[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：必要十分条件

0.1　変数 x, y, z の連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & 1-a & 0 \\ 1+2a & 1+a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $(*)$ が一意的な解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ．

(2) 連立 1 次方程式 $(*)$ が解をもたないための a に関する必要十分条件を求めよ．

(3) 連立 1 次方程式 $(*)$ が無限に多くの解を有するための a に関する必要十分条件を求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170106)

0.2　2 次元ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ と実数 γ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} = \gamma(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2})$$

と定義し，ベクトル $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ を

$$\boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_1}\ ,\quad \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_2}$$

と定義する．また，行列 A, B を $A = (\boldsymbol{a_1}\quad \boldsymbol{a_2})$ ，$B = (\boldsymbol{b_1}\quad \boldsymbol{b_2})$ と定義する．このとき以下の設問 (1),(2),(3) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (3) の下の空白部分に記入しなさい．

(1) $B = AC$ を満たす 2 次正方行列 C を求めなさい．

(2) A, B の行列式を $|A|$, $|B|$ で表す．$|B|$ を $|A|$ と γ を用いて表しなさい．

(3) $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ が互いに 1 次独立であるとする．このとき，$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ も互いに 1 次独立であるための必要十分条件を γ を使って表しなさい．

(秋田大 2014)　　(m20140404)

0.3　a は負，b は正の定数とする．3 次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ．

(2) A が正則行列のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150507)

0.4　V を実ベクトル空間とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) n 個の元 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in V$ の中に同じものがあれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であることを示せ．

(2) n 個の元の組 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n \in V$ は一次独立とし，$C = (c_{ij})_{ij}$ を n 次実正方行列，$\boldsymbol{a}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{b}_j\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とおく．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることの必要十分条件は C が正則行列であることを示せ．

(東北大 2016)　　(m20160505)

0.5 次の $\mathbf{R}^3$ の 3 つのベクトルについて以下の問に答えよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ z \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) これらが一次従属であるための x, y, z についての必要十分条件を求めよ．

(2) (1) の条件が満たされるとき，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が，この 3 つのベクトルの一次結合で表されるための x, y, z についての必要十分条件を求めよ．

（お茶の水女子大 1999）　　(m19990608)

0.6 (1) n を自然数とする. 複素数を成分とする n 次正方行列が n 個の相異なる固有値を持てば, 対角化可能であることを示せ.

(2) a, b, c, d を複素数とする. 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が対角化できるための必要十分条件を a, b, c, d の関係を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100605)

0.7 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c を実数とし $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cx = 0 \right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

となる自然数 i, j が存在することであることを示せ.

(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f_A(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3$，で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ.

(4)

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．線形写像 $f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_B(x) = Bx,\ x \in \mathbb{R}^4$，で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.8 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i, j) 成分を $\overrightarrow{a_i} \cdot \overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_3} = 0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ．

(5) 任意の実数 $x_1,\ x_2,\ x_3$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ．

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.9 数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2} < C$ となる定数 C $(C > 0)$ が存在するための，初期値 x_0，y_0，z_0 に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.10 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．ただし，a, b, c は複素数とする．

(東京工業大 2013)　　(m20130801)

0.11 a を実数とする．x，y，z に関する連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & +2y & +2z & = & a+3 \\ 2x & +\ y & +az & = & 4 \\ x & +\ y & -\ z & = & 2 \end{array} \right.$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式が解をもつための必要十分条件を a で表せ．

(2) (1) で求めた条件を a がみたすとき，連立 1 次方程式の解を求めよ．

(東京工業大 2018)　　(m20180801)

0.12 a, b を実数とする．x, y, z に関する連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} x \quad + y + az = b \\ x + ay \quad + z = b \\ ax \quad + y \quad + z = b \end{array} \right.$$

について，次の問いに答えよ．

(1) この連立一次方程式が任意の実数 b に対して解をもつための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(2) a が (1) の条件をみたすとき，解をすべて求めよ．

(東京工業大 2020)　　(m20200801)

0.13 未知数 $x_1, \cdots x_n$ についての連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える. ここで,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

である. さらに, A の第 i 列の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とおくことにより $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ と表す. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表されることである. このことを示せ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するための必要十分条件は $\mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ が成り立つことである. このことを示せ. ここで, $[\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$ は A の右側に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を加えた m 行 $n+1$ 列の行列を表す.

