) ①，②で表される 2 本の曲線は，原点 $(0,0)$ で交差する．このほかに，ただ 1 点で両者が接するような， a の値を求めよ．以下の問題で， a はこの値を取るとする．

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする．

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）．

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する．

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する．

また， xy 平面上に， ①, ② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ．

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x,y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

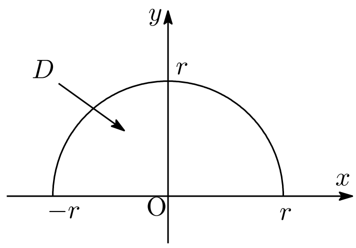
(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ．

（三重大 2004）　　(m20043106)

0.402 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$$\overline{y} = \frac{1}{S}\iint_D y\,dxdy \quad （ただし, S は図形 D の面積）$$

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



（三重大 2004）　　(m20043107)

0.403 (1) 3 次元空間において, 直線

$$l_1 \ : \ \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$$

および点 $P(0,1,2)$ を含む平面の式を求めよ.

(2) l_1 および原点 $O(0,0,0)$ を含む平面の式を求めよ.

(3) この二つの平面が成す角を θ とするとき, $\cos\theta$ の値を求めよ. ただし, $\theta \leq 90$とする　.

（三重大 2005）　　(m20053116)

0.404 平面極座標系 (r,θ) において　$r = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$　　（ただし, ε は 0 または正の整数）と表される曲線がある．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線の式をデカルト直交座標系 (x,y) で表せ.

(2) 定数 ε が以下の値のときの曲線の名称を答えよ.

(a) $\varepsilon = 0$　　(b) $0 < \varepsilon < 1$　　(c) $\varepsilon = 1$　　(d) $\varepsilon > 1$

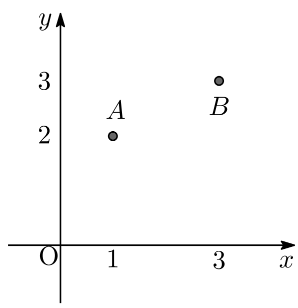
（三重大 2006）　　(m20063102)

0.405 xy 平面上の曲線 $y = f(x) = a\log(x+1)$ が 2 点 $A(1,2)$，$B(3,3)$ のできるかぎり近傍を通るように a の値を定めたい．次の (1)～(3) の問に答えなさい．ただし，a は実数，log は自然対数の演算を表すものとする.

(1) A と点 $(1, f(1))$ との距離の二乗および B と点 $(3, f(3))$ との距離の二乗の合計を $g(a)$ とする時，$g(a)$ を a で表しなさい.

(2) $g(a)$ が最小となるような実数 a の値を求めなさい.

(3) $g(a)$ が最小となる時の $f(x)$ の曲線を右上の図に描き入れなさい.



（三重大 2006）　　(m20063106)

0.406 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1,-3,1)$ と $\boldsymbol{n} = (3,2,-2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 点 $A = (1,4,0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい.

（三重大 2006）　　(m20063110)

0.407 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y) \ : \ x+y<1,\ 0<x\ ,\ 0<y\}$ で定義された関数 $f(x,y) = xy(1-x-y)$ について考える.

(1) D における $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0, y_0) を求めよ.

(2)　D での積分 $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007)　　(m20073118)

0.408　$p(x) = 2xe^{-x^2}$,　$q(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ とする時,　$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \cdot q(t-x)dt$ のグラフの概要を下の xy 平面に描きなさい．グラフの概要には最大値や変曲点を明示すること.

(三重大 2009)　　(m20093102)

0.409　(1)　xy 平面内において, 3 点 $(-2,\ 19)$, $(1,\ -8)$, $(3,\ 4)$ を通る放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ を, 行列を使って求めることを考える. 放物線の式の係数を求める連立一次方程式を書いて, それを行列を使って表現しなさい.

(2)　(1) で求めた行列を用いた式を解き, 放物線の式を求めなさい.

(3)　xy 平面内の点を原点を中心として反時計まわりに 45°回転させる　1 次変換行列を求めなさい.

(4)　(2) で求めた式で表される放物線を, 原点を中心として反時計まわりに 45°回転させて得られる放物線の式を求めなさい.

(三重大 2010)　　(m20103109)

0.410　x, y 平面上に, 中心を点 (a, b) とし, 半径が r の円 A がある. A の外部にある原点 $O(0,0)$ から, A に引いた 2 本の接線の接点を P, Q とするとき, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1)　直線 PQ の方程式を求めよ.

(2)　線分 PQ の中点 M の座標を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103115)

0.411　xy 平面上に, 曲線 $C\ :\ y = x^3 + 3x^2 + x$ と点 $A(1, a)$ がある. A を通って C に 3 本の接線が引けるとき, a の値の範囲を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103116)

0.412　xy 平面上において，$(x, y) = (0, 0)$, $(-2, 0)$ を直径の両端とする円 A，および $(x, y) = (0, 0)$, $(20, 0)$ を直径の両端とする円 B がある．以下の問に答えよ.

(1)　円 A および円 B の両方に接する直線を全て求めよ.

(2)　(1) で求めた直線のうち，y 軸と平行でないもの全てに接する任意の円について，円の半径 r をその円の中心座標を用いて表せ．円の中心座標については，適切な文字変数を与えて用いること.

(三重大 2011)　　(m20113105)

0.413　行列 $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ による一次変換について，以下の問に答えよ.

ここで，一次変換とは下式に示すように，任意の平面上の座標 (x, y) を (x', y') に移す変換をいう.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1)　$a = 1,\ b = k$（k は任意の実数）のとき，xy 平面全体が xy 平面全体に移される条件と，直線に写される条件を示せ．また，直線に移された場合の直線の式を求めよ.

(2)　直線 $2x + y = 0$ が，直線 $6x - 5y = 0$ に移されるとき，a, b の値を求めよ.

(三重大 2011)　　(m20113106)

0.414 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqq\ x,\ 0\leqq\ y,\ x^2+y^2\leqq\ 1\}$ で関数 $f(x,y)=xy(1-x^2-y^2)$ を考える.

(1) 領域 D における関数 $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ.

(2) 領域 D での積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113108)

0.415 xy 平面上の曲線 $r=(1+\cos\theta)$ の概形を描け．またこの曲線の全長を求めよ．ただし r は動径, θ は r が x 軸となす角で $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする. (三重大 2012) (m20123110)

0.416 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & a\end{pmatrix}$ の定める平面の一次変換において，原点を通る不動直線が 1 本のみ存在する場合の a の値を求めよ．ただし，不動直線とは「その像がもとの直線と一致する直線」のことである.

(三重大 2012) (m20123113)

0.417 x,y 平面上についての以下の設問に答えよ.

(1) $|x|+|y|=1$ のグラフを描け.

(2) $|x+y|+|x-y|=1$ のグラフを描け.

(3) 実数 x,y が (2) の等式を満たすとき，$|x|+|y|$ のとり得る値の範囲を求めよ.

(三重大 2012) (m20123114)

0.418 地上から角度 α の方向に初速度 v_0 で投げ上げた物体の t 秒後の位置は，投げ上げた地点を原点にとり，物体の運動する曲線を含む平面上で，地面上に x 軸，鉛直方向に y 軸をとると,

$$x=v_0\cdot t\cdot\cos\alpha$$
$$y=v_0\cdot t\cdot\sin\alpha-\frac{g\cdot t^2}{2}$$

で与えられる．この時の以下の設問に答えよ．ただし，g は重力の加速度である.

(1) この物体は，どのような曲線を描いて運動するか，軌跡の式を示して説明せよ.

(2) この物体が最高点に達した時点と地面に着いた時点について，両者の速度と方向を求め，両者の関係を説明せよ.

(三重大 2012) (m20123115)

0.419 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\angle AOB=\theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ.

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O,A,B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013) (m20133101)

0.420 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w}=(0,0,\omega)$ （ただし，ω は定数）を考える．以下の問に答えよ.

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである.

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_z \, dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.421 xyz 空間に 3 点 $O(0,0,0)$，$A(1,1,2)$，$B(3,4,3)$ がある．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい．

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい．

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.422 関数 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 範囲 $0 \leqq x \leqq a$ (a は 1 未満の正の定数) で $y = f(x)$ の描く曲線を xy 平面上に図示し，$\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ の示す意味を説明しなさい．

(2) 次の式が成り立つことを，問 (1) を利用して図形を用いて説明しなさい．

$$\int_0^a \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{1-a^2} + \sin^{-1} a\right)$$

(三重大 2016)　　(m20163107)

0.423 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.424 xyz 空間中の曲面 $z = 5 - x^2 - y^2$，z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒，および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163115)

0.425 (1) $2x + y + 2z = 3$ で表される平面 A と，$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2) $x + y + z = 1$ で表される平面 A と，$2x + y + z = 1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3) ある平面に点 A, B, C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a, b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c, d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173102)

0.426 x, y に関する実数値関数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい．

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい．

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v)=4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい．

(三重大 2017)　　(m20173108)

0.427　次の不等式が表す領域を xy 平面に図示せよ．

$$(-x+y^2-1)(4x^2-8x+y^2)<0$$

(三重大 2020)　　(m20203104)

0.428　xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0,0,2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x, y, z を用いてあらわしなさい．

(2) 楕円 E 上の点 $(0,2,0)$ をとおり，$\overrightarrow{n}=(0,1,3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい．

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい．

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.429　2 次曲線 C : $5x^2-6xy+5y^2=4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1<\lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を X, Y を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.430　二次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ における $A\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ を満たす定数 k とベクトル $\overrightarrow{u}$ について，以下の各問に答えなさい．

(1) この定数 k の値を求めなさい．

(2) このベクトル $\overrightarrow{u}$ を求めなさい．

(3) A^n を求めなさい．

(4) x-y 二次元平面上に存在しているある直線は，この行列 A を用いた一次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって x 軸に一致した．返還前の直線の式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223104)

0.431 $-x+2\sqrt{2}y-4z=1$ で表される平面 A と，$2x+2z=1$ で表される平面 B がある．この 2 つの平面に関する以下の各問に答えなさい．

(1) この 2 つの平面のなす角は何度になるか求めなさい．

(2) この 2 つの平面の交線の方程式を求めなさい．

(3) この 2 つの平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めなさい．

(三重大 2022)　　(m20223105)

0.432 a を正の定数とする．$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = -\frac{x^2}{2} + a \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$C_2 : y = -\log x \quad (\ x > 0\ )$$

について考える．いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 直線 $y=a$ と C_2 の交点の座標を求めよ．

(3) C_1 , C_2 と直線 $y=a$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073203)

0.433 2 次元平面の直交座標を (x,y)，また，極座標を (r,θ) とする．このとき，

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

の関係が成り立つ．x,y および r,θ が時間 t の関数であるとき，$\dfrac{dx}{dt}$ と $\dfrac{dy}{dt}$ を $\dfrac{dr}{dt}$ と $\dfrac{d\theta}{dt}$ を用いて表せ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073206)

0.434 $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = \sin x \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$
$$C_2 : y = \sin(x-a) \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

について考える．ただし，a は正の定数で，$0 < a \leqq \pi$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，C_1, C_2 のグラフの概形を描け．

(2) $0 < x \leqq 2\pi$ の範囲において，C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を，それぞれ t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ とする．t_1, t_2 を a で表わせ．

(3) $t_1 \leqq x \leqq t_2$ の範囲で，C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083203)

0.435 a を負の定数とする. 点 $P(-1,1)$ を通る傾きが a の直線 L と, xy平面上の曲線

$$C : y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

について考える. 次の問に答えよ.

(1) L と C がただ 1 つの共有点を持つような a の値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの a の値に対し, L と C の共有点の座標を求めよ.

(奈良女子大 2010)　　(m20103203)

0.436 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = \log x\ \ (x > 0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2011)　　(m20113203)

0.437 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ 0 \right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) $\nabla \times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x - y$ 平面上に図示せよ．

ここで，∇ は次のように定義された演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2012)　　(m20123204)

0.438 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = e^x + x$$

に対して，次の問に答えよ．

(1) 原点を通り曲線 C に接する直線 ℓ を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2012)　　(m20123208)

0.439 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = e^x$$

と，点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし a は実数である．

(1) 直線 ℓ を求めよ．

(2) 曲線 C，直線 ℓ および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2013)　　(m20133203)

0.440 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = xe^{-x}$$

について次の問に答えよ．

(1) C 上の点 $(a,\ ae^{-a})$ における C の接線の方程式を求めよ．ただし a は実数とする．

(2) C 上の点 $(1,\ e^{-1})$ における C の接線を ℓ とする．C, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) y 軸上の点 $(0, b)$ を通る C の接線がちょうど 2 本存在するための，b のみたすべき条件を求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143207)

0.441　$xy-$ 平面上の曲線

$$C : y = \log(1+x^2) \ \ (x \geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

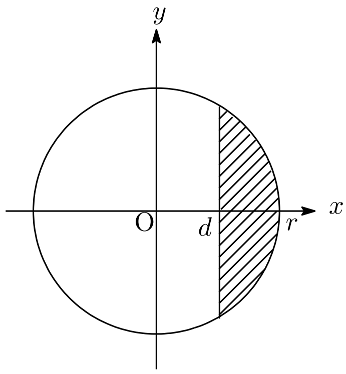
(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.442　(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax+b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする．

(2) 下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ．



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.443　3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ の面上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式を求めよ．ただし，$a,\ b,\ c$ はいずれも正の実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223206)

0.444　2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に関する以下の問いに答えよ．

ただし，$a > b > 0$ であり，また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

とする．

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\tilde{e}^2\cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ．

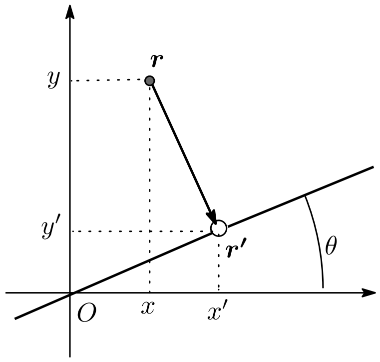
(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき，長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a\left(1-\frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223207)

0.445 下図のように xy 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，x 軸から角度 θ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ．

(2) (x, y) と (x', y') の関係は 2×2 行列 A を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 A を求めよ．

(3) 行列 A の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

0.446 z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w = f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1| < 1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w > 0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2}) = i$，$f(0) = 0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V = \{w \mid 0 < \mathrm{Im}w < 1\}$ の現像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002)　　(m20023304)

0.447 行列 A に対して, その行列式の値を $|A|$, その絶対値を $abs|A|$ と表記する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ と原点を通る直線の方程式を行列式を用いて表現せよ.

