[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：法線

0.1 以下の問いに答えよ．ただし，ベクトルの内積を "·"，外積を "×" と表すものとする．

(1) 以下の文章では，平面の方程式を導いている．空欄（1）から（3）に適切な式を入れよ．
原点 O より平面 S に垂直におろした点を G（以下，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と呼ぶ），平面 S 上の任意の点 R の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とする．法線ベクトル $\boldsymbol{g}$ と，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{GR}}$ は垂直であることから，両ベクトル間には（　1　）の関係がある．ここで，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,g_3)$ とすると，平面 S の方程式は x,y,z,g_1,g_2,g_3 を用いて，（　2　）で表される．また，平面 S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ と，原点 O から平面 S までの距離 p を用いると前式は，（　3　）で表される．

(2) 単位法線ベクトルが $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ で $(1,1,1)$ を通る平面を求めよ．

(3) 同一平面上に異なる 3 点 A,B,C が与えられたとき，外積を用いてこの 3 点より平面の方程式を求める方法を述べよ．

(4) 3 点 $(1,2,3)$, $(1,1,1)$, $(0,3,1)$ によって与えられる平面の方程式を求めよ．

(北海道大 2004)　　(m20040102)

0.2 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x,y,z 方面の単位ベクトルとして, 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) 積分経路 $C:\boldsymbol{r}(t)=\cos t\ \boldsymbol{i}+\sin t\ \boldsymbol{j}+2t\ \boldsymbol{k}$（$t=0$ から $t=2\pi$）に沿った，ベクトル関数 $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) $f(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{\sqrt{r^2+1}}$　（$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=||\boldsymbol{r}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）とし, 原点を中心とする半径が 2 の球の表面を S と表す．このとき，S 上の点 $\boldsymbol{p}=x_p\boldsymbol{i}+y_p\boldsymbol{j}+z_p\boldsymbol{k}$ における $\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{p}$ における S の外向き単位法線ベクトルであり，$\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ とする.

(北海道大 2012)　　(m20120102)

0.3 3 次元空間にある次の 2 つの平面について，以下の設問に答えなさい.

平面 1　:　$x+y+\sqrt{2}z=0$

平面 2　:　$x+y=0$

(1) 平面 1 の法線ベクトルと平面 2 の法線ベクトルをひとつずつ求めなさい.

(2) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルのなす角を求めなさい．ただし，答えは 0 以上 π 以下とすること.

(3) (1) で求めた 2 つの法線ベクトルの両方と直交するベクトルのうち，大きさが 1 であるものをひとつ求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210101)

0.4 xyz 空間に 2 つの平面

$\alpha\ :\ x+3y-2z+1=0$

$\beta\ :\ 2x-y+3z-2=0$

があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) 2 つの平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(2) (1) で求めた 2 つの平面の単位法線ベクトルの外積を求めなさい.

(3) 点 $(1, 2, -1)$ を通り，平面 α および β に垂直な平面の方程式を求めなさい.

(岩手大 2008) (m20080301)

0.5 xyz 空間内に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(1, 2, 2)$ があるとき，次の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ の外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求めなさい．その結果を用いて，3 点 A, B, C を含む平面 α の単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ を求めなさい.

(2) 平面 α の方程式を求めなさい.

(3) 原点 O を中心として平面 α に接する球 S の半径とその接点 P の座標を求めなさい.

(4) 接点 P が三角形 ABC 内にあるか否かを答えなさい．また，その理由を示しなさい.

(岩手大 2015) (m20150301)

0.6 3 次元空間上に存在する 3 点 $A(0, 1, -1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(1, 1, 0)$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい.

(2) (1) の平面の単位法線ベクトルを求めなさい.

(3) 原点を通り，(2) の単位法線ベクトルに平行な直線の方程式を求めなさい.

(4) (1) の平面と (3) の直線との交点の座標を求めなさい.

(岩手大 2017) (m20170301)

0.7 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）.

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ.

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ.