(3) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

(4) 次の連立 1 次方程式の解が存在するかどうか調べ, 存在するときはそれを求めよ.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 8x_4 & = & 7 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 & + & 13x_4 & = & -12 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & 21x_4 & = & 19 \end{array}\right.$$

(筑波大 2005)　　(m20051312)

0.14 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101321)

0.15 ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(2) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ.

(3) $f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ.

(4) $f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111310)

0.16 自然数から自然数への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して，集合 X_n, A_n $(n \in \mathbb{N})$ を

$$X_n = \left\{ f(k) \,\middle|\, k \geq n \right\}$$

$$A_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, f(k) = f(n) \right\}$$

で定める．このとき，以下を証明せよ.

(1) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ である必要十分条件は，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである.

(2) $\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \neq X_{n+1}\}$ が有限集合である必要十分条件は，$\{n \in \mathbb{N} \mid A_n$が有限集合$\}$ が有限集合となることである．

(筑波大 2013)　　(m20131305)

0.17 $(n+1)$ 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & c & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

に対し，連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

が解を持つための必要十分条件は，$c = 1$ または $c = -n$ となることである．このことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141312)

0.18 未知数 x, y を含む次の 3 つの行列に関して設問 (1)〜(4) に答えなさい．

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \quad H(y) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

ただし，a, b, c はいずれも 0 でないものとする．

(1) $G(x)$ と $H(y)$ の行列式 $|G(x)|$ と $|H(y)|$ をそれぞれ求めなさい．

(2) $|G(x)| = |H(y)|$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい．

(3) $|G(x)|$ と $|H(y)|$ を使って $F(x,y)$ の行列式 $|F(x,y)|$ を表しなさい．

(4) $|G(x)| \neq |H(y)|$ のとき，$|F(x,y)| = 0$ が成り立つ必要十分条件を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151320)

0.19 $\mathbb{R}^n$ のベクトル　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義する．

次の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.20 実数 a,b,c,d が

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & -3 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

を満たすための必要十分条件は $a+2b+3c+4d=0$ であることを示せ.

(埼玉大 2003) (m20031408)

0.21 赤，青，黄色の 3 色のサイコロを投げ，赤のサイコロの出た目を a，青のサイコロの出た目を b，黄色のサイコロの出た目を c とする.

(1) 3 つの数 a,b,c をこの順に並べてできる 3 桁の整数 $(100a+10b+c)$ が 4 の倍数である確率を求めよ．なお，整数が 4 で割り切れるための必要十分条件は，末尾 2 けたの数が 4 で割り切れることである.

(2) 3 つの数 a,b,c を用いて，$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ で表される円を描くとき，この円が点 $A(-1,-2)$ を通る確率を求めよ.

(群馬大 2009) (m20091503)

0.22 放物線 $y=x^2+2x-2$ を x 軸の方向へ a，y 軸の方向へ b だけ平行移動する.

(1) 平行移動した後の放物線の方程式を a，b を使って示せ.

(2) 平行移動した後も放物線が点 (1, 1) を通るとき，a，b が満たすべき必要十分条件を求めよ.

(3) a，b が (2) で求めた必要十分条件を満たしていれば，平行移動した後の放物線の頂点はある曲線の上に必ず乗る．その曲線の方程式を求めよ.

(図書館情報大 2002) (m20021601)

0.23 k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次元列ベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -10 \\ -2 & k & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする．以下の各問に答えよ.

(1) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための k についての必要十分条件を求めよ.

(2) 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の部分空間 $V=\{A\boldsymbol{u}\,;\,\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^3\}$ が 2 次元となるための k についての必要十分条件を求めよ．また，そのときの V の基底を一組求めよ.