(3) 平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積 S は以下のように表現できることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} abs \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

（京都大 2004）　　(m20043303)

0.448 次のラプラスの積分を考える．　$I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2] \cos 2ax \, dx$　以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換公式を用いて，$x^2 + y^2$ および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.449 a を $-1 < a < 1$ なる実数とする．複素数 z に対して

$$w = \frac{z - ai}{1 + aiz}$$

とおく．$i = \sqrt{-1}$ は複素単位．以下の問いに答えよ．

(1) 複素数平面で点 z が単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ 上を動くとき点 w はどのような図形を描くか．

(2) 複素数平面で点 z が単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ の内部にあるとき点 w はどのような領域にあるか図示せよ．

(京都大 2006)　　(m20063305)

0.450 C を複素数平面上の単位円周 $C = \{z \mid |z| = 1\}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点を中心とする開円盤 $D_1 = \{z \mid |z| < 2\}$ で正則な関数 $f(z)$ に対し，積分
$I = \displaystyle\int_C \frac{f(z) - f(0)}{z} dz$　の値を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z}$ に対し，積分　$\phi(z) = \displaystyle\int_C \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$　で与えられる領域 $D_2 = \{z \mid |z| > 1\}$ 上の正則関数 $\phi(z)$ を求めよ．

(京都大 2006)　　(m20063306)

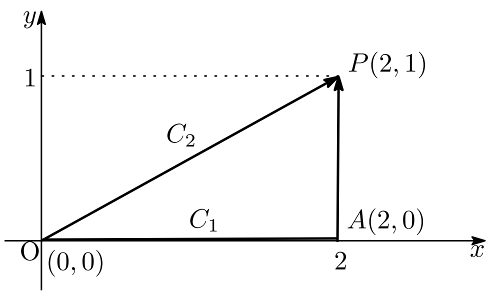
0.451 (x, y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x, y) = 2x + ay\ , \qquad\qquad G(x, y) = 2x + 5y$$

が定義されている．ここに a は定数である．(1)〜(4) に答えよ．

(1) 図に示すように，折れ線 OAP に沿う経路を C_1，また，直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき，次の 2 つの線積分の値を求めよ．

$$I_1 = \int_{C_1} (Fdx + Gdy)\ , \qquad\qquad I_2 = \int_{C_2} (Fdx + Gdy)$$



(2) $F = \dfrac{\partial U}{\partial x}$，$G = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x, y)$ が存在するように定数 a を定めよ．また，そのときの $U(x, y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3) (2) の関数 $U(x, y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_C (Fdx + Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ．

(4) (2) の関数 $U(x, y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2 + y^2 = 1)$ でのその極値を考える．

(a) 点 (x, y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ．

(b) 点 (x, y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx + Gdy = 0$ となる点において $U(x, y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ．

(c) 関数 $U(x,y)$ が極値をとるときの x,y の値および $U(x,y)$ の値をそれぞれ求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.452 関数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-a-ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x)=A\left(\frac{1}{x-z_1}-\frac{1}{x-z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A，z_1，z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx+\int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x-\zeta}\,dx\right) \qquad ①$$

を考える．式 ① の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R\to\infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

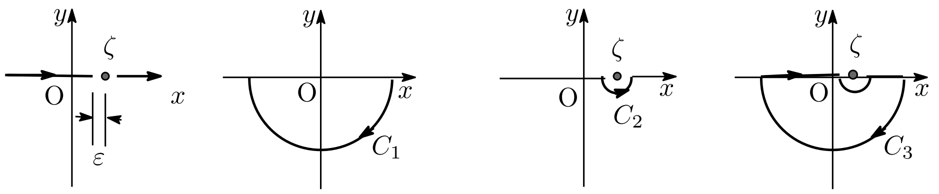


図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す．

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.453 t を実変数とし，複素数平面上において $z=-1$ を内部に含む単純閉曲線を C とするとき，以下の積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,dz$$

(京都大 2008)　　(m20083307)

0.454 複素数平面から実軸の $|x|\leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z\in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dt}{z-t}$，　$z\in D$（t は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z|>1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z\in D$ と実軸上の区間 $[-1,1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h|\leq d/2$ なら，$|z+h-t|\geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z| > 1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.455 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C \ : \left\{ \begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{array} \right. \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.456 D を複素平面上の単連結な開集合とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で正則であり, D 上で零点を有しないとする. D 上の一点 z_0 において $\arg f(z_0)$ を定めることにより, 関数 $u(x, y) = \arg f(z)$ を D 上の連続関数として定めることができる. ここに, x, y は, それぞれ z の実部, 虚部である. このとき, $u(x, y)$ は D において調和関数であることを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103306)

0.457 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r > 0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r) = \int_{C(r)} \frac{\overline{z} + 1}{z + 1} \, dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき，以下の問に答えよ.

(1) $0 < r < 1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r > 1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 2010)　　(m20103307)

0.458 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて　$x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$　$(0 \leq t \leq 2\pi)$ で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a, 0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は，どのような図形を描くか.

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.459 直交座標系（デカルト座標系）Γ に対して，$O'(1,\ 1,\ 1)$，$e_x{}' = {}^t\big(1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2},\ 0\big)$，$e_y{}' = {}^t\big(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}\big)$，$e_z{}' = {}^t\big(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6}\big)$ とするとき，次の問に答えよ.

(1) 新座標系 $\Gamma' = \{O' \ : \ e_x{}',\ e_y{}',\ e_z{}'\}$ も直交座標系であることを示し，かつ座標変換 $\Gamma \to \Gamma'$ の式を求めよ.

(2) 座標系 Γ における方程式が $x+y+z=6$ である平面 π の，新座標系 Γ' における方程式を求めよ．

(3) 座標系 Γ における方程式が，$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ である直線 g の，新座標系 Γ' における方程式が，$\dfrac{x'-\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}}=\dfrac{y'-\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}=z'$ になるとき，$\boxed{\text{あ}}$〜$\boxed{\text{え}}$ の空欄に入る数を求めよ．

(京都大 2014)　　(m20143304)

0.460 関数 $f(x,y)=x^y \ \ (x>0,\ y>0)$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(e,1,f(e,1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083403)

0.461 xy 平面上で定義された関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

がある．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1}x$ は逆正接関数の主値を表す．

(1) $x\neq 0$ のとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ を定義に基づいて求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103403)

0.462 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$$

に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103404)

0.463 関数 $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ について次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,2,2)$ における接平面を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2011)　　(m20113403)

0.464 関数 $F(x,y)=x^3+3xy+y^3$ について次の問に答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,1,5)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 微分可能な関数 $y=y(x)$ が $f(x,y(x))=5$ を満たすとき，導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123402)

0.465 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+2xy-x+2y$ を考える．実数 a,b は $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ を満たしている．実数 t の関数

$$g(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h\cos t\,,\ b+h\sin t)-f(a,b)}{h^2}$$

を考える．

(1) a,b の値を求めよ．

(2) 次の等式を証明せよ．

$$g(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cos^2 t+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\sin t\,\cos t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\sin^2 t$$

(3) t が実数全体を動くとき，$g(t)$ の最大値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133402)

0.466 xy 平面上の図形 $D:\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq e^{\theta})$ に対して，重積分 $\displaystyle\iint_D 1dxdy$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2013)　　(m20133404)

0.467 関数 $f(x,y)=(2x+1)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153402)

0.468 xy 平面の領域

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq x^2\right\}$$

に対して．重積分

$$I=\iint_D\sqrt{x^3+1}\,dxdy$$

の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153403)

0.469 xy 平面上の関数 $f(x,y)=x^3+2xy-y^2-3x-2y$ の極値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2016)　　(m20163403)

0.470 xy 平面上の関数 $f(x,y)=\dfrac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ．

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(1,1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183404)

0.471 xy 平面の領域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$ で定義される関数

$$f(x,y)=\log x+\frac{2y^2+2y+1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x, y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ.

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203404)

0.472 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3xy^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 重積分

$$\iint_D f(x, y) dxdy$$

の値を求めよ．ただし，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}$ とする.

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2022)　　(m20223403)

0.473 平面上に 2 点 A , B がある．線分 AB を直径とする円を考え，その中心を C ，半径を R とする.

(1) 2 点 A , B の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とし，円周上の任意の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$$

の関係が成り立つことを証明せよ.

(2) この点 P における接線を l とする．接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とし，円の中心点 C の位置ベクトルを $\overrightarrow{c}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{c}) = R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ.

(3) 2 点 A , B の座標をそれぞれ $(2, 4)$, $(4, 2)$ とする．接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ.

(大阪大 1997)　　(m19973504)

0.474 C は複素数平面上の円 $|z - i| = 1$ を表すとするとき，次の複素積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z - i} dz + \int_C \frac{1}{z + i} dz.$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z - i)^2} dz + \int_C \frac{i}{(z - i)(z + 2i)} dz.$

(大阪大 2001)　　(m20013508)

0.475 行列 $\begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{pmatrix}$ が表す平面上の一次変換を f とする．点 P, Q, R, S をそれぞれ $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$，さらに円 $C : x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$ とし，円 C が f によって移される図形を C' とおく．次の問いに答えよ.

(1) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき f によって四辺形 $PQRS$ はどのような図形に移されるか.

(2) (1) で求めた図形との位置関係に留意して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの図形 C' の概形を描け.

(3) t がすべての実数を動くとき C' が通過しうる点 (x, y) の集合を求めよ.

(大阪大 2002)　　(m20023504)

0.476 以下の設問に答えよ.

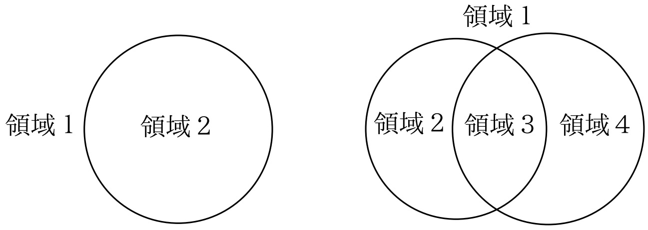
(1) 平面上に半径 $\dfrac{2}{3}$ の円 C および円 C 上に相異なる n 個の点 $P_1, \cdots, P_n$ がある. 各 P_i を中心とした半径 1 の円 C_i が描かれているとする $(1 \leqq\ i \leqq\ n)$. このとき, $P_1, \cdots, P_n$ と異なる C 上の点 P_{n+1} を適当にとり, P_{n+1} を中心とした半径 1 の円 C_{n+1} を描くと C_{n+1} は円 $C_1, \cdots, C_n$ と相異なる $2n$ 個の交点をもつようにできることを示せ.

(2) 平面を半径 1 の円でできるだけ多くの領域に分割することを考える. 円が 1 個,2 個のとき, 下の図のように 2 個,4 個の領域に分かれる. n 個の半径 1 の円での平面の最大の分割数を D_n と書くことにする $(n \geqq\ 1)$.

(a) $n = 3, 4$ のとき, 最大の分割数を与える図を書き, D_3 , D_4 を求めよ.

(b) $D_{n+1} = D_n + 2n$ を示せ.

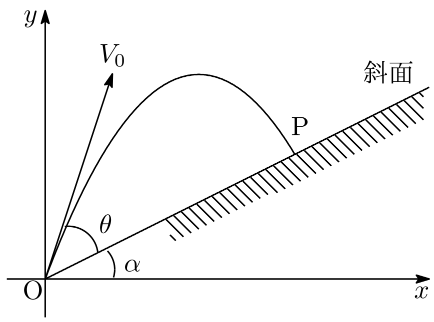
(c) D_n を n の式で示せ.



$D_1 = 2$　　　　$D_2 = 4$

(大阪大 2004)　　(m20043501)

0.477 右図のように水平面と $\alpha\ (0 < \alpha < \pi/2)$ の角をなす斜面において，初速度 V_0 で斜面に対して $\theta\ (\theta > 0,\ 0 < \alpha + \theta < \pi/2)$ の方向に物体を投げる．以下の問いに答えよ．



(1) 物体の軌跡の x および y 座標は時間 t を媒介変数とするとき，

$$x = V_0 t \cos(\alpha + \theta)$$
$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t \sin(\alpha + \theta)$$

で与えられる．ただし，g は重力加速度である．斜面上の到達距離 OP を求めよ．

(2) 到達距離が最大となる投射角度 θ およびその時の到達距離 OP を求めよ．

(大阪大 2004)　　(m20043503)

0.478 xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$$
$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

で表される．ただし, $a > 0$ とする．

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概略図を示せ.　　(2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053502)

0.479 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$$(\vec{x} - \vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = r^2$$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}} - \overrightarrow{\boldsymbol{a}}) = r^2$$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q, $\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする. $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005) (m20053503)

0.480 2 つの曲線 $(y-a)^2 = a(a+x)$, $(y-a)^2 = a(a-x)$ がある．ただし，$a > 0$ とする．次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x-y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(大阪大 2006) (m20063504)

0.481 複素平面上の点 a を内部に含む領域で正則な関数 $f(z)$, $g(z)$ が与えられ，$f(a) \neq 0$ とする．

(1) a が $g(z)$ の 1 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値とそれぞれの導関数の a における値を用いて表しなさい．

(2) a が $g(z)$ の 2 位の零点のとき，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ の a における留数を f, g の a における値と，それぞれの 3 階までの導関数の a における値を用いて表しなさい．

(3) n を自然数とするとき，$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}dz$ の値を求めなさい。

(大阪大 2006) (m20063509)

0.482 (1) xy 平面上において曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ により囲まれる領域の面積を求めよ.

(2) x, y が $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき，$x+y$ の最大値，最小値を求めよ.

(大阪大 2007) (m20073501)

0.483 次の問いに答えよ. ただし, z, ω は複素数とし, i は虚数単位とする.

(1) $|5z - i| = |3z - 7i|$ なる方程式を満足する z を複素平面上で図示し, どのような図形となるか答えよ.

(2) z に対し,

$$w = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}z - 1}{2z + 2\sqrt{3}}$$

なる変数変換を行った場合, w が満たす方程式を複素平面上に図示せよ.

(大阪大 2010) (m20103504)

0.484 2 次元平面上の点 $A(1,0)$ を点 $A'(a, 1-b)$ に, 点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a, b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P , 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0,0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0,0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 2010)　　(m20103506)

0.485 以下の問に答えよ．ただし，u, v, w は複素数である．

(1) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす u が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(2) 方程式 $|u| = 2$ を満たす複素数 u を

$$v = u + \frac{1}{4u}$$

により変数変換する．このとき，複素数 v が描く図形を複素平面上に図示せよ．

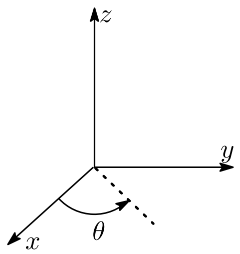
(3) 方程式 $|u+2| = 2|u-1|$ を満たす複素数 u を

$$w = i\left(\frac{4u^2 - 16u + 17}{4u - 8}\right)$$

により変数変換する．ただし，i は虚数単位とする．このとき，複素数 w が描く図形を複素平面上に図示せよ．

(大阪大 2012)　　(m20123503)

0.486 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ.

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ.

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ.

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.487 C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z| = 4\}$, D は $\{z\,;\,|z| < 4\}$ とする.

(1) D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\, dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3) 次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\, dz$$

(大阪大 2012)　　(m20123509)

0.488 (1) 2 つの複素数 a_1 と a_2 について，各々の和，積がいずれも実数であるとき，a_1 と a_2 が満たすべき条件をすべて示せ.

(2) 複素数 b について，$b + \dfrac{2}{b}$ の値が有限の実数であるとき，b が複素平面上で描く図形を示せ.

(3) 2 つの複素数 c_1 と c_2 について，各々の和，積がいずれも純虚数であり，かつ $\left|\dfrac{c_1}{c_2}\right| = k$ であるとき，$\dfrac{c_1}{c_2}$ を k を用いて表せ，ただし $k \neq 0$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133504)

0.489 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ.

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha| < R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z-\alpha} dz$$

を求めよ.

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)$　$(j = 1, 2, \cdots, n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z) = h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z) = {} & h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z) + h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ & + \cdots + h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ & + \cdots + h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z) = 0$ の n 個の複素数解を $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ とし，R は $|\alpha_j| < R$　$(j = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$$

を $b_{n-2},\ b_{n-1}$ を用いて表せ.