(秋田大 2019) (m20190404)

0.8 なめらかな曲線 $y = f(x)$ について，次の問いに答えよ.

(1) 曲線上の点 $P(a, b)$ における法線と x 軸との交点の座標が $(\frac{1}{2}(a+b^2), 0)$ であるとき，関数 $y = f(x)$ の満たす微分方程式を導け.

(2) (1) の微分方程式を満たし，点 $(0, 2)$ を通る曲線の方程式を求めよ．また，$-3 \leq x \leq 1$ において，この曲線の概形を描け．必要ならば，$e = 2.718\cdots$，$e^{-1} = 0.367\cdots$，$e^{-1.5} = 0.223\cdots$ を使ってもよい.

(東北大 1993) (m19930503)

0.9 滑らかな曲線 $y = f(x)$ 上の第 1 象限にある 1 点 P における法線が x 軸と交わる点を N とし，次の問いに答えよ.

(1) 長さ PN を求めよ.

(2) PN と点 P の y 座標の平方の比が一定値 k であるとき，点 $(0, 1/k)$ を通る曲線の方程式を求めよ.

(東北大 1995)　　(m19950502)

0.10 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 ; |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.11 xyz 空間の曲面 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a, b, c は正の実数とする.

(1) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ が囲む体積 V を求めよ.

(2) 点 $P(1, 2, 3)$ が曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点となるとき，a, b, c が満たす式を求めよ.

(3) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $P(1, 2, 3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ.

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a, b, c の値を求めよ.

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.12 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a \sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ.

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.13 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3 z)\,\mathbf{i} + (x^2 yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，**i, j, k** は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.14 曲線 $y=x^2$ と 直線 $y=a$ $(a>0)$ で囲まれた図形 (図１ 灰色部分）を考える．この図形に一定の厚みを持たせて平面上に立てた場合（図２）に，点 O を接触点として安定に立っていられるかどうか調べたい．

(1) この図形の重心を求めよ．この場合厚みが一定であるので，重心は図形に属する各点の x,y 座標の平均となる．

(2) 図形がわずかに傾き，平面との接触点が点 O から微小量 u だけずれた時 (図３)，その新しい接触点 P における法線と y 軸との交点 Q を求めよ．

(3) 点 O で安定に立っているための，定数 a についての条件を求めよ．

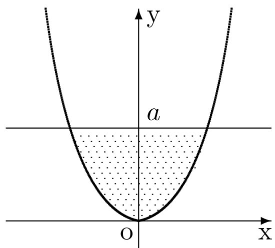


図１

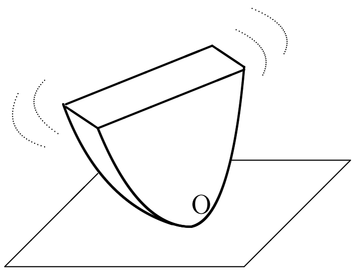


図２

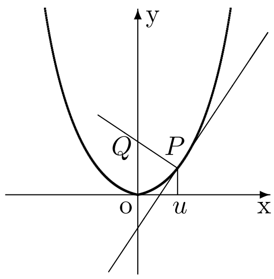


図３

(東京大 1999)　　(m19990701)

0.15 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2+z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \overrightarrow{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \vec{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

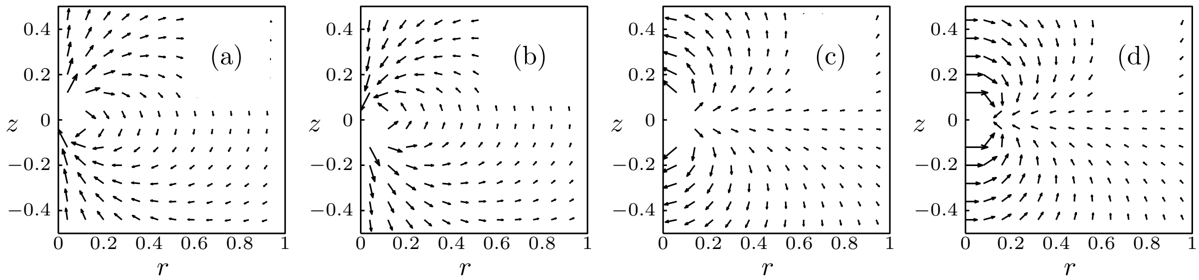
(1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}$ を求めよ.