(3) 前問 (2) の k に対し，行列 A の固有値および固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ.

(茨城大 2008) (m20081701)

0.24 a を実数の定数とする．xy 平面において，関数 $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ のグラフが 3 点 $(2,1)$, $(3,-1)$, $(a,0)$ を通るとする．このような実数 α, β, γ がただ 1 組定まるための必要十分条件は，$a\neq 2$ かつ $a\neq 3$ であることを示せ．また，この条件のもとで，α, β, γ の値を求めよ.

(茨城大 2014) (m20141704)

0.25 x,y を実数としたとき，次のそれぞれが「$x^2+y^2\leq 1$」に対して「必要条件」「十分条件」「必要十分条件」「いずれでもない」のうちいずれかを答えよ.

(1) $x\leq 1/2$ または $y\leq 1/2$

(2) $|x|\leq 1$ かつ $y\leq\sqrt{1-x^2}$ かつ $y\geq -\sqrt{1-x^2}$

(3) $|xy| \leq 1/2$

(4) $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ かつ $|y| \leq 1/\sqrt{2}$

(山梨大 2016) (m20161801)

0.26 (1) A を 3 次実正方行列とする．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は，A が正則（可逆）でないことである．このことを証明せよ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & 2 \\ 1 & 2-a & -1 \\ -1 & 1 & 4-a \end{pmatrix}$ に対して，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つとき，a の値を求めよ．更に，求めた a の値に対して，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(新潟大 2009) (m20092006)

0.27 (1) $x,\ y,\ z$ に関する連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & a \\ 2x & - & y & - & z & = & b \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & c \end{array} \right.$$

が解を持つための必要十分条件は，$7a + b - 3c = 0$ が成り立つことである．このことを示せ．

(2) 実数 $x,\ y,\ z$ に関する関数

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

の最小値を求めよ．ここで，$||\boldsymbol{v}||$ は標準内積に関するベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさである．

(新潟大 2009) (m20092008)

0.28 (1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, ある数 k とある零行列と異なる 2 次正方行列 B が存在して，$AB = BA = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(2) t を実数とする. 連立一次方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 5y + 2z & = & 0 \\ x + (t+2)y + z & = & 0 \\ tx + y + (t-1)z & = & 0 \end{array} \right.$$

が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ でない解を持つための t についての必要十分条件を求めよ. また, そのときの解を求めよ.

(金沢大 2005) (m20052205)

0.29 $A = \begin{pmatrix} a+b & a & b \\ b & b+c & c \\ a & c & a+c \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & a & c \end{pmatrix} B$ となる行列 B を一つ見つけよ．

(2) A の行列式 $\det A$ を求め，A の逆行列が存在する為の必要十分条件を a, b, c の条件として答えよ．

(金沢大 2008)　　(m20082204)

0.30 次の問に答えよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ を示せ.

(2) 連立方程式 $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+az=1 \\ x+4y+a^2z=1 \end{cases}$ がただ 1 組の解 (x,y,z) を持つための a に関する必要十分条件を求め，そのときの解を求めよ.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$ を因数分解せよ.

(富山大 2000)　　(m20002306)

0.31 $d(x,y)$ を空でない集合 X 上の距離とし，$x, y \in X$ に対して $\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ とする.

(1) ρ は X 上の有界な距離であることを示せ.

(2) 距離 d が有界であることが ρ と d が同等となるための必要十分条件であることを示せ. ただし，同等とは任意の $x, y \in X$ に対して $Ad(x,y) \leq \rho(x,y) \leq Bd(x,y)$ となる正定数 $A,\ B$ が存在することである.

(富山大 2012)　　(m20122308)

0.32 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ.

(富山大 2013)　　(m20132307)

0.33 y を x の関数とするとき，微分方程式

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + a = 0 \quad (\,a\ \text{は実数の定数}\,)$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) この微分方程式を，条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ のもとで解け.