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.490　関数 $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{x^2+2y^2+1}$ について以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面全体において $f(x,y)$ が極大になる点と極大値，極小になる点と極小値を求めよ．

(2) 領域 $D: 0 \leqq x \leqq 1,\ y \geqq -x$ において $f(x,y)$ が最小になる点と最小値を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153501)

0.491　以下のの問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位であり，a, b は $a>b>0$ を満たす定数とする．

(1) 次の式で表される曲線 C を複素平面上に図示せよ．

$$C: z=z(t)=a\cos t+i\,b\sin t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

(2) (1) で与えられた曲線 C に沿う次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z}dx$$

(3) 次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$$

(大阪大 2015)　　(m20153504)

0.492　(1) 複素変数 z の関数 $f(z)=\overline{z}$ は正則であるか否かを判定せよ．ただし，$\overline{z}$ は z の複素共役とする．

(2) $a>b>0$ となる実定数 a,b において，積分　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a+b\cos t}$　の値を求めよ．

(3) 複素平面 C から 1 点 α だけを除いた領域 $D(\alpha)=C-\{\alpha\}$ において，複素変数 z の関数 $g(z)=1/(z-\alpha)$ の原始関数を求めよ．もし存在しないならばその理由を述べよ．

(大阪大 2016)　　(m20163505)

0.493　2 次元平面において，4 点 $(\sqrt{2},0)$, $(0,\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},0)$, $(0,-\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える．その内部において，ランダムに点 P をとる．P から最も近い菱形の周上の点を Q とし，PQ の長さを X とする．PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し，X_1, X_2, $\cdots$, X_n を得た．ただし n は自然数とする．以下の設問に答えよ．

(1) X の分布関数，すなわち，$F(x)=P(X \leq x)$ を求めよ．
また，$F(x)=\displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ．

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ．

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.494　曲面 $S: x^2+y^2-z^2+x+y+2=0\ (z>0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S と平面 $z=2$ の交線の長さを求めよ．

(2) 曲面 S と平面 $z=2$ に囲まれた領域の体積を求めよ．

(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上にあるとき，$x+y-2z$ の最大値を求めよ．

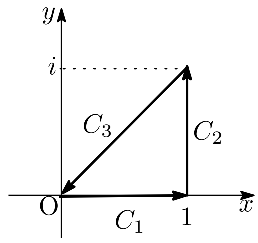
(大阪大 2016)　　(m20163508)

0.495 以下の問いに答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(\sqrt{3}-i)^3}$ を $x+iy$ の形で表せ．

(2) 複素関数 $f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2+2xyi$ は正則であることを示し，導関数 $f'(z)$ を求めよ．また，$f'(z)$ も正則であることを示せ．

(3) 図に示す複素平面上の積分経路 C_1, C_2, C_3 に沿って，問い (2) の複素関数 $f(z)$ をそれぞれ積分した，$\displaystyle\int_{C_1} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_2} f(z)dz$, $\displaystyle\int_{C_3} f(z)dz$ を求めよ．また，積分経路 $C=C_1+C_2+C_3$ に沿って $f(z)$ を積分した $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ．



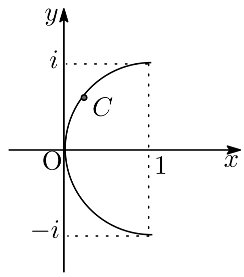
(大阪大 2016)　　(m20163511)

0.496 複素数 $z=x+iy$, $w=u+iv$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y, u, v は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{e^{2\pi z}-1}{z-i}$

(2) 複素関数 $w=f(z)=\dfrac{z-1}{z-i}$ により，z 平面上の図形 $|z-1|<\sqrt{2}$ は，w 平面上でどのような図形に写されるかを図示せよ．

(3) 右図に示す通り，$z=1$ を中心とする単位円の左半分に沿った $z=1-i$ から $z=1+i$ に至るまでの曲線を経路 C とするとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2-2z-3}dz$ を求めよ．



(大阪大 2017)　　(m20173504)

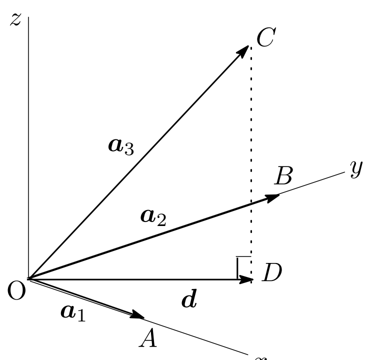
0.497 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2, λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1, λ_2, λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 $O-xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点 A に対し $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{OA}$, y 軸上の点 B に対し $\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{OB}$, 空間内の点 C に対し $\boldsymbol{a}_3=\overrightarrow{OC}$ とする．点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．



(大阪大 2018)　　(m20183506)

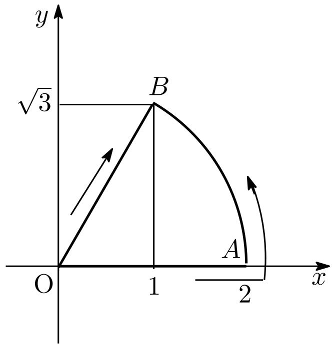
0.498 複素数 $z = x + iy$ に対して，$f(z) = \overline{z}$ で表される関数を考える．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位であり，$\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ は複素平面の全域で正則であるか，調べよ．

(2) 右下の複素平面図を参考にして，以下の二種類の経路で，$f(z)$ を原点 O から点 B まで積分せよ．ただし，図中において，AB は原点を中心とする半径 2 の円弧である．

(a) 原点 O から線分 OA，円弧 AB に沿って点 B に至る経路

(b) 原点 O から線分 OB に沿って点 B に至る経路



(大阪大 2019)　　(m20193501)

0.499 次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ．

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと．

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ．

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること．

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.500 (1) 実 2 変数の実数値関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ に対して，複素変数 z の関数 f を

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy)$$

で定める．$f(0) = 0$ かつ

$$v(x,y) = ye^x \cos y + (x+1)e^x \sin y$$

であるとき，f が複素平面上で正則となる $u(x,y)$ を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1 - a\cos\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta$ の値を求めよ．

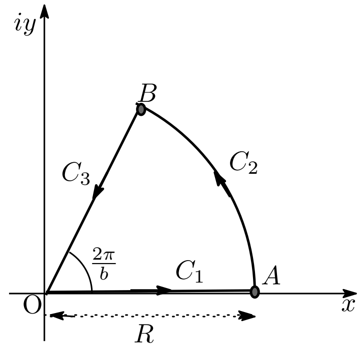
(大阪大 2019)　　(m20193509)

0.501 積分 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^b + 1} dx$ を考える．ただし，b は正の整数とする．この積分を計算するため，右下図に示す複素平面上の扇形の周に沿う単位閉曲線 C を考え，以下の図のように経路 C_1, C_2, C_3 を定める． ただし，x, y は実数で，AB は原点を中心とする半径 R $(R > 1)$ で中心角が $\dfrac{2\pi}{b}$ の円弧である．

C_1 ：原点 O から線分 OA に沿って点 A に至る経路

C_2 ：点 A から円弧 AB に沿って点 B に至る経路

C_3 ：点 B から線分 BO に沿って原点 O に至る経路



このとき，複素数 $z = x + iy$ について以下の問に答えよ．
ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

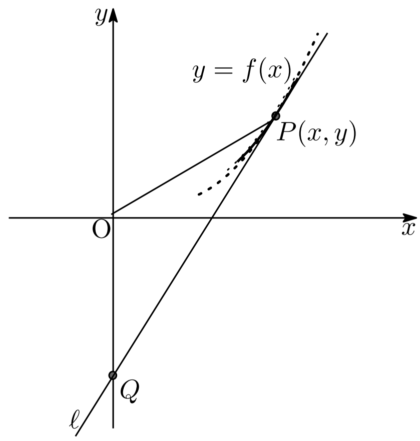
(1) $I_3 = \displaystyle\int_{C_3} \frac{1}{z^b+1} dz$ を，$I_1 = \displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z^b+1} dz$ を用いて表せ．

(2) 閉曲線 C で囲まれた領域内における $f(z) = \dfrac{1}{z^b+1}$ の特異点を求め，そこでの留数を計算せよ．

(3) 留数定理および $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} \frac{1}{z^b+1} dz = 0$ を用いて，I を計算せよ．ただし，i を用いずに表せ．

(大阪大 2020)　　(m20203503)

0.502 xy 平面上の $x > 0$ に微分可能な曲線 $y = f(x)$ がある．
この曲線上の点 $P(x, y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり，その交点を Q とする．
また，右図の O は原点を表す．



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x) > 0$ であり，線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして，x と y の関係を微分方程式で表せ．

(2) $u = \dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて，曲線 $y = f(x)$ を求めよ．
ただし，曲線は点 $(2, 0)$ を通るものとする．

(大阪大 2021)　　(m20213503)

0.503 累次積分

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 y^2 e^{x^4} dx \right) dy$$

の計算を実行しよう. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) I を二重積分とみたとき, 積分する領域（ただし, 境界を含む）を xy 平面上に図示せよ.

(2) 積分順序を交換することにより, I の値を求めよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103601)

0.504 関数 $X(r, \theta) = r\cos\theta$，$Y(r, \theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) ２つの集合

$$A = \left\{ \big(X(r, \theta_0), Y(r, \theta_0) \big) \,|\, r \in (0, \infty) \right\},\ B = \left\{ \big(X(r_0, \theta), Y(r_0, \theta) \big) \,|\, \theta \in (-\pi, \pi) \right\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi, \pi)$，$r_0 \in (0, \infty)$ は定数である．

(2) 行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし，

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である．

(3) ２つのベクトル $\big(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta)\big)$，$\big(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta)\big)$ が直交することを示せ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

0.505 (1) $\omega = \exp z$ により，z 平面の直線 $x = A$（定数）が ω 平面で描く図形を説明せよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ．ただし，$|a| \neq 1$ とする.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta$$

(大阪府立大 2011)　　(m20113609)

0.506 (1) 次の方程式において，z についてすべての解を極形式で表せ．また，それを複素平面上に図示せよ．ただし，i は虚数単位である．　$z^3 = -2 + 2i$

(2) 留数定理を用いて，次の積分値を求めよ．　$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$

(大阪府立大 2016)　　(m20163601)

0.507 (1) z を複素数とする．複素平面上において，原点を中心として半径 a の円 L を積分路とするとき，

$$\int_L \frac{dz}{z}$$

を計算せよ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{3}{4 - \sin\theta} d\theta$$

(大阪府立大 2017)　　(m20173603)

0.508 (1) z 平面上に領域 $0 < y < 2$ が $w = 1/z$ により写像される w 平面上の領域を示せ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 16} dx$$

(大阪府立大 2018)　　(m20183603)

0.509 2 次元平面での領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq x + y \leqq 1\}$$

とおく．このとき，各問に答えよ

(1) $x = u(1 - v)$，$y = uv$ とおく．点 (x, y) が領域 D 上を動くとき，この変換により点 (u, v) はどのような領域を動くか．uv 平面上で動きうる範囲を図示せよ.

(2) (1) の変換のヤコビ行列式の値を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\iint_D (x + y)^{10} dxdy$ の値を求めよ.

(大阪府立大 2018)　　(m20183606)

0.510 xy 平面 $\mathbf{R}^2$ 上に x 座標が互いに相異なる 4 点 (u_i, v_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ が与えられたとき，関数

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

のグラフがこの 4 点を通るような実数 A, B, C, D がただ一つ定まることを示せ.

(神戸大 2000)　　(m20003803)

0.511 $r : [a, b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x, y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$，$y = r(\theta)\sin\theta$，$a \leq \theta \leq b$ を α とする．ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$，α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\,, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.512 xy 平面において，次の関数のうち，どれが最大値をもち，どれが最小値をもつか．理由をつけて示せ.

(1) e^{x-y}　　(2) $e^{x^2+y^4}$　　(3) $(x+y)e^{-x^2-y^2}$

(神戸大 2007)　　(m20073803)

0.513 x, y 実数とし，

$$f(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z = f(x, y)$ の, 点 $(1, 1, \pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ を求めよ.

(神戸大 2010)　　(m20103804)

0.514 xy 平面上に 4 点 $P = (0, \pi)$，$Q = (\pi, 0)$，$R = (2\pi, \pi)$，$S = (\pi, 2\pi)$ をとり，四辺形 $PQRS$ で囲まれた領域（周上の点も含む）を D とする．関数 $f(x, y) = \cos x + \sin y$ について以下の各問に答えよ.

(1) D の内部における $f(x, y)$ の極値を調べよ.
（ここで，D の内部とは D から周上の点を除いた領域である.）

(2) D における $f(x, y)$ の最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2016)　　(m20163808)

0.515 (1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ．$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 1 \leqq\ x + y \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y\right\}$

(3) 変数変換 $x = st$，$y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ．$E = \left\{(s, t) \;\middle|\; 1 \leqq\ s \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ t \leqq\ 1\right\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする．$\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016)　　(m20163809)

0.516 xz 平面において，曲線 $z=\sqrt{8-x^2}$ （ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$），直線 $z=x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.517 $xy-$ 平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (x,y)=(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義するとき，f の原点 $(0,0)$ での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を判定せよ．

(神戸大 2018)　　(m20183808)

0.518 xy 平面上の 4 点 $P=(1,0)$, $Q=(3,0)$, $R=(1,2\pi)$, $S=(3,2\pi)$ を頂点とする長方形で囲まれた（境界以上の点も含む）領域を D とする．関数 $f(x,y)=(4x-x^2)(\sin y+2)$ を考える．以下の各問に答えよ．

(1) D の内部における $f(x,y)$ の極値を求めよ．ただし，D の内部とは D から D の境界上の点を除いた領域である．

(2) D における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

(神戸大 2019)　　(m20193803)

0.519 xy 平面の第 1 象限（$x\geq 0$ かつ $y\geq 0$ を満たす領域）において，2 本の曲線 $xy=1$, $xy=9$ と 2 本の直線 $y=x$, $y=4x$ で囲まれた領域を R とする．以下の各問に答えよ．

(1) R の概形を書け．

(2) 変数変換 $x=\dfrac{u}{v}$, $y=uv$ により R と 1 対 1 に対応する uv 平面の第 1 象限（$u\geq 0$ かつ $v\geq 0$ を満たす領域）に含まれる領域 S を求め，S の概形を書け．

(3) (2) の変数変換を用いて，次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)dxdy$$

(神戸大 2019)　　(m20193804)

0.520 (1) xy 平面上の領域

$$D=\left\{(x,y)\;\middle|\;x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(0\leq\theta<2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ．

(2) xyz 空間内の領域 A, B を次のように定める．

$$A=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;x^2+y^2+z^2\leq 4,\quad 0\leq z\right\}$$

$$B=\left\{(x,y,z)\;\middle|\;x^2+(y-1)^2\leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.521 xy 平面上の閉領域 D を

$$D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$$

と定め,

$$z = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V = \int_D |x^2 - y^2| dxdy$$

を求めよ.

(2) S の曲面積を求めよ.

(神戸大 2021) (m20213806)

0.522 (1) $Z = f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, $x = e^t$, $y = \log_e(t)$ のとき, dZ/dt を t の関数として求めよ.

(2) xy 平面上の点 (x, y) が $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ で表される曲線上を動くとき, 関数 $Z = f(x, y) = x + 2y + 5$ が極値をとる点 (x, y) とその極値を求めよ（偏微分の手法を用いて解答すること）.

(鳥取大 2006) (m20063902)

0.523 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a, b > 0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0, y_0, z_0), $(x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073905)

0.524 二つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, 1, 5)$ と $\boldsymbol{B} = (1, 3, 1)$ があるとき, 以下の問いに答えよ. 但し, (a, b, c) の a, b, c はそれぞれ $x-$ 成分, $y-$ 成分, $z-$ 成分を表す.

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $J = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ を求めよ.

(2) xy 平面上にあり, $\boldsymbol{A}$ に垂直で長さが 1 で, x 成分が負のベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})/|\boldsymbol{A}|^2$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ の間の角度を計算せよ.

(鳥取大 2007) (m20073907)

0.525 次の平面領域 D における二重積分 $\displaystyle\int_D y^2 dxdy$ を計算せよ.

(1) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ \dfrac{1}{2}x + y < 1$. (2) $D\ :\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1$.

(鳥取大 2008) (m20083904)

0.526 $n = 1, 2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006) (m20064002)

0.527 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ.