(2) 上の (1) で求めた解 y について $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} y^2 dx$ とおく. I が有限になるための a に関する必要十分条件を示せ. また，その必要十分条件が満たされるとき，a を用いて I を表せ. なお，正規分布（ガウス分布）の確率密度関数の性質を利用してもよい.

(福井大 2015)　　(m20152413)

0.34 実関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を，“ 極限 ”という言葉を使わずに，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて書きなさい.

(岐阜大 2005)　　(m20052610)

0.35 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x-3y-5z=a \\ 2x-2y-4z=b \\ -3x+\ y+3z=1 \end{cases}$$

が, 少なくとも 1 つの解をもつための定数 a, b についての必要十分条件を求めよ．また，求めた条件を満たす 1 組の a, b を選び，その場合の一般解を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092604)

0.36 二つの封筒 A, B と，1 から 9 までの番号のいずれか一つが記されたカードの集合がある．封筒 A には，1 から 9 までそれぞれ 1 枚ずつ全部で 9 枚のカードを入れる．封筒 B には，1 から 9 までそれぞれ m 枚 $(m \geq 1)$ ずつ全部で $9m$ 枚のカードを入れる．以下の問いに答えよ．

(1) 封筒 A から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(2) 封筒 B から無作為に 2 枚のカードを引くとき，その組み合わせが 1 と 2 である確率を求めよ．

(3) 封筒 A から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせと，封筒 B から引いた 2 枚のカードの番号の組み合わせが一致する確率を，$m=3$ および $m \to \infty$ の場合について求めよ．

(4) 封筒 A と封筒 B それぞれから無作為に n 枚 $(1 \leq n \leq 9)$ ずつカードを引く．A から引いたカードと B から引いたカードの両方に，同じ番号のカードが少なくとも 1 枚含まれるための必要十分条件を，m と n を用いて示せ．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072705)

0.37 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a \neq b$ であることを示し，対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001)　　(m20012906)

0.38 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする．

(1) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は $a+b+c=0$ であることを示せ．

(2) 任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ となる非自明な 3 次元のベクトル $\mathbf{y}$ を求めよ．ただし，$(,)$ は空間ベクトルの内積である．

(名古屋工業大 2003)　　(m20032903)

0.39 以下の文章の $\boxed{}$ に適切な語句または数式を入れ, 解答欄に記入しなさい.

大きさがで 0 ない 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ がある. いま, 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ と表し, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\ ①\ }$$

と表すことができる. ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が直交するための必要十分条件は,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\ ②\ }$$

である.

内積については, 次が成り立つ.

交換法則：　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\ ③\ }$

分配法則：　$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \boxed{\ ④\ }$

ここで, $\vec{a} = (\ a_1,\ a_2,\ a_3\ )$, $\vec{b} = (\ b_1,\ b_2,\ b_3\ )$ とすると,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\ ⑤\ }$

である.

一方, 外積については, 次が成り立つ.

歪対称 :　　$\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{\ ⑥\ }$

分配法則 :　$\vec{a} \times (\ \vec{b} + \vec{c}\ ) = \boxed{\ ⑦\ }$

$\vec{a} \times \vec{a} = \boxed{\ ⑧\ }$

ここで, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ であるとき,

$\vec{a} \times \vec{b} = \boxed{\ ⑨\ }$

である. ただし, $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ は基本ベクトルである.

(三重大 2010)　　(m20103104)

0.40　行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし $a,\ b$ は実数である.

(1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. また, 2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, A^n を求めよ. ただし n は正の整数である.