(2) 実数を成分とする 3×3 行列 X で, $X^3 = I$ $(X \neq I)$ を満たすものをひとつ求めよ. ただし, I は単位行列を表す.

(岡山大 2008) (m20084003)

0.528 (1) 座標平面上の点を直線 $y = ax$（a は実数）に関して対称な点に移す一次変換を考える.

$a = \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(-\pi < \theta < \pi)$ とおくとき, この一次変換を表す行列 A を θ を用いて表せ.

(2) 2 次直交行列 B の行列式が -1 であるとき, B の表す一次変換はある直線に関して対称な点を対応させる変換であることを示せ.

(岡山大 2010) (m20104004)

0.529 正の実数 b, c が $bc = 1$ を満たすとして，空間の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(0,1,1)$, $B(b,0,b)$, $C(c,c,0)$ を考える．三角形 ABC を含む平面 α 上に点 H を，線分 OH が α と垂直になるようにとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 H の座標を b で表せ．

(2) 線分 OH の長さの最大値を求めよ．また，そのときの b の値を求めよ．

(3) 点 H が三角形 ABC の内部に存在するための b の条件を求めよ．

(岡山大 2014) (m20144004)

0.530 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ．

(3) $a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島大 2006) (m20064104)

0.531 $f(x,y) = (x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z = f(x,y)$ の $(x,y) = (0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．

このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009) (m20094105)

0.532 xy 平面内で $x^2 + 3y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす領域の面積を求めよ．

(広島大 2014) (m20144102)

0.533 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) $f(\theta)=\cos^3\dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \left\{\begin{array}{l} x=f(\theta)\cos\theta \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{array}\right. \qquad (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.534 a を実数，r を正の実数とする．座標平面において，y 軸上の点 $(0,a)$ を中心とし半径が r である円を C とする．以下の問いに答えよ．

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y=f(x)$ の形で表せ．

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要である．

(3) 円 C が $x=0$ の近くで最も良く放物線 $y=x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184102)

0.535 (1) 方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ．

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (1) の 2 次曲線上での xy の最小値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184103)

0.536 xy 平面上において，θ を変数として，座標 $x,\ y$ が，$x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ で与えられる曲線を，サイクロイドと呼ぶ．ここで，a は定数である．$\theta\geq 0$ におけるこの曲線上で，x 軸に対する曲線の傾きが 0 となる点 $(x,\ y)$ のうち，原点 $(x=0,\ y=0)$ に最も近い点を $(x_1,\ y_1)$，2 番目に近い点を $(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，n 番目に近い点を $(x_n,\ y_n)$ とする．$x_n,\ y_n$ を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184109)

0.537 $D=\{(x,y)\,|\,1\leqq\ x^2+y^2\leqq\ 4,\ y\geqq\ x,\ y\geqq\ -x\}$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) xy 座標平面上に D を図示せよ．

(2) 極座標変換により，D は D' にうつされる．D' を極座標を用いて表せ．

(3) 重積分　$\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$　の値を求めよ．

(広島市立大 2001)　　(m20014203)

0.538 xy 平面上の領域 $D=\{(x,y)\,|\,x\geqq\ 0,y\geqq\ 0,x^2+y^2\leqq\ 1\}$ に対し，重積分
$\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$　の値を求めよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024204)

0.539 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ．

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする．ただし，$x^2+y^2\leq 9$ である．線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す．このとき，z を x,y の関数で表せ．

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x, y)$ とおく． 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

と書くことができる．ただし，$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$ である． この 2 重積分を計算することにより，V の値を求めよ．

(広島市立大 2011) (m20114203)

0.540 座標平面上に楕円 C : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える．また，$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル全体のなす空間の正規直交基底とする．原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P，原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると，

$$\frac{1}{||\overrightarrow{OP}||^2} + \frac{1}{||\overrightarrow{OQ}||^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ．

(広島市立大 2011) (m20114205)

0.541 2 変数関数 $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) f の勾配ベクトル $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を求めよ．

また，勾配ベクトルの具体的な値を $(0, 0)$，$(0, \pi/4)$，$(0, \pi/2)$ において求めよ．

(2) 座標平面上の 4 点 $(0, 0)$，$(0, \pi/2)$，$(\pi, 0)$，$(\pi, -\pi/2)$ を頂点とする平行四辺形が定める領域を D とする（図 1）． 2 重積分 $\displaystyle\iint_D |f(x, y)| \, dx dy$ の値を求めよ．

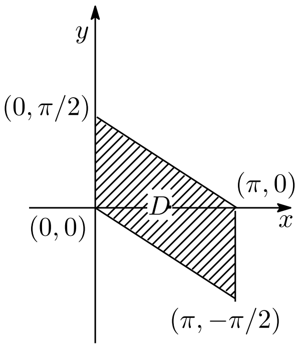


図 1

(広島市立大 2012) (m20124204)

0.542 3 次元直交座標 xyz での平面と直線の交点について考える．

(1) 3 点 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ を通る平面 A の方程式を求めよ．

(2) 点 (x_0, y_0, z_0) は $x_0 + y_0 + z_0 \neq 0$ を満たす点とする．2 点 $(0, 0, 0)$，(x_0, y_0, z_0) を通る直線 B の方程式を求めよ．

(3) 平面 A と直線 B の交点を求めよ．

(広島市立大 2012) (m20124206)

0.543 3 次元直交座標系 xyz での平面と直線の関係について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 $(1, 1, 0)$，$(0, 1, 1)$，$(0, -1, 0)$ を通る平面 π の方程式を求めよ．

(2) 2 点 $(0,1,0)$, $(1,1,1)$ を通る直線 ℓ と平面 π の交点の座標を求めよ.

(3) 直線 ℓ を含み, 平面 π に対して垂直な平面の方程式を求めよ.

(広島市立大 2013)　　(m20134205)

0.544 xy 平面上での次の変換に対応する行列を求めなさい.

(1) 直線 $y = 2x$ に関する対称移動に対応する変換行列

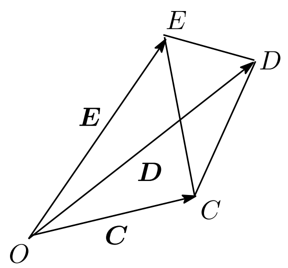
(2) 原点を中心として $60°$ 回転移動に対応する変換行列

(山口大 2003)　　(m20034310)

0.545 ベクトルに関する以下の問いに答えなさい.

(1) x, y, z の成分で表した 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (4,5,6)$ と $\boldsymbol{B} = (1,2,3)$ について, $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_{\perp}$ に分解する. $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{A}_{\perp}$ それぞれの x, y, z 成分を求めなさい.

(2) 右図のように原点を O にとり, 三角形 CDE の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ とする. ただし, $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ は同一平面上にはない.



(a) 三角形 CDE を通る無限に広い平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ を用いて表しなさい. ただし, 必要な変数は自分で定義しなさい.

(b) 三角形 CDE の面積 S が

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{C}|$$

と表せることを示しなさい.

(山口大 2008)　　(m20084302)

0.546 方程式 $6x + 2y + 3z = 6$ で表される平面に関して以下の問いに答えなさい.

(1) 上記の平面の概略を図示しなさい.

(2) ベクトル $(6,2,3)$ は上記の平面と直交することを示しなさい.

(3) 座標原点と上記の平面との距離を求めなさい.

(山口大 2009)　　(m20094302)

0.547 $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2\ ,\ 1 \leq xy \leq 2x\}$ とするとき, 次の問に答えよ.

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D ye^{xy}\,dxdy$ の値を求めよ.

(徳島大 2000)　　(m20004402)

0.548 $D = \{(x,y)\ :\ y \geqq x^2\ ,\ y \leqq x + 2\}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) D を xy 平面に図示せよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ の値を求めよ.

(徳島大 2003)　　(m20034402)

0.549 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板を $D(a) = \{(x,y) \in R^2\ ;\ x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とする.

(1) 2 重積分 $I(a) = \displaystyle\iint_{D(a)} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^4}$ を求めよ.

(2) 平面の全体における広義積分 $I = \displaystyle\iint_{R^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^4}$ を求めよ.

(徳島大 2004)　　(m20044402)

0.550 平面上の図形 $D = \{(x,y)\ :\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1,\ -2 \leqq\ y \leqq\ 2\}$, $S = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2 \leqq\ 4\}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\iint_D dxdy$ と $\displaystyle\iint_S dxdy$ を求めよ.　(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.　(3) $\displaystyle\iint_S xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2007)　　(m20074403)

0.551 $D = \{(x,y)\,;\,1 \leqq\ x+y \leqq\ 2,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0\}$ とする． 二重積分 $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\,dxdy$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) $u = x-y,\ v = x+y$ とおく．x, y を $u,\ v$ で表せ.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(3) (1) の変換で D に対応する uv 平面の集合を D' とする．D' を図示せよ.

(4) I を求めよ.

(徳島大 2011)　　(m20114403)

0.552 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とし，xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,y)\ ;\ y \leqq\ x \leqq \dfrac{1}{2},\ a \leqq\ y \leqq \dfrac{1}{2}\right\}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) $I_a = \displaystyle\iint_D \cos\left(\pi(x-a)^2\right)dxdy$ を求めよ.

(3) (2) の I_a について，$\displaystyle\lim_{a\to\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-a\right)^{-2} I_a$ を求めよ.

(徳島大 2014)　　(m20144403)

0.553 xy 平面上の領域を $D = \left\{(x,\ y)\ ;\ x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$ とする.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 変数変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\ (r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ により，D に対応する $r\theta$ 平面上の領域を E とする．E は，定数 $\alpha,\ \beta$ および関数 $f(\theta)$ を用いて $\{(r,\ \theta)\ ;\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\theta)\}$ と表される．$\alpha,\ \beta,\ f(\theta)$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D xydxdy$ を求めよ.

(徳島大 2018)　　(m20184403)

0.554 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x\,,\ x \leq 2y\,,\ x+y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x,y) = \frac{2x-y}{3}\ , \qquad v = \psi(x,y) = \frac{-x+2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x,y) = (\varphi(x,y),\ \psi(x,y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u,v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010) (m20104502)

0.555 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ. 求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x+y=0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x+2y=0$ へ正射影する変換.

(4) $y=x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $(2p,2q)$ に移る. また, $y=-x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る. これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013) (m20134503)

0.556 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき, (f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\big((x,y) \neq (0,0)\big)$ のとき, (f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$ のとき, (f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ.

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y) = h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

$$q(x,y) = k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと, (p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(高知大 2015) (m20154502)

0.557 $x-y$ 平面の領域 $D\ :\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1$ 上で, 曲面 $z = xe^{-y}$ と平面 $z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074613)

0.558 平面中の点 P_1, P_2 のデカルト座標（直交座標）をそれぞれ (x_1, y_1), (x_2, y_2) とする．これら２つの点 P_1, P_2 と原点 O とで作られる角を $\angle P_1OP_2 = \theta$ とする場合，$\cos\theta$ を２つの点の座標で表すとどのようになるか.

(愛媛大 2007)　　(m20074618)

0.559 a, b は実数で，$0 < a < 1$ を満たすとする．xy 平面において，２つの関数のグラフ

$$C : y = \log x\ ,\quad l : y = ax + b$$

がただ一つの共有点を持ったとき，次の問に答えよ.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) $b > 0$ となるような a の範囲を求めよ.

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，曲線 C，および 3 直線 l，$x = 0$，$y = 0$ で囲まれた部分の面積を求め，a のみを用いて表せ.

(愛媛大 2011)　　(m20114606)

0.560 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) 空間における領域

$$\Omega = \Big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqq\ a^2\ \ 0 \leqq\ z \leqq\ f(x, y)\Big\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0 < a < 1$ とする.

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.561 $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + 2x^2 + 3y^2}$ とする.

(1) $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $\big(2, 1, f(2, 1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ.

(愛媛大 2022)　　(m20224608)

0.562 (1) 領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$ を座標平面に図示せよ.

(2) 積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x - y}{1 + x + y}\, dx\, dy$ の値を計算せよ.

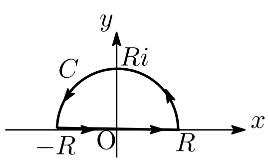
(九州大 1997)　　(m19974703)

0.563 次の各問に答えよ.

(1) 次の問に答えよ.

(a) $z^4 + \alpha^2 = 0$ を満たす複素数 z を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする.

(b) 積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^4}{1 + z^4} dz$ の値を求めよ．ただし，C は図のような線分と半円をつないだ曲線であり，$R > 1$ とする.



(2) $u(x,y)=x^2+\alpha xy+\beta y^2$ とする．複素平面全体で正則関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が存在する条件を示し，そのときの $v(x,y)$ を求めよ．ただし，i は虚数単位であり，$z=x+yi$，また，α,β は定数とする．

(九州大 1998)　　(m19984710)

0.564 xy 平面上の点 (x,y) と，uv 平面上の点 (u,v) との間に

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$$

という対応関係がある．このとき，xy 平面上の 3 点 $A(0,0),B(1,0),C(1,\frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を，上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として，次の問いに答えよ．

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ．

(2) 図形 P の面積を求めよ．

(九州大 2000)　　(m20004701)

0.565 次の問いに答えよ．

(1) z を複素数とし，複素平面上の閉曲線 C を $|z-a|=r$ （r は正の実数, a は複素数) とする．このとき積分

$$\oint_C\frac{dz}{(z-1)^n}$$

を $n=1,n=2,n=3$ の各々の場合について計算せよ．ただし，一周積分は正の向き（反時計回り）とする．

(2) 上の結果を用いて $\oint_C\frac{3z^2-4z}{(z-1)^3}dz$ を計算せよ．ただし，C は $|z-1|=2$ とする．

(九州大 2000)　　(m20004703)

0.566 a,b,c を実数とし $ac\neq 0$ とする．$xyz-$ 空間において，３点 $A(a,0,0),B(b,c,0),C(0,0,1)$ を通る平面の方程式を $z=f(x,y)$ とする．次の設問に答えなさい．

(1) 関数 $f(x,y)$ を a,b,c を使って表しなさい．

(2) (x,y) が単位円周 $S=\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2=1\}$ を動くとき，関数 $f(x,y)$ が最大値をとる点を $P\in S$ とし，原点を O とすると，２直線 OP と AB が互いに直交することを示しなさい．

（九州大 2001）　　(m20014704)

0.567 次の積分の値を求めたい．

$$I(p)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2p\cos\theta+p^2}d\theta,\quad 0<p<1$$

(1) 関係式

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\quad および\quad \frac{d}{d\theta}e^{i\theta}=ie^{i\theta}$$

を利用して，$I(p)$ を複素平面内の単位円周 C に沿っての線積分

$$I(p)=\int_C F(z)dz$$

と書き換えるには，$F(z)$ をどう定めたらよいか．

(2) 積分 $I(p)$ の値を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014708)

0.568 S を平面上の円とする．

(1) A, B が S 上にあり，P が円弧 AB の上を動くとき，$\triangle APB$ の面積はいつ最大になるか答えよ．

(2) S に内接する n 角形 $(n \geq 3)$ の面積はいつ最大になるか，理由を付けて答えよ．

(九州大 2003)　　(m20034701)

0.569 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x, y)$ で定義される曲面の点 (a, b, c), $c = f(a, b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034702)

0.570 xyz 空間内の円柱面 $T : x^2 + y^2 = x$ と曲面 $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の設問に答えよ．

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034703)

0.571 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を用いて

$$S = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$$

と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.572 z を複素数とする．複素平面上の経路 C に沿う積分 $\displaystyle\int_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz \quad (0 < a < 1)$ について次の問に答えよ．

(1) 積分路 C を 4 点 $-R, R, R + i2\pi, -R + i2\pi \quad (R > 0)$ を頂点とする長方形にとるとき，C で囲まれる領域内にある特異点，およびその点における留数を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \quad (0 < a < 1)$ を計算せよ．

(九州大 2003)　　(m20034708)

0.573 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ. ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004） (m20044707)

0.574 複素平面上の中心 a, 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

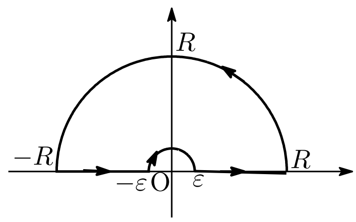
(1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ とおいて考えよ.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\pi f(a)$$

(2) 不等式 $\dfrac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立つことを示せ.