(4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル x に対して

$$^t xAx > 0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ. ここで $^t x$ は x の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005)　　(m20053506)

0.41　点 $A(1,0)$ を点 $A'(a,0)$ に，点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1-a)$ に移す 1 次変換を f とする．ただし，a, b は実数とする．また，f を表す行列を F とする．

(1) 行列 F を a, b を用いて表せ．

(2) 行列 F が対角化できるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．また，対角化できる場合は対角化せよ．

(3) 1 次変換 f の n 回の積を f^n とする．点 (x_0, y_0) が 1 次変換 f^n によって移される点 (x_n, y_n) を a, b, x_0, y_0 を用いて表せ．

(大阪大 2006)　　(m20063506)

0.42　2 次元平面上の点 $A(1,0)$ を点 $A'(a, 1-b)$ に, 点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b, 1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a, b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

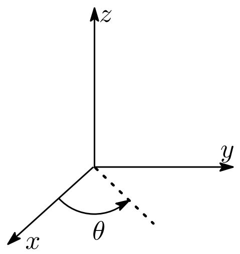
(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P , 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0,0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0,0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 2010)　　(m20103506)

0.43 下図に示すように, 3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える. z 軸回りの回転については, 回転角 θ の正の方向を, 下図の矢印の方向とする. また, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.



(1) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える. このとき,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ.

(2) 点 (x,y,z) を点 (x',y',z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える. このとき,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ.

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して, 行列式 $|AB|$ を求め, $(AB)^{-1}$ が存在することを示せ.

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して, $(AB)^{-1}$ を求めよ.

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して, $AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ.

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.44 行列の対角化に関する以下の設問に答えよ.

(1) 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ. ただし, a は実定数である.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ. また, 対角化出来る場合は対角化せよ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015)　　(m20153506)

0.45　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，c は実定数である．

(1) 行列 A の固有多項式 $f(\lambda) = |\,\lambda I - A\,|$ を変数 λ の関数とみなし， その極値を求めよ．ただし，I は単位行列を表すものとする．さらに，$c = 0$ のときの f のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 A のすべての固有値が実数となる，c に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c = 0$ のときの行列 A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183501)

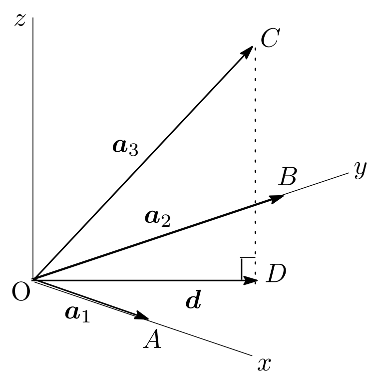
0.46　$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2，λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1，λ_2，λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 $O - xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点 A に対し $\boldsymbol{a}_1 = \overrightarrow{OA}$，$y$ 軸上の点 B に対し $\boldsymbol{a}_2 = \overrightarrow{OB}$，空間内の点 C に対し $\boldsymbol{a}_3 = \overrightarrow{OC}$ とする．点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．



(大阪大 2018)　　(m20183506)

0.47　$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & + & 3y & - & z \\ 2x & + & y & + & 3z \\ 3x & + & 2y & + & 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，^{t} は行列の転置を表すとする．

(1) ある行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 A を求めよ．

(2) k を実数とし，$\boldsymbol{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ が解を持つための，k についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ．

(3) $\boldsymbol{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(4) E を 3 次の単位行列とし，行列 B を $B = A - E$ で定める．行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193506)

0.48　以下 α を与えられた実数とする．１階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　１階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2)　$y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\,, \qquad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.49　次の連立方程式について，以下の問に答えよ。
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

(1)　係数行列の階数 (rank) を求めよ．

(2)　この連立一次方程式が解をもつための必要十分条件を求めよ。

(3)　解があるときそれを求めよ．

(大阪府立大 2006)　　(m20063601)

0.50　$x_1,\ x_2,\ x_3$ を未知変数とする連立方程式 (A)

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{i4} = 0\,, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を考える. ここで $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

(1)　$a_{ij} = (-1)^{i+j}$ の時, この連立方程式 (A) の解をすべて求めよ.

(2)　$a_{i1} = 1,\ a_{i2} = (-1)^i,\ a_{i3} = u^{i-1}\ (1 \le i \le 4)$ および $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 1,\ a_{44} = u$ の時, この連立方程式 (A) が解をもつような実数 u の値をすべて決定せよ.

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

の時, 連立方程式 (A) が解をもつ必要十分条件を a_{ij} を用いて表せ.

(神戸大 2010)　　(m20103802)

0.51　常微分方程式

$$y'' - y = e^{-x}$$

を初期条件 $y(0) = a,\ y'(0) = b$ のもとで解け．また，$x \ge 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．（ここで $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.）

(神戸大 2011)　　(m20113805)

0.52 k を整数とし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -k \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおく．以下の各問に答えよ.

(1) A が正則であるための k の条件を求めよ.

(2) $k = 1$ のとき，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{j}$ の解を求めよ.

(3) A が正則行列であるとき，A の逆行列の成分がすべて整数となるための必要十分条件は $k = 1$ であることを示せ.

(神戸大 2016)　　(m20163806)

0.53 a を実数とし,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ.

(2) (1) の条件が成り立つとき，$B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223806)

0.54 n 次の対称行列 A，B に対して, AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ.

(鳥取大 2005)　　(m20053910)

0.55 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A \,:\, \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.56 a, b は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \, dx$，$\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx$ を求めよ.

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ．

(広島大 2006)　　(m20064105)

0.57 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える．ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2,\ \pi/2]$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 開区間 $(-1, 1)$ において f の導関数 f' を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \cdots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) = (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す．

(3) $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ．ただし，$0! = 1$ とする．

(4) F は開区間 $(-1, 1)$ 上の C^∞ 級関数とする．自然数 N と $N+1$ 個の実数 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_N$ に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ と定める．ただし，$x^0 = 1$ とする．このとき，

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ であることを示せ．

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(2k)!\,(2N-2k)!}{(k!)^2\big((N-k)!\big)^2}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164104)

0.58 a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184101)

0.59 x, y は実変数, k は, 実定数とする. 関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 + k(2x + y)$ について以下の問に答えよ.

(1) $k = 0$ のとき, $z = f(x, y)$ は極値を持たないことを示せ.

(2) $z = f(x, y)$ が極値を持つための k に関する必要十分条件を求めよ.

(3) $z = f(x, y)$ が極小値を持つとき, その値, およびそのときの x, y の値を求めよ.

(広島市立大 2005)　　(m20054202)

0.60 V を線形空間とし, $f : V \longrightarrow V$ を線形写像とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ 及び $\mathrm{Im}\, f = \{w \in V \mid w = f(v)\,,\ v \in V\}$ はともに V の部分線形空間であることを示せ.

(2) $f \circ f = f$ ならば, $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\,(1_V - f)$ が成り立つことを示せ.
ここで, $\mathrm{Im}\,(1_V - f) = \{w \in V \mid w = v - f(v)\,,\ v \in V\}$ とする.

(3) V が有限次元線形空間とする. このとき, $f \circ f = f$ であるための必要十分条件は
$\dim \mathrm{Im}(1_V - f) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ であることを示せ.

(高知大 2005)　　(m20054505)

0.61　実ベクトル空間 V, W の間の一次写像 $f\ :\ V \to W$ について次の問いに答えよ.

(1) f の核を $\mathrm{Ker}\ f$ とおき, V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ とおく. f が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}_V\}$ であることを示せ.

(2) f が単射で, V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるならば, これらの f による像 $f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_k)$ も一次独立であることを示せ.

(3) 実ベクトル空間としての V, W の次元をそれぞれ m, n とおく. f が単射であるならば, $m \leqq n$ であることを示せ.

(高知大 2017)　　(m20174504)

0.62　a を実数とする. 行列　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) A の逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件を a を用いて表せ. また, a がその条件をみたすとき A^{-1} を求めよ.

(3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{4}$ が成り立つとき, a の値を求めよ. ただし, $|A^{-1}|$ は A^{-1} の行列式を表す.