(3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$



(4) 関数 $\dfrac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.

（九州大 2004） (m20044708)

0.575 平面上の異なる 2 つの定点 A, B に至る距離の比が $m : n\ (m, n > 0)$ である点の軌跡（そのような点全体のなす図形）を求めよ.

(九州大 2005) (m20054705)

0.576 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x < 1$ について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 1 次式 $f_1(x)$ を求めよ.

(2) $x = 0$ の周りで最も $f(x)$ に近い 2 次式 $f_2(x)$ を求めよ.

(3) $y = f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ のグラフ 3 つを重ねて xy 平面上に描け.

(4) $f(x)$ を $x = 0$ を中心に Taylor 級数に展開せよ. x^n の項まで展開したときの剰余項の評価を一つ与えよ.

(九州大 2005) (m20054709)

0.577 複素平面上の原点を中心とする半径 a の円 C に沿った積分（方向は C の正方向，範囲は一周）について，次の問に答えよ．

(1) ある複素数 z_0 ($|z_0| \neq a$) に対して，(a) $|z_0| > a$ の場合 および (b) $|z_0| < a$ の場合における $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$ を求めよ．ただし，n は正の整数である．

(2) 複素関数 $f(z) = \log(z-b) + \log\left(z - \dfrac{a^2}{b}\right) - \log z$ （b は実数で，$b > a$）に対して，$\displaystyle\int_C \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ を求めよ．

(九州大 2006) (m20064703)

0.578 空間の 4 点 $O = (0,0,0)$, $A = (1,2,-1)$, $B = (1,2,1)$, $C = (1,1,1)$ を考える．2 点 O, A を通る直線を ℓ, 3 点 O, A, B を通る平面を π とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 B から直線 ℓ へ下ろした垂線の足を P とする．

$e_1 = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2 = \dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．

ただし，$|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2) 点 C から平面 π へ下ろした垂線の足を Q とする．

$$\overrightarrow{OQ} = \alpha e_1 + \beta e_2$$

が成り立つ実数 α と β を求めよ．また，点 Q の座標を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064711)

0.579　2 変数関数 $z = x^2 - y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z = 0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる立体図形：$0 \leqq z \leqq x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の体積を求めよ.

(3) $z = x^2 - y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取られる部分：$z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.580　$\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す． また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P = (1, 1, -2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$，$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる.

このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.581　3 次元空間内で

$$S \ : \ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u, v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2} \ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S が $z = f(x, y)$,　$(x, y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \ \ dxdy$$

であることを示せ.

(2) 半径 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.582 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする.

$$A=\begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ.

$$A\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a<b$ とし，(p, q)，(r, s) はそれぞれ整数の組で，$p>0$，$r>0$ とする.

(2) 前問の結果を用いて，$P=\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ.
（ヒント）$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0)=(s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ.

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.583 積分 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos\theta}\,d\theta$ を複素平面の積分に変換して計算する．ただし，a は $0<a<1$ の実数である.

(1) 単位円上の任意の点，$z=e^{i\theta}$ に対して，$d\theta=\dfrac{dz}{iz}$ であることを示せ.

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ であることから，I を積分経路を単位円 $|z|=1$ とする複素積分へ変換せよ.

(3) (2) で得られた複素積分の被積分関数の特異点のうち，単位円内部に含まれる点を書け.

(4) 留数計算によって，$I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$ となることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084703)

0.584 複素数 z を変数とする偶関数 $f(z)$，奇関数 $g(z)$ が次の関係式を満たすとき，以下の問いに答えよ.

$$e^{iz}=f(z)+i\cdot g(z)$$

なお，i は虚数単位であり，e は自然対数の底である.

(1) $f(z)$ ならびに $g(z)$ を用いて，e^{-iz} を表せ.
ヒント：題意より，$f(z)=f(-z)$，$g(z)=-g(-z)$ が成立する.

(2) e^{iz} ならびに e^{-iz} を用いて，$f(z)$ と $g(z)$ をそれぞれ表せ.

(3) $g(x+iy) = u + iv$ と表すとき，以下の関係式が成立することを示せ．

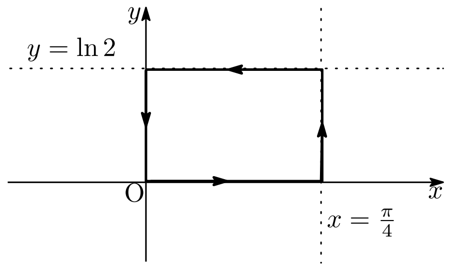
$$u = \sin x \cdot \cosh y$$
$$v = \cos x \cdot \sinh y$$

ただし，x, y, u, v は実数であり，$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$，$\sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ である．

(4) $g(x+iy) = i$ を満たす $x+iy$ を全て求めよ．

(5) $g(x+iy) = u + iv$ とし，点 (x, y) が下図の太線で示す xy 平面上の長方形に沿って，原点 O を出発して反時計回りに一周したとき，uv 平面上の点 (u, v) はどのような軌跡を描くか．その軌跡の概略図を示せ．

ヒント：任意の実数 x, y で，$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ が成立する．



(九州大 2008)　　(m20084707)

0.585 xyz 空間において，　$z = e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と　$z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と　$z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.586 $a > 0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2 = a^2 x$ を考える．

(1) 上の曲線の概形をかけ．

(2) 上の曲線を $x = 0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.587 (1) n が整数であるとき，複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ について以下の式が成り立つことを示せ．

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \cdots\cdots \text{(i)}$$

(2) (i) 式を用い，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) (i) 式を用い，複素数 $1 - i$ の三乗根をすべて求めよ．

(4) (i) 式を用い，1 の N 乗根をすべて求めよ．ただし，N は正の整数とする．また，$N = 4$ の場合の解を複素平面上に図示せよ．

(九州大 2009)　　(m20094704)

0.588 xyz-空間に，4 点 $P(-1,1,1)$, $Q(-1,2,2)$, $R(0,2,0)$, $S(1,-1,-1)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ.

(2) xyz-空間において平面の方程式は, 一般に, 適当な定数 a, b, c, d により $ax + by + cz = d$ と表される. 3 点 P, Q, R を通る平面の方程式を求めよ.

(3) 点 S から, 3 点 P, Q, R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする. ベクトル $\overrightarrow{SH}$ を求めよ.

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094708)

0.589 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし, 次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられ, 第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a \log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられ, 第二象限内では $x = a \log \dfrac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2}$ で与えられることを示し, C の概形を描け.

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.590 図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある. この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす. このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）. 棒の左端 P から距離 t $(0 < t < 1)$ だけ離れた棒上の点を R とする.

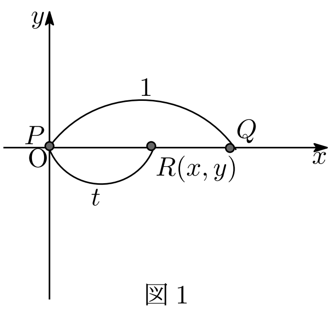


図 1

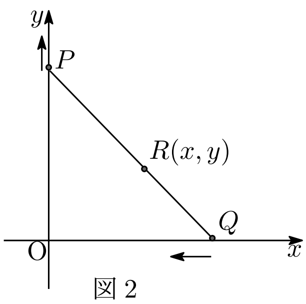


図 2

(1) 点 P が原点 O から点 $(0, 1)$ まで移動するとき, 点 R はどのような軌跡を描くか. 点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め, この軌跡の図形の名前を記せ.

(2) (1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

(3) (2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104702)

0.591 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を含む平面 α が, 座標の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している.

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき, 平面 α を表す方程式を求めよ.

(2) 点 P が球面 β 上にないとき, 平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ が満たすべき条件を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104703)

0.592 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\ ;\ x=t\cos\theta\ ,\ y=t\sin\theta\ ,\ z=r\ ,\ 0\leq t\leq r\ ,\ 0\leq r\leq 3\ ,\ 0\leq\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える.

(1) V の体積を求めよ.

(2) L を平面

$$z=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{4}y+1$$

とし, $S=V\cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}\qquad\max\{z\ ;\ (x,y,z)\in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010) (m20104705)

0.593 3 次元空間（$xyz-$ 空間）内において, 与えられた 3 つの平面のいずれにも属する点があるとき, その点をその 3 つの平面の「共有点」と呼ぶ. たとえば, $xy-$ 平面, $yz-$ 平面, $zx-$ 平面の共有点は, 原点 $(0,0,0)$ である. 3 次元空間内の次の 3 つの平面を考える. ここで, a は定数とする.

$$\text{平面 } S_1=\{(x,y,z)\mid x-y+2z=2\}$$

$$\text{平面 } S_2=\{(x,y,z)\mid 2x+3y+z=3\}$$

$$\text{平面 } S_3=\{(x,y,z)\mid 4x+y+az=1\}$$

このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) $a=4$ とする. このとき, 3 つの平面 $S_1,\ S_2,\ S_3$ の共有点を求めよ.

(2) $a=5$ とする. このとき, 3 つの平面 $S_1,\ S_2,\ S_3$ の共有点は存在するかどうか, 理由を述べて答えよ.

(九州大 2010) (m20104711)

0.594 直交座標を (x,y), 極座標を (r,θ) とするとき, 曲線 $C\ :\ r=2(1+\cos\theta)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸, y 軸との交点の直交座標を求めて, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r\leqq 2(1+\cos\theta),\ y\geqq 0,\ y\leqq -\dfrac{1}{2}x+2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012) (m20124703)

0.595 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ -x-1\leq y\leq -x+1,\ x-1\leq y\leq x+1\right\}$ とおく.

(1) 1 次変換 $u=x+y\ ,\ v=x-y$ によって D が移される uv平面上の集合を図示せよ .

(2) (1) の変数変換において, ヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を求めよ.

(3) 重積分

$$\iint_D (x+y)^2 e^{x-y} dxdy$$

を求めよ.

(九州大 2012) (m20124710)

0.596 (1) 次の定数係数線形常微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + ay = F(x)$$

ただし，x, $y(x)$, $F(x)$ は実数である.

(a) $F(x) = 0$, $a = 0$ のときの一般解を求めよ.

(b) $F(x) = 0$, $a = 1$ のときの一般解を求めよ.

(c) $F(x) = 0$, $a = 2$ のときの一般解を求めよ.

(d) $F(x) = e^{2x}$, $a = 1$ とする．初期条件 $y(0) = 1$, $\dfrac{dy}{dx}(0) = 0$ を満足する解を求めよ.

(2) 常微分方程式

$$y\frac{dy}{dx} = -4(x-1)\ , \qquad y(1) = 2$$

の解が描く曲線を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2014) (m20144702)

0.597 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

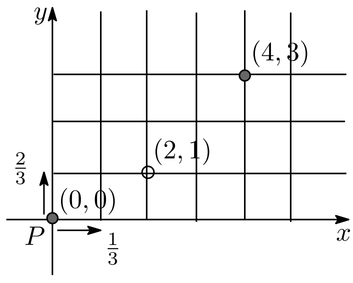
(九州大 2015) (m20154703)

0.598 点 P は原点 $(0,0)$ から開始し，平面格子点上を移動する．1 回の移動において，

P は確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸の正の方向に 1 移動し，

確率 $\dfrac{2}{3}$ で y 軸の正の方向に 1 移動する.

以下の問いに答えよ.



(1) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方の数を求めよ.

(2) 点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する確率を求めよ.

(3) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，
点 $(2,1)$ を通らない通り方の数を求めよ.

(4) 点 P が通り得る，原点から点 $(4,3)$ に至る通り方ののうち，点 P の座標 (x,y) が移動中常に $4y \leq 3x$ を満たす通り方の数を求めよ.

(5) 点 P の座標 (x,y) が 7 回の移動中常に $4y \leq 3x$ を満たすとき，点 P が 7 回の移動後に点 $(4,3)$ に到達する条件付き確率を求めよ.

(九州大 2015) (m20154705)

0.599 a, b を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\text{平面 } S_1 = \left\{(x, y, z) \,|\, x + y + z = 1\right\}$$
$$\text{平面 } S_2 = \left\{(x, y, z) \,|\, 2x + 3y + 4z = 7\right\}$$
$$\text{平面 } S_3 = \left\{(x, y, z) \,|\, 4x + 6y + az = b\right\}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 7$ とし，b は任意の値に固定する．3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点となることを示せ．また，その点を b を用いて表せ．

(2) $a = 8$ とする，このとき，3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が空集合にならないための b に関する条件を求めよ．また，そのとき，この共通部分は「1 点」「直線」「平面」のいずれになるか，理由を述べて答えよ．

(九州大 2015)　　(m20154707)

0.600 a は $a > 0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を，次のように定義する．

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y < x < a\}$$
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $0 < x < a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^x f(x, y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x, y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.601 $a,\ b,\ c,\ r$ を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\text{平面 } S_1 = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = a\}$$
$$\text{平面 } S_2 = \{(x, y, z) \mid -2x + y + z = b\}$$
$$\text{平面 } S_3 = \{(x, y, z) \mid 2x + 5y + rz = c\}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 任意の $a,\ b,\ c$ の値に対して常に 3 つの平面の共通部分 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点となるための r に関する条件を求めよ．

(2) r が前問 (1) の条件を満たさないとする． このとき，以下の (i) と (ii) のそれぞれについて，$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は「空集合」「1 点」「直線」「平面」のいずれになるかを答えよ． 「空集合」となる場合には，その理由を示すこと．それ以外の場合には，集合 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を具体的に求めること．

(i) $a = b = c = 0$ の場合．

(ii) $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ の場合．

(九州大 2018)　　(m20184706)

0.602 xy 座標平面上の点 P の移動について考える.

時刻 $t=n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n=(x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0)=(1,s)$ で与えられるとする.

以下の問いに答えよ.

(1) (x_n,y_n) を n と s を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.603 直交座標系において，x,y,z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ とする．ベクトル場 $\boldsymbol{A}=(y^3z/3)\boldsymbol{k}$ と，xy 平面，yz 平面，zx 平面で切り取られた平面 $2x+2y+z=2$ が作る三角形領域 S について，以下の各問いに答えよ.

(1) $\nabla\times\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の S に対する面積分を求めよ.

(3) S を囲む閉曲線 C に対して，C を構成する三つの各線分の位置ベクトルをそれぞれ x と y で表せ.

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う線積分を，三つの各線分に沿う線積分を計算して求めよ．ただし，線積分の方向は原点から見て時計回りの方向とする.

(九州大 2019)　　(m20194704)

0.604 2 次元実平面上の閉区間 $D,\ D_+$ を

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2-4\leqq y^2\leqq x^2-1\ \text{かつ}\ 4\leqq x^2+y^2\leqq 9\right\}$

$D_+=D\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x\geqq 0\ \text{かつ}\ y\geqq 0\right\}$

とするとき，次の重積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_+}xydxdy$　　(2) $\displaystyle\iint_{D}xydxdy$

(九州大 2019)　　(m20194706)

0.605 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{p}'=A\boldsymbol{p}\,,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ.

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ.

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}'_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{p}\neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ．$\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x,y,z の条件を示せ.

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.606 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) を xy 平面上の相異なる 3 点とする．また，$|M|$ は正方行列 M の行列式を表すこととする．このとき，次の各問に答えよ.

(1) 正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．3 点 (X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，(X_3, Y_3) が同一直線上に存在するとき $|A| = 0$ となることを示せ.

(2) 変数 x, y に対して，正方行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {X_1}^2 + {Y_1}^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ {X_2}^2 + {Y_2}^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ {X_3}^2 + {Y_3}^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．さらに，$\triangle_{i,j}$ を B の (i, j)-小行列式，つまり，B の第 i 行と第 j 列をとり除いて得られる 3×3 行列の行列式とする．B の第 1 行に関する余因子展開ににより，小行列式を用いて B の行列式を表せ.

(3) 前問の行列 B が $|B| = 0$ を満たすとき，変数 x, y が満たす方程式を xy 平面上に図示せよ.

(九州大 2021)　　(m20214706)

0.607 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ.
イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ.

(2) 原点を中心とした単位円 C : $x^2 + y^2 = 1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ.

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される.

$$E \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア～ウを埋めよ.

$$E' \ : \ \left(\boxed{\text{ア}}\right) x^2 + \left(\boxed{\text{イ}}\right) xy + \left(\boxed{\text{ウ}}\right) y^2 = 1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.608 曲面 $z = x^2 + y^2$ の点 $(3, 4, 25)$ における接平面と法線の式を求めよ.

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034803)

0.609 平面上の直線 l を $l \ : \ y = (\tan\theta)x \ \ (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ.

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054919)

0.610 放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054934)

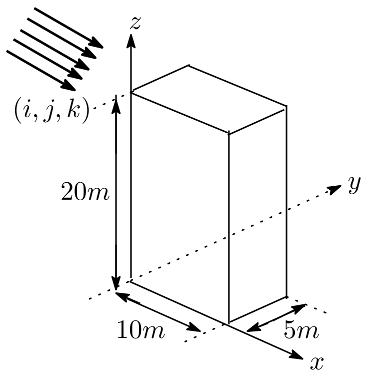
0.611 平面内に点 P があり，これを $x-y$ 座標系で表示すればその座標値は $(1,1)$ である．いま，$x-y$ 座標系を反時計回りに 75 度回転させたものを $x'-y'$ 座標系とするとき，点 P の座標値を $x'-y'$ 座標系で表示せよ.（ヒント：$75 = 30 + 45$）

(佐賀大 2006)　　(m20064945)

0.612 直方体のビルに太陽光があたっている.
ビルに対して，右図のように x−y−z 座標系を設定したときに，太陽光はベクトル (i,j,k) と平行な方向に進行するものとする．ただし,

$$i^2 + j^2 + k^2 = 1$$

であるとする．このビルにできる影の面積を i,j,k により表せ．なお，地表面は完全な平面になっているものとする，また，$i > 0,\ j > 0,\ k < 0$ とする.



(佐賀大 2007)　　(m20074929)

0.613 (1) $x-y$ 平面上の直線 $x+y-1=0$ は次の行列 A で表される 1 次変換によってどのように移されるか.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $x-y$ 平面上のすべての点は次の行列 B で表される 1 次変換によってどのように移されるか.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) 一般に，平面上のすべての点は 1 次変換によって平面内の別の点に移される．しかし (2) の場合はそうはならない．この理由を一つ示せ.

(4) 次の行列 C が対角化できない場合の t の値を求めよ．ただし t は実数とする.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2008)　　(m20084902)

0.614 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0,y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a,0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y' = \dfrac{dy}{dt},\ \theta' = \dfrac{d\theta}{dt}$ とする.

(1) 問題の関係を図で示せ.

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする.

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ.

(佐賀大 2008)　　(m20084904)

0.615 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ m & 3 \end{bmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，次の問いに答えよ．ただし，$m > 0$ とする.

(1) $y = ax + 3$ で表される直線 ℓ が 1 次変換 f によってそれ自身に写されるとき，a と m の値を求めよ．

(2) 直線 ℓ 上にあって 1 次変換 f で不変な点を (1) の結果を使って求めよ．

(3) 平面上のすべての点が 1 次変換 f によって原点を通るある直線に写されるとき，m の値を求め，なぜそうなるのかを説明せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094911)

0.616 図 (a) に示すような原点を中心とし，半径 1 から半径 2 までを領域とするドーナツ状の平面 S が存在し，面密度が $\rho = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{r^2}$ （ただし r は原点から (x, y) までの距離）で与えられるとき，この平面全体の質量を求めよ．

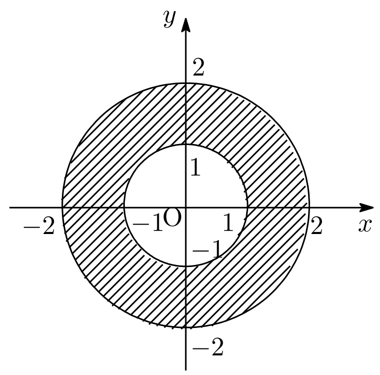


図 (a)

(佐賀大 2009)　　(m20094917)

0.617 空間内で $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$ と表示される円柱の xy 平面 $(z = 0)$ より上，かつ，平面 $z = x$ より下にある部分の体積を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094925)

0.618 次の問いに答えよ．

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ．

(2) 原点の周りに $\theta = 45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ．

(3) f_A，f_B の順番で変換する合成変換を求め，その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.619 x, y, z 軸からなる 3 次元空間内の平面 $\ell x + my + nz = 1$ への原点 $(0, 0, 0)$ からの最短距離を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134905)

0.620 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x', y') = \big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.621　xy 平面上の原点回りの回転角 -45°, 60°の 1 次変換を , それぞれ f, g とする．次の問いに答えよ．

(1)　合成関数 $g \circ f$ の行列を求めよ．

(2)　点 $(1,1)$ を合成関数 $g \circ f$ で写像した点を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154923)

0.622　xy 平面上の集合 $\left\{(x,y) \mid x^2+y^2<R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R>2$ を満たすとする．

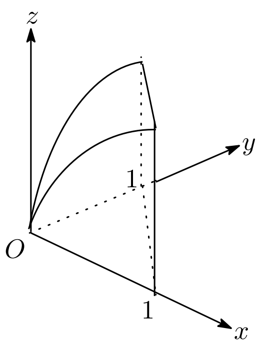
(1)　$\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい．

(2)　集合 D を $D=\left\{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I=\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ を求めなさい．

(佐賀大 2018)　　(m20184903)

0.623　図に示されている，曲線 $z=\sqrt{x+y}$ と平面 $x+y=1$ および三つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めよ．



(佐賀大 2018)　　(m20184911)

0.624　円柱面 $x^2+y^2=1$ (z は任意) と 2 平面 $z=y$ および $z=0$ で囲まれた立体について考える．次の問いに答えよ．

(1)　円柱面と 2 平面で囲まれた領域 D を式で表せ．

(2)　円柱面と 2 平面で囲まれた立体の体積を求めるための積分の式を示せ．

(3)　(2) の積分を求めよ．

(佐賀大 2018)　　(m20184918)

0.625　(1)　平面上のベクトル $a=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を求めよ．

(2)　行列 A を n 次正方行列，行列 I を n 次単位行列とするとき，つぎを求めよ．

$$\begin{bmatrix} I-A & A \\ -A & I+A \end{bmatrix}^3$$

(佐賀大 2022)　　(m20224903)

0.626 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, $2\times\ 2$ 行列を $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $< \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB} >$ で表す.

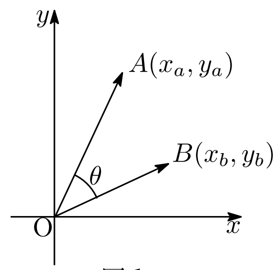


図 1

(1) $< \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB} >$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $< \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB} >$ を x, y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,
$$4S^2=|M|^2$$
が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055004)

0.627 以下の問に答えよ.

(1) xy 平面内の円の方程式は一般に
$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0 \qquad ①$$
で表されることを示せ. ただし, A, B, C, D は実数である.

(2) 複素平面内の円の方程式は一般に
$$\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0 \qquad ②$$
で表されることを示せ. ただし, $z=x+iy$, α , γ は実数, β は複素数である.

(長崎大 2005) (m20055006)

0.628 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$ を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, $\quad D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$, $\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき，曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075004)

0.629 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\,,\ x^2\le y\le 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ.

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ.
$$\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases} \qquad (0\le t\le 2\pi)$$

(長崎大 2009) (m20095008)

0.630 (1) 不定積分 $\displaystyle\int(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ.

(2) $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ x\ge 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ.
$$I=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.631 平面 P が $x + y - z + 1 = 0$, 直線 f が $\dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{4}$ で与えられるとき, 平面 P と直線 f の交点を求めよ.

(長崎大 2010)　　(m20105016)

0.632 いま，２次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \leq \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ が成り立つとき，この２点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) ２点間の関係 L について，下記の①〜③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この２点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，２次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．
このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．
[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①〜③のいずれかを入れよ．

関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．
さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．
以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　　(m20025101)

0.633 平面上の線型変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ．

(1) この変換により点 $(3, 0)$ にうつされる点を求めよ．

(2) この変換により直線 $x - 3y + 2 = 0$ がどのような図形にうつされるかを述べよ．

(大分大 2002)　　(m20025104)

0.634 平面上の線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) この変換は点 $(1,\ -1)$, $(1,\ 2)$ をそれぞれ点 $(3,\ -7)$, $(-3,\ 5)$ に移すとする．a, b, c, d を求めなさい．

(2) この変換により，直線 $x + y = 0$ がどのような図形に移されるかを述べなさい．ただし，a, b, c, d は (1) で求めた値とする．

(大分大 2007)　　(m20075101)

0.635 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 曲線 C の概形を示せ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(大分大 2009) (m20095104)

0.636 座標平面上を動く点 P の時刻 t における位置が

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t < +\infty)$$

で与えられている.

(1) $t = \dfrac{\pi}{6}$ のときの点 P の位置を求めよ.

(2) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のときの点 P の速度ベクトルを求めよ.

(3) $0 \leqq\ t \leqq\ 4\pi$ の間に点 P の進む距離を求めよ.

(大分大 2010) (m20105101)

0.637 xy 平面上の集合 $D = \left\{ (x, y)\ \middle|\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ とするとき，2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}}}dxdy$ を求めよ.

(熊本大 2006) (m20065203)

0.638 xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい.

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである.

$$固有値\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$固有値\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい.

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2013) (m20135202)

0.639 xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

α, β を x, y を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を α, β, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.640 3 点 $(1,2,3)$, $(1,-1,2)$, $(2,3,1)$ を通る平面の方程式を求めよ．

(熊本大 2021)　　(m20215204)

0.641 3 点 $O(0,0,0), A(1,2,1), B(2,0,-1)$ がある．2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で張られる平面上の点で点 $C(6,1,5)$ までの距離を最小にする点 X の座標を求めよ．

(宮崎大 2001)　　(m20015305)

0.642 2 変数関数 $z = f(x,y) = e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の上の点 $P\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

（宮崎大 2004）　　(m20045301)

0.643 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, D : $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2$ の値を，次の指示に従って求めよ．

(1) 積分領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) (x,y) を極座標 (r,θ) で表し，積分領域 D に対する (r,θ) の範囲を求めよ．

(3) ヤコビアン $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$ を求めよ．

(4) (3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分の値を求めよ．

(宮崎大 2004)　　(m20045303)

0.644 次の各問に答えよ．

(1) 平面上の点 $P(2,3)$ および点 $Q(1,4)$ を点 $P'(8,3)$ および点 $Q'(9,4)$ にそれぞれ移す 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(宮崎大 2005)　　(m20055301)

0.645　以下の各問に答えよ．

(1)　平面内の集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 1 \leq x \leq e\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

と定義する．集合 D を xy 座標平面上に図示せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2)　(1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xydxdy$$

(宮崎大 2005)　　(m20055304)

0.646　平面内の集合 D を　$D = \{(x, y) \mid x-1 \leqq\ y \leqq\ x+1\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\}$　と定義する．

(1)　D を xy 座標平面上に図示せよ．　　(2) 次の重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$

(宮崎大 2006)　　(m20065304)

0.647　(1)　平面内の集合 D を，　$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq\ y \leqq\ 1,\ y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$ と定義する．
集合 D を座標平面上に図示せよ．

(2)　(1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.648　(1)　平面内の領域　$D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqq\ 1,\ x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0 \right\}$
を xy 平面上に図示せよ．ただし，a, b は正の定数とする．

(2)　$x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$　$(r \geqq\ 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ と変換したとき，領域 D に対応する $r\theta$ 平面上の領域 E を不等式で表し，またそれを図示せよ．

(3)　ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ．

(4)　(3) で求めたヤコビアンを用いて，重積分 $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ の値を求めよ．

(宮崎大 2008)　　(m20085303)

0.649　重積分

$$I = \iint_D (1+xy)dxdy\ ,\quad D = \{(x, y) \mid y^2 \leqq\ x \leqq\ 2y\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1)　集合 D を xy 座標平面上に図示せよ．

(2)　重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2009)　　(m20095304)

0.650　xy 平面上で $x = 2,\ y = 1,\ y = x^2$ によって囲まれた領域を D とするとき, 次の各問に答えよ．

(1)　領域 D を xy 座標平面上に図示せよ．

(2)　重積分 $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\, dxdy$ の値を求めよ．

(宮崎大 2010)　　(m20105304)

0.651　重積分

$$I = \iint_D (x+y^2)dxdy\ ,\qquad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y \geqq\ x^2,\ x-y \geqq\ 0 \right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2013)　　(m20135303)

0.652 重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2} dxdy\ , \quad D = \{(x,y) \mid 1 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 4,\ y \geqq\ x\}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2014)　　(m20145302)

0.653 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする.

(1) 2 つの複素数 $1-i$ と $(1-i)^2$ を複素数平面上に図示せよ.

(2) $(1-i)^5$ を計算し，$x+yi$ の形（x, y は実数）で表せ.

(宮崎大 2015)　　(m20155301)

0.654 2 つの 2 変数関数

$$f(x,y) = x^3+2x^2y-4x+y\ \ ,$$
$$g(x,y) = e^{-x^2-y^1}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ における値 $f(0,0)$, $g(0,0)$, そして $(x,y)=(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$ を求めよ.

(2) $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\big(0,0,f(0,0)\big)$, $\big(0,0,g(0,0)\big)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ.
ただし，曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\big(a,b,h(a,b)\big)$ における接平面の方程式は
$$z-h(a,b) = h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$$
である.

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば，交わりの図形を表す方程式を求めよ．交わらないならばその理由を書け.

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.655 重積分

$$I = \iint_D xy\,dxdy\,, \quad D = \left\{(x,y) \,|\, x \geqq\ 0,\ y \geqq\ 0,\ x^2+\frac{y^2}{4} \leqq\ 1\right\}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) 値域 D を xy 平面上に図示せよ.

(2) 重積分 I の値を求めよ.

(宮崎大 2015)　　(m20155304)

0.656 複素数 $z=2+2\sqrt{3}i$ について，次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする.

(1) z を複素平面上に図示せよ.