(愛媛大 2007)　　(m20074612)

0.63　a を実数とし, 行列 A およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ で定める. さらに, $\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{b}$, $A^2\boldsymbol{b}$ を列ベクトルにもつ 3 次正方行列を B とする. すなわち
$B = \big(\boldsymbol{b},\ A\boldsymbol{b},\ A^2\boldsymbol{b}\big)$　とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{b}$, $A^2\boldsymbol{b}$ を求めよ.　　(2) B の行列式 $|B|$ を求めよ.

(3) B の逆行列 B^{-1} が存在するための必要十分条件を, a を用いて表せ.

(愛媛大 2008)　　(m20084602)

0.64　2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の転置により得られる 3 次実行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ と $\boldsymbol{b}$ の（行列としての）積 ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ により得られる実数を $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ とおく.

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

また, $\boldsymbol{o} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおく.

(1) (a) 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}) = 0$ であることは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ であるための必要十分条件であることを示せ.

(b) $\boldsymbol{o}$ でない 2 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であることを示せ.

(c) $\boldsymbol{o}$ でない 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}) = 0$ ならば $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) 3 つの 3 次実列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を用いて表される 3 次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]$ に対し，${}^t\!A = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}$ を 3 つの 3 次実行ベクルトル ${}^t\boldsymbol{a},\ {}^t\boldsymbol{b},\ {}^t\boldsymbol{c}$ を用いて表される A の転置行列とする．A が

$$ {}^t\!AA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} $$

を満たすとき，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次独立であることを示せ.

(愛媛大 2022)　　(m20224601)

0.65 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい.

(3) 4 つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と 4 次正方行列

$$ A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} $$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい.

(九州大 2006)　　(m20064707)

0.66 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数値とする.

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} $$

(1) A の逆行列が存在するための a の必要十分条件を示せ.

(2) a が小問 (1) の条件を満たす時，A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ.

(4) A が対角化可能であるための a の必要十分条件を示せ.

(九州大 2015)　　(m20154701)

0.67 (1) 連続関数の中間値の定理について述べよ.

(2) $f(x)$ は区間 $I=[a,b]$ 上で定義されている連続関数とする．このとき，$f(x)$ が I 上単射であるための必要十分条件は $f(x)$ が I 上単調増加関数または単調減少関数であることを示せ．

注：$f(x)$ が I 上単調増加関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) < f(x_2)$ であるとき，また単調減少関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) > f(x_2)$ であるときをいう．さらに，I 上単射であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ ならば，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であるときをいう．

（熊本大 2001）　(m20015202)

0.68 a, b, c を 0 でない実数とする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ．

(島根大 2006)　(m20065804)

0.69 (1) 次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = 5 \\ 2x - \ y + 3z = 4a+13 \\ 3x \qquad + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ．さらに，解が存在するような a の値をすべて求めよ.

(3) (2) の連立 1 次方程式が解をもつとき，その一般解を求めよ.

(島根大 2015)　(m20155803)

0.70 ある直交座標系 (x, y, z) における 3 次元の 2 つの実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を成分で表し，ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ が直交するための必要十分条件を示せ.

(2) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を成分で表せ.

(3) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ ともベクトル $\boldsymbol{b}$ とも直交することを証明せよ.

(首都大 2008)　(m20085902)

0.71 次の連立一次方程式が解を持つための必要十分条件となる定数 a, b, c の関係式を求めよ. またそのときの解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = 2b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$$

(首都大 2010)　(m20105902)

0.72 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し，逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とする.

$\overrightarrow{b} = \sum_{j=1}^{3} w_j \overrightarrow{a}_j$ と定めたとき，$w_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$ となるための必要十分条件を x, y, z を用いて表せ.

(東京都立大 2021)　　(m20215901)

0.73 関数 $f(x) = e^x(ax^2 + b)$ に対し，$f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の n 次導関数とする．ただし a, b は 0 でない実数, n は自然数とする．以下の問いに答えよ.

(1) $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ を求めよ.

(2) $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(3) x についての方程式 $f^{(n)}(x) = 0$ が実数解をもつための必要十分条件を，n, a, b を用いて表せ.

(はこだて未来大 2016)　　(m20166302)

0.74 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a \ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 O, P, Q が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)