(2) 絶対値 $|z|$ と偏角 $\arg z$ の値を，それぞれ求めよ．ただし，$0 \leqq \arg z < 2\pi$ とする．

(3) z を極形式で表せ．

(宮崎大 2016)　　(m20165302)

0.657 重積分

$$I = \iint_D \sin\frac{2x+y}{9}dxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ 0 \leqq\ y \leqq\ x,\ x + \frac{y}{2} \leqq\ 3\pi\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 等式 $I = \int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}} \left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}} \sin\frac{2x+y}{9}dx \right) dy$ の空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{エ}$ に当てはまる数値あるいは数式を答えよ．

(3) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2016)　　(m20165305)

0.658 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 絶対値 2，偏角 $\frac{5}{3}\pi$ の複素数を，$x + yi$ ($x,\ y$ は実数) の形で表し，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^3 = -i$ のすべての解を，$x + yi$ ($x,\ y$ は実数) の形で求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175301)

0.659 重積分

$$I = \iint_D xdxdy\ , \qquad D = \left\{(x, y)\ \middle|\ \frac{1}{4}x^2 \leqq y \leqq \frac{1}{2}x\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2017)　　(m20175305)

0.660 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める．

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す．

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする．

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ．

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I = \int_{\boxed{ア}}^{\boxed{イ}} \left(\int_{\boxed{ウ}}^{\boxed{エ}} \boxed{\quad オ \quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{ア}$〜$\boxed{オ}$ に当てはまる数または式を答えよ．

(4) I を計算することによって，$V = \frac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ．

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.661 次の各問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1-\sqrt{3}i$ を，複素数平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^2=1-\sqrt{3}i$ のすべての解を，$x+yi$ (x,y は実数) の形で求めよ．

(宮崎大 2019)　　(m20195301)

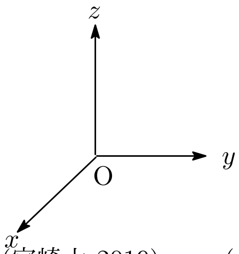
0.662 空間において，方程式 $2x+y+2z-2=0$ で表される平面を α とする．これについて，次の各問に答えよ．

(1) 平面 α を，右図のような座標空間の中に図示せよ．

(2) 平面 α，および，次の 3 つの平面

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

で囲まれた部分の体積を，<u>重積分を用いて</u>求めよ．



(宮崎大 2019)　　(m20195304)

0.663 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの複素数 $\sqrt{3}-i$ と $(\sqrt{3}-i)^{-1}$ を，複素平面上に図示せよ．

(2) $(\sqrt{3}-i)^{-6}$ を計算し，$x+yi$（x,y は実数）の形で求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205301)

0.664 重積分

$$I=\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, \qquad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq 2\right\}$$

について，次の各問に答えよ．

(1) 領域 D を，xy 平面上に図示せよ．

(2) 重積分 I の値を求めよ．

(宮崎大 2020)　　(m20205304)

0.665 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ について，次の各問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ．

(2) 1 次変換 f による，正方形 $\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 2\right\}$ の像を座標平面上に図示せよ．

(3) 1 次変換 f による，直線 $x+y=3$ の像を座標平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215302)

0.666 次の各問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 2 つの虚数 $\alpha=1+2i,\ \beta=4-2i$ に対して，$\gamma=\dfrac{2\alpha\overline{\beta}}{2\alpha-3\beta}$ とする．γ を $x+yi$（x,y は実数）の形で表し，複素平面上に図示せよ．ただし，$\overline{\beta}$ は β の共役複素数を表す．

(2) 複素数 z についての方程式 $z^{-4}=16$ の解をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ．

(宮崎大 2021)　　(m20215304)

0.667 $O-x,y,z$ 座標系における二つの平面

$$x+2y+2z=3 \qquad\qquad 3x+3y+z=1$$

に関して以下の問いに答えよ.

(1) 二つの平面の交線の方向ベクトルを求めよ.

(2) 二つの平面の交角を求めよ.

（鹿児島大 2001） (m20015413)

0.668 行列 $[A]=\begin{bmatrix} a & 10 & 2 \\ b & 5 & 1 \\ 15 & c & 5 \end{bmatrix}$ $(a,b,c$ は実数) に関して以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $[A]$ が正則となる条件を，a,b,c を用いて表せ.

(2) 行列 $[A]$ が正則でないのは，平面上の三直線

$$l_1: ax+10y=2 \qquad\qquad l_2: bx+5y=1 \qquad\qquad l_3: 15x+cy=5$$

に対して，どのような場合か．この場合の a,b,c の値を求めよ.

（鹿児島大 2001） (m20015415)

0.669 平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において, 次の問に答えなさい.

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには, $\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい. 回転変換によって得られるベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s}=\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a,b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

0.670 直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \right) \tag{1}$$

で定義される．以下の問に答えよ.

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ.

$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ.

(鹿児島大 2006)　　(m20065403)

0.671 空間に $o-xyz$ 直交座標系をとる．空間内の平面の方程式は

$$ax+by+cz+d=0\ ,\quad (a,b,c)\neq 0 \qquad (1)$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ は式 (1) で与えられる平面と垂直であることを示せ．

(2) 式 (1) を $\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ で割って，

$$lx+my+nz=p\ ,\quad (p\geq 0) \qquad (2)$$

と表すことができる．このとき p は原点 O からこの平面への垂直距離を表すことを示せ．

(3) 空間内の一点 $Q(x_1,y_1,z_1)$ から式 (2) で表される平面への距離 h は，次式で与えられることを示せ．

$$h=|\ lx_1+my_1+nz_1-p\ |$$

(鹿児島大 2006)　　(m20065404)

0.672 座標平面上の点 (x,y) を点 (x',y') に変換する行列 T を求めよ．ただし $x=-2y', y=x'$ とする．

(鹿児島大 2006)　　(m20065410)

0.673 xyz 空間内の 4 点 $A(1,1,6)$, $B(2,-1,2)$, $C(-3,2,1)$, $D(x,-2,3)$ を考える．

(1) $\overrightarrow{a}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$（$s,t$ は実数）とするとき，$\overrightarrow{a}$ の x, y, z 成分を求めなさい．

(2) 4 点 A, B, C, D が同一平面上にあるとき，x の値を求めなさい．

(鹿児島大 2007)　　(m20075408)

0.674 (1) 2 点 $P_1(1,-1,1)$, $P_2(3,1,2)$ を通る直線の式を求めよ．

(2) x 軸，y 軸，z 軸との切片が，それぞれ，3，-5，4 である平面の方程式を求めよ．

(3) 座標の原点を $O(0,0,0)$，2 点 P_1,P_2 の座標を，それぞれ $(2,1,3)$, $(4,0,1)$ とする．$\overline{OP_1}$ と $\overline{OP_2}$ のなす角を求めよ．

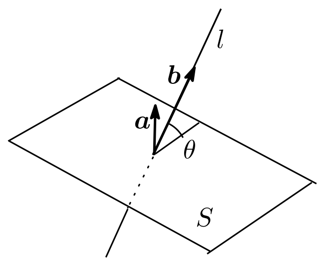
(4) 2 つの行列 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ について，$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ が成立するか調べよ．

(5) 行列 $\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2007)　　(m20075415)

0.675 次のベクトルに関する問いに答えよ．

(1) 右図のように，$\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 $\theta\ (\leq 90^\circ)$ で交わる直線 l の上に存在するベクトルである．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ．



(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ．

$S_1\ :\ x+2y+2z=3$　　　$S_2\ :\ 3x+3y=1$

(鹿児島大 2008)　　(m20085403)

0.676 空間に直交座標系 (x,y,z) をとる．点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ を含む平面の方程式は，

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ と書くことができる．以下の設問に答えなさい．

(1) ベクトル (a, b, c) はこの平面に垂直であることを示せ.

(2) 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を含み，異なる二方向ベクトル (u_1, v_1, w_1)，(u_2, v_2, w_2) に平行な平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095403)

0.677　空間に直交座標系 (x, y, z) をとる．以下の設問に答えなさい.

(1) 点 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ および $(0, 0, 1)$ を含む平面の方程式を求めよ.

(2) この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (l, m, n)$ $\quad (\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1)$ を求めよ.

(3) 座標原点からこの平面までの距離 s を求めよ.

(鹿児島大 2009)　　(m20095415)

0.678　直交座標系 $O-XYZ$ において，点 $A(1, -3, 2)$ を含む平面 C_A : $-2x+y+3z-1 = 0$，点 $B(1, -1, -2)$ を含む平面 C_B : $3x + 2y + z + 1 = 0$ がある．次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．平面 C_A の点 A を通る法線の方程式，平面 C_B の点 B を通る法線の方程式をそれぞれ求めよ.

(2) 両平面の交線の単位方向ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2011)　　(m20115404)

0.679　xy 平面上に点 $A(1, 5)$，点 $B(4, 3)$，点 $C(5, 8)$ があるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 点 B から線分 AC へ垂線を下ろしたとき，その足である点 P の座標を求めなさい.

(2) 線分 AB を $1 : 2$ に内分する点 Q の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2011)　　(m20115412)

0.680　直交座標系 $O - XYZ$ において，平面 C_A : $x + y = 0$ と平面 C_B : $5y + z = 0$ がある．次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．さらに，両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ.

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして，点 $P(1, 2, 1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125410)

0.681　曲線 : $y = x^3$ を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転面と，$y = 1$，$y = 8$ を通って y 軸に垂直な 2 平面とで囲まれた領域の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125415)

0.682　x 軸と y 軸からなる直交座標平面上に点 $A(2, 1)$ と点 $B(2, -1)$ があるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A の y 軸に関して対称な点 P の座標を求めなさい.

(2) 座標平面の原点を O としたとき，$OA \perp OQ$ かつ $OA = OQ$ となるような，第 2 象限にある点 Q の座標を求めなさい.

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を求めなさい．また，$\angle AOB$ を θ としたとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125419)

0.683 直交座標系 $O-xyz$ において，$\overrightarrow{OA}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$ および $\overrightarrow{OC}=(0,0,1)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, 点 B および点 C を通る平面 C_1 の方程式を求めよ．

(2) 原点 O から平面 C_1 に垂線を下ろしたときの交点を D とするとき，$\overrightarrow{OD}$ を求めよ．

(3) 点 $E(3,1,1)$ を通る平面 C_2 : $x+py+qz=0$ と平面 C_1 が直交するとき，p および q の値を求めよ．

(鹿児島大 2013)　　(m20135404)

0.684 $O-xyz$ 座標系において，次の法線ベクトルをもつ二つの平面に関して以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{n}_1 = 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の単位ベクトルを表す．

(1) 二つの平面が直交することを示せ．

(2) 二つの平面に平行な直線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2016)　　(m20165404)

0.685 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ が正則であるかどうかを調べよ．

(2) $x-y$ 平面上において，次に示す三直線の交点の座標 (x,y) を求めよ．

$l_1:\ x+y=5$

$l_2:\ x+2y=-1$

$l_3:\ x+3y=-7$

(鹿児島大 2016)　　(m20165405)

0.686 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$, 点 $B(0,2,0)$ および点 $C(-1,-2,3)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) この 3 点を通る平面の方程式を求めよ．

(2) 求めた平面に直交な法線の単位方向ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2017)　　(m20175404)

0.687 原点 $O(0,0,0)$ を有する直交座標系 xyz において，点 $A(1,0,1)$, 点 $B(1,1,0)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB のなす角 θ を求めよ．

(2) 原点 O を中心とし，表面が線分 AB に接する球の方程式を求めよ．

(3) 点 O, A, B を含む平面に平行で，点 $C(1,1,1)$ を含む平面の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185404)

0.688 O を原点とする座標平面上に点 $P(1,2)$, 点 $Q(3,3)$, 点 $R(a,b)$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を 2 辺とする四角形 $OPQR$ が平行四辺形となるときの a と b の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ が直交し $\left|\overrightarrow{OR}\right| = 1$ であるときの a と b の値を求めなさい. ただし, $a > 0$ とする.

(鹿児島大 2018)　　(m20185408)

0.689 直線 $\dfrac{x-1}{2} = y-8 = \dfrac{z-8}{3}$ と xy 平面との交点を求めなさい.

(鹿児島大 2018)　　(m20185438)

0.690 以下の問いに答えなさい.

(1) 平面 P の方程式を $x+y+\alpha z+1=0$, 平面 Q の方程式を $x+\alpha y+z-1=0$ とする. 平面 P と Q のなす角が直角となるような α の値を求めなさい.

(2) ベクトル $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形従属となるような実数 β の値をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215408)

0.691 (1) 空間内の 3 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$ を通る平面の方程式を求めなさい. ただし, ここでの座標系は直交座標系とする.

(2) 原点から平面までの最短距離を求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215421)

0.692 直交座標系 $O-xyz$ において, 点 $A(1,1,-1)$, 点 $B(2,-2,1)$ および点 $C(-1,4,-3)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB と線分 AC を隣り合う 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2) 点 A, 点 B, 点 C を通る平面の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2022)　　(m20225404)

0.693 座標平面上の点 $P(a,a)$, 点 $Q(1,1)$, 点 $R(3,2)$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とベクトル $\overrightarrow{PR}$ が直交するときの a の値を求めなさい. ただし, $\overrightarrow{PQ}$ は零ベクトルではないものとする.

(2) $a=-1$ とするときの三角形 PQR の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225408)

0.694 c を正の実数とする. xy 平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{1}{c}x^2$ と $y^2 = cx$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を 1 つのグラフに描きなさい.

(2) 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022)　　(m20225410)

0.695 括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある．

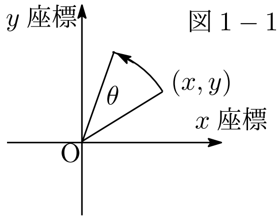


図 $1-1$

2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）．

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを

正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [\text{ア}\quad] \\ [\text{イ}\quad] \end{pmatrix}$ となる．

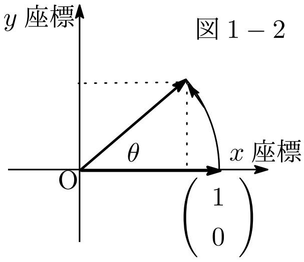


図 $1-2$

同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [\text{ウ}\quad] \\ [\text{エ}\quad] \end{pmatrix}$ に移る．

よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は,

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので,

$\begin{pmatrix} [\text{オ}\quad] & [\text{キ}\quad] \\ [\text{カ}\quad] & [\text{ク}\quad] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.696 直交座標の点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$$

とする. また, スカラー関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 2x + y + 3z$$

とする. このとき以下の問の答えよ. ただし, ∇ は次のベクトル演算子を表す.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = \nabla f$ で定義するとき, $\boldsymbol{n} = (n_x,\ x_y,\ n_z)$ の形で表せ.

(2) 関数 $f(x, y, z)$ をベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ.

(3) $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ は平面を表す方程式である．この平面上にある 2 点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ の内積が $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_2$ となることを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 $f(x, y, z) = 2x + y + 3z = 5$ と垂直になることを示せ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105503)

0.697 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ についてのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times\ \boldsymbol{C})$ は，ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ で形成される平行六面体の体積に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ はすべてが同一平面上にないものとする．

(室蘭工業大 2011)　　(m20115505)

0.698 $x^2 - 2x + 2y^2 - 3 = 0$ を xy 平面へ図示せよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155505)

0.699 三次元座標空間において．ベクトル $(1,2,2)$ に垂直で点 $(1,1,-1)$ を通る平面 a，ベクトル $(1,2,2)$ に垂直で点 $(1,-1,-1)$ を通る平面 b，ベクトル $(3,-4,1)$ に垂直で点 $(1,0,1)$ を通る平面 c の 3 つの平面がある．これらの平面に関する以下の問いに答えよ，

(1) 平面 a を表す式を求めよ．

(香川大 2009)　　(m20095702)

0.700 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ．

$$z=\sqrt{25-x^2-y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ．

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ．

(3) この曲面上の $x=2,\ y=2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする．V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ．
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.701 $z=x^2+y^2$ について次の問いに答えよ．

(1) $w=\log(z)$ の関係があるとき，2 階偏導関数 $w_{xx},\ w_{xy},\ w_{yx},\ w_{yy}$ を求めよ．

(2) 曲面 z と平面 $x+y=2$，ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ．ただし，体積 V は計算で求めなくともよい．

(香川大 2016)　　(m20165702)

0.702 $z=2y^3-x^2y+3$ の $(x,y)=(2,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(香川大 2018)　　(m20185702)

0.703 $z=2x^3+x^2y+3y^2+1$ の $x=1,\ y=3$ における接平面の方程式を求めよ．

(香川大 2021)　　(m20215702)

0.704 円柱 : $x^2+y^2\leq 1$ のうち放物曲面 : $z=2-x^2-y^2$ と平面 : $z=0$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

(香川大 2022)　　(m20225704)

0.705 次の問に答えよ．

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ $(a>0)$.

$$I=\iint_D y\,dxdy$$

(2) 平面 $z=y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2+y^2\leq a^2$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ $(a>0)$.

(島根大 2005)　　(m20055813)

0.706 次の重積分を求めよ．a は正定数とする．　$\displaystyle\iint_D y\,dxdy$　　ただし D は $(x,y)-$ 平面内にある円 $(x-a)^2+y^2\leq a^2$ の上半分，すなわち $y>0$ を満たす部分である．

(島根大 2008)　　(m20085804)

0.707 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x=\tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ．

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は　$f(x)\cong 1-x^2+x^4$　であることを導け．

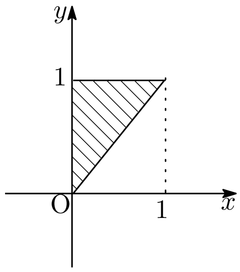
(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け．

$$\tan^{-1}x\cong x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ ただし，} |x|<1\text{ })$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.708 (1) $\displaystyle\int_a^1 xe^{-x^2}\,dx$ を計算せよ．

(2) 図 1 の斜線部で示すような, xy 平面上の領域を D とする. 領域 D における積分 $\displaystyle\iint_D e^{-y^2}\,dxdy$ を計算せよ．



(3) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_0^{\sqrt{x}}(x^2+y^2)\,dy\right\}dx$ を計算せよ．

(島根大 2010)　　(m20105813)

0.709 平面座標系 $(o-xy)$ において，曲線 C を $y=x^2-4x+3$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 $x_1,\ x_2\ \ (x_1>x_2)$ を求めよ．

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を描き，頂点及び x 軸との交点を図示せよ．

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.710 $D=\left\{(x,y):5x^2-6xy+5y^2\leq 4,\ y\geq x\right\}$ とする．

(1) 変数変換 $x=u-\dfrac{v}{2},\ y=u+\dfrac{v}{2}$ を考える．この変換により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_D \exp\left(\frac{5x^2-6xy+5y^2}{4}\right)dxdy$ の値を求めよ．ただし $\exp(x)=e^x$ である．

(島根大 2015)　　(m20155807)

0.711 (1) $D=\{(x,y)\,:\,0<x,\ 0<y,\ x+y<1\}$ とする．変数変換 $x=u-uv,\ y=uv$ により，D にうつされる (u,v) 平面の領域を求めよ．

(2) D は問 (1) と同じとする．重積分 $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dxdy$ を計算せよ．

(島根大 2017)　　(m20175807)

0.712 xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.713 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y = x^3 - 2x^2 + \dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である．残りの 2 つの点を $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ とするとき，点 $A(x_1, y_1)$ および点 $B(x_2, y_2)$ の座標を求めよ．ただし．$x_1 < x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある．この 2 本の接線を ℓ_1, ℓ_2 とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3, y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4, y_4)$ とする．ただし，$x_3 < x_4$ とする．このとき，接線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式および接点 $Q(x_3, y_3)$, $R(x_4, y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

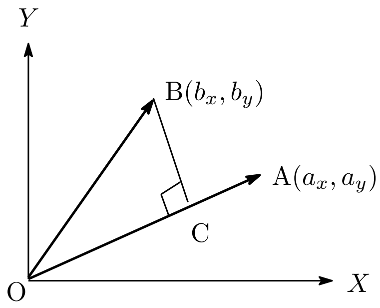
(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5, y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195801)

0.714 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x, a_y) に点 A が，座標 (b_x, b_y) に点 B がある．点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き，垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする．原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と，原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は，X, Y 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる．以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ．

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある．ここで，行列 A は以下で与えられるものとする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき，その k を求めよ． ただし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \mathbf{0}$ とする．

(島根大 2020)　　(m20205802)

0.715 $f(x,y) = \dfrac{4}{(2+x^2+y)^2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ．

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) $a>0$ に対して，$D(a) = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ とおく．
2 重積分　$I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ．

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.716 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき．

(1) 行列式 $\det \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 平面 $-3x+2y+2z=1$ は，一次変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって，どのような図形に移るか．その方程式を示せ．

(首都大 2003)　　(m20035901)

0.717 直交座標系 (x,y,z) における二つのベクトルを $\boldsymbol{a} = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{b} = (-1,-3,0)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) 外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(3) $(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ を方向ベクトルとし，点 $(3,4,7)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(4) (3) で求めた直線と平面 $2x+3y-2z-6=0$ の交点を求めよ．

(首都大 2007)　　(m20075901)

0.718 次の問題に答えなさい．

(1) 二平面 $x+2y-z-4=0$ と $x-y+2z-4=0$ の交線の方程式を求めなさい．

(2) (1) の交線と点 $(0,\ 1,\ 0)$ とを通る平面の方程式を求めなさい．

(首都大 2011)　　(m20115902)

0.719 直交座標系 (x,y,z) における 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (2,-2,1)$ と $\boldsymbol{b} = (1,1,2)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルをすべて求めなさい．

(3) $(0,0,0)$, $(2,-2,1)$, $(1,1,2)$ の 3 点を通る平面の方程式を示しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135902)

0.720 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\k\\3\end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ を求めなさい. ただし, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は内積, $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は外積である.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形従属（1 次従属）となるとき, k の値を求めなさい.

(3) 点 $(0,0,0)$ を通り, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2014)　　(m20145901)

0.721 xyz 座標系において, $A(-1,\ 3,\ 2)$, $B(2,\ 5,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 0)$ の 3 点がある. 以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ をそれぞれ求めなさい.

(2) 2 点 A, B を通る直線の方程式を求めなさい.

(3) 3 点 A, B, C を含む平面の方程式を求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185901)

0.722 平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を f とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) 線形変換 f の表現行列 A を求めなさい.

(2) $x^2-y^2=1$ を線形変換 f により移した曲線の方程式を求めなさい.

(3) (2) で求めた曲線の概形を描きなさい.

(首都大 2018)　　(m20185903)

0.723 点 $A(5,3,1)$ と平面 $\alpha\ :\ x+2y+2z=4$ を考える.

(1) 点 A から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標と垂線の長さを求めなさい.

(2) 平面 α 上に点 $(0,-1,3)$ を中心とした半径 1 の円 C を描く. 点 P は円 C 上の点で, 線分 AP の長さが最大となるものとする. このとき点 P の座標と, 線分 AP の長さを求めなさい;

(3) 3 点 A, P, H を通る平面を求めなさい.

(首都大 2019)　　(m20195901)

0.724 直交座標系 (x,y,z) において, 直線 $\ell : x-1=-y+3=-z-5$ および点 $A(4,5,2)$ に対し, 以下の問いに答えなさい.

(1) ℓ および A を含む平面を α とする. α の方程式を求めなさい.

(2) A から ℓ に垂線 AH を引くとき, H の座標を求めなさい.

(3) 原点 O から α に垂線 OH' を引くとき, H' の座標を求めなさい.

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

0.725 (1) $x^2+y^2 \leqq\ 2x$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ の値を求めよ,

(滋賀県立大 2007)　　(m20076004)

0.726 (1) $x^2+y^2 \leqq 2$ で与えられる平面の領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{2-x^2-y^2}\,dxdy$ の値を求めよ.

(滋賀県立大 2011) (m20116004)

0.727 (1) 3 点 $A(3,2,1)$, $B(1,2,3)$, $C(5,5,5)$ を通る平面 T と直交するベクトルを求めよ.

(2) T と直交し点 $D(3,5,7)$ を通る直線を求めよ.

(滋賀県立大 2013) (m20136003)

0.728 関数 $z=x^2+xy+y^2$ のグラフと xy 平面, および円筒 $x^2+y^2=R^2$ で囲まれた領域の体積を求めよ. ただし, R は正の実数である.

(滋賀県立大 2013) (m20136004)

0.729 不等式 $x^2+y^2 \leqq 2x$ で与えられる xy 平面の領域を D とする.

(1) D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014) (m20146004)

0.730 (1) 平面上の零ベクトルでない任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について, シュワルツの不等式,

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$$

が成立することを示せ.

(2) シュワルツの不等式で等号が成り立つとき, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がどのような関係にあるか答えよ.

(宇都宮大 2010) (m20106101)

0.731 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$, $\boldsymbol{b}=(0,\ 2,\ 0)$, $\boldsymbol{c}=\left(1,\ \sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\right)$ が, いずれも原点 $(0,\ 0,\ 0)$ を始点として存在しているとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角の大きさを求めよ.

(3) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を共に含む平面を α と呼ぶとき, 平面 α と $\boldsymbol{c}$ の成す角の大きさを求めよ.

(宇都宮大 2014) (m20146102)

0.732 座標の定められた空間における平面と直線について, 下の問いに答えよ.

(1) 直線 ℓ は 2 点 $(2,1,3)$ および $(0.-1,1)$ を通り, 直線 m は 2 点 $(4,3,1)$ および $(3,0,2)$ 通る. 直線 ℓ を含み, 直線 m に平行な平面 p の方程式を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(2) 点 $(1,-1,-3)$ を通り, (1) で求めた平面 p と直交する直線を k とする. 平面 p と直線 k の交点を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156101)

0.733 平面上の, 曲線 $y^2=x-1$, および, 直線 $y=x-3$, について下の問いに答えよ.

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. 計算経過も記入せよ.

(宇都宮大 2015) (m20156103)

0.734 平面上の閉領域 D を,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$$

と定める．D における積分 $I = \displaystyle\int_D e^{y^2} dxdy$ について，下の問いに答えよ．

(1) 閉領域 D を図示せよ．途中の過程も記入せよ．

(2) 積分 I を，累次積分 $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d e^{y^2} dx \right) dy$ の形で表し，a, b, c, d を求めよ．なお，a, b, c, d は定数とは限らない．計算経過も記入せよ．

(3) 積分 I の値を計算せよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156104)

0.735 x–y 平面上の曲線 $4x^2 + y^2 = 4$ に囲まれた図形を x 軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196106)

0.736 図 1 のように，点 A, B, C, D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

以下の問に答えよ．

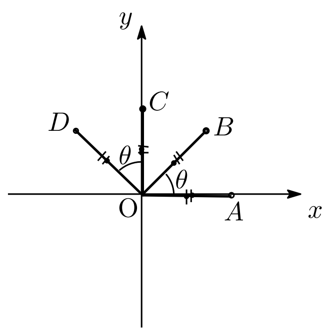


図 1:xy 軸平面

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.737 座標平面上の点 P を次のような 2 つの条件を満たす点 P' にうつす 1 次変換を考える．

(1) 2 点 $P,\ P'$ を結ぶ線分 PP' を $1 : 2$ の比に内分する点 Q は直線 $y = 2x$ 上にある．

(2) 線分 PP' と直線 $y = 2x$ は直交する．

この 1 次変換を表す行列 A を求めよ．

(はこだて未来大 2008)　　(m20086302)

0.738 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(3) $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ が平面となることを示せ.

(はこだて未来大 2009)　　(m20096301)

0.739 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ および, 実ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ によって ${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} = 1$ で表される 2 次曲線 C について, 以下の問いに答えよ. ここで, ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す.

(1) 行列 B を対角化せよ.

(2) 2 次曲線 C を座標平面上に図示せよ.

(はこだて未来大 2014)　　(m20146302)

0.740 t を媒介変数として, 方程式

$$x = \cos^3 t\,, \qquad y = \sin^3 t \qquad \left(0 \leqq\ t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 D の接線のうち, 接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ.

(3) 曲線 D の長さを求めよ.

(はこだて未来大 2014)　　(m20146304)

0.741 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y}$ の $(x, y) = (1, 3)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076505)

0.742 複素平面上において, $z = \pm 1$ および $z = \pm i$ を内部に含み, 正の向きに一周する単一閉曲線を C とする. このとき, 次の積分を求めなさい.

(1) $\displaystyle\int_C \frac{\sin \pi z}{(z-1)^2} dz$　　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$

(和歌山大 2007)　　(m20076510)

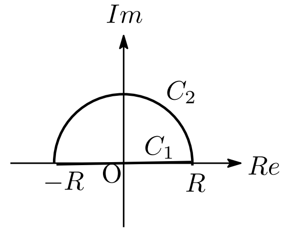
0.743 R を 1 より大きい実数として, 図のように複素平面上で線分 C_1 と上半円周 C_2 からなる曲線 $C = C_1 + C_2$ が与えられている. ただし, 曲線 C の向きは反時計まわりとする.

複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) C_2 上で $|f(z)| \leqq \dfrac{1}{R^2 - 1}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ の値を求めなさい.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + 1}\, dx$ の値を求めなさい.



(和歌山大 2010)　　(m20106505)

0.744 曲面 $z = e^{x-y-1}$ の $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106507)

0.745 複素関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3 - 2z^2 + 4z - 8}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする．

(1) $f(z)$ の特異点をすべて複素平面上に図示しなさい．

(2) 円周 $|z+1+i| = 2$ に反時計回りの向きを与えたものを C とする．複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めなさい．

(和歌山大 2011)　　(m20116502)

0.746 正方形 $ABCD$ を底面とした四角錐 O-$ABCD$ において，$OA=1,\ AB=2,\ BC=2$ とする．また，$OA\perp AB,\ OA\perp AD$ とする．このとき，次の各問いに答えなさい．

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ と外積の大きさ $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$ を求めなさい．

(2) 線分 OD を $2:3$ に内分する点を E，線分 OC の中点を F とする．また，3 点 A, E, F を含む平面と辺 OB またはその延長と交わる点を G とする．このとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい．

(3) 三角形 AEF の面積を求めなさい．

(和歌山大 2015)　　(m20156501)

0.747 次の各問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする．

(1) $z = x + yi$（x, y は実数）とするとき，複素関数 $f(z) = (x^2 + x + ay^2) + (bxy + y)i$ が複素数全域で正則になるよう，実数の定数 a, b を定めなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ を求めなさい．

ただし，積分経路 C は，複素平面において $-1,\ 1,\ 2i$ を頂点とする三角形の周に，反時計回りの向きを付けたものとする．

(和歌山大 2016)　　(m20166506)

0.748 座標平面上で直線 $y = x$ と曲線 $y = x^2$ で囲まれる部分を D とする．次の I の値を求めなさい．

$$I = \iint_D (x+2y)\ dx\ dy$$

(和歌山大 20221)　　(m20216504)

0.749 関数 $z = x + y^2$ のグラフ上の点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(和歌山大 2022)　　(m20226503)

0.750 平面の領域 D を $x=0,\ y=0,\ x+y=2$ で囲まれた部分とする．次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x+y)dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226504)

0.751 次の文章を読み，(1)〜(5) に答えよ．次の関数 $f(x)$ は，理学，工学の分野でしばしば現れる関数である．

$$f(x) = \frac{1}{x - ia}$$

ここで，a は正の実数 $(a>0)$，i は虚数単位 $(i^2=-1)$，x は実数，定義域は $-\infty < x < \infty$ である．

(1) 関数 $f(x)$ の実数部，および虚数部が，次のように書けることを示せ．

$$u(x) = \frac{x}{x^2+a^2} \qquad\qquad v(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ.

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad\qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(4) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ を $0 < x < a$ の範囲で定積分せよ.

$$\int_o^a u(x)dx \qquad\qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x = a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ. さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ.

(大阪市立大 2007)　　(m20076601)

0.752 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \frac{2}{3}x^2 - a\ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\frac{3}{4}\sqrt{3},\ \frac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 O, P, Q が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\frac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \frac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)