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$. 面の法線方向を $\vec{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ.

$$\Phi = \int_{S_0} \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

(3) $\vec{B}$ および $\vec{C}$ を求めよ.

(4) ベクトル場 $\vec{B}$ および $\vec{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.



(5) $r \le r_0$ および $z_1 \le z \le z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える. 面の法線方向を円柱外向きとする. この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \vec{C}\cdot d\vec{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.16 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi$, $0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\vec{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.17 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x+z=0$ に関する対称移動とし，$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y-z=0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x+z=0$ の原点を通る法線に点 (x,y,z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ を解け.

(4) 平面 $x+z=0$ と平面 $y-z=0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.18 楕円面　$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$　について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z = z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし，$-c < z_0 < c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000）　　(m20001304)

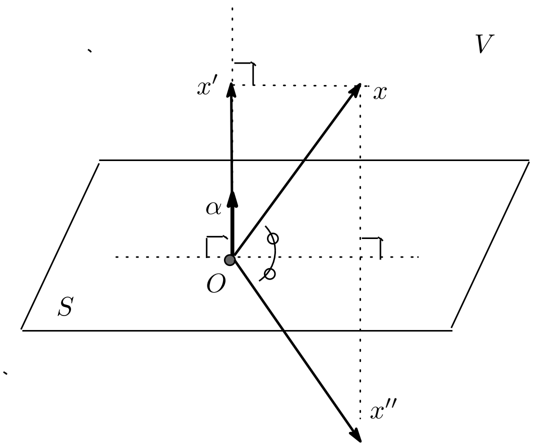
0.19 ３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と表すこと．

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ．

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ．



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.20 2 変数関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$　(ただし，$(x, y) \neq (0, 0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ について，点 $(a, b, f(a, b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x, y)dxdy$ を $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ において定義されていないので，

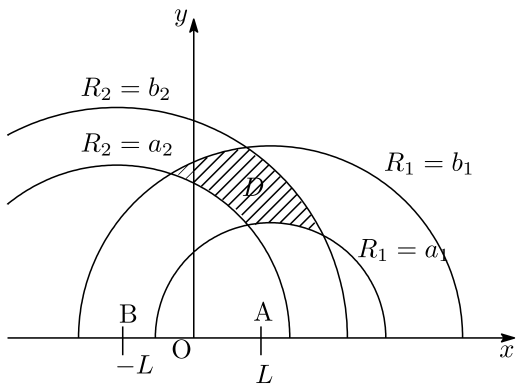
$D_\varepsilon = \left\{(x, y) \,\middle|\, \varepsilon^2 < x^2 + y^2 \leq 1\,,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x, y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.21　xy 平面の $y>0$ なる領域（上半面）の点 $P(x,y)$ に対して，点 $A(L,0)$ および点 $B(-L,0)$ からの距離の二乗

$$R_1=(x-L)^2+y^2\ ,\qquad R_2=(x+L)^2+y^2$$

を考える．ここで $L>0$ とする．また，$f(x,y)=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1)　偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2)　c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x,y)=c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0,y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3)　a_1,a_2,b_1,b_2 を正の定数とし，$R_1=a_1$ と $R_1=b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2=a_2$ と $R_2=b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1<b_1$, $a_2<b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1\leq R_1\leq b_1$, $a_2\leq R_2\leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V=2\pi\int_D ydxdy$$

で与えられる．x,y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4)　xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x,y)$ を複素数 $z=x+iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z)=\log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z-L=r_1e^{i\theta_1}$, $z+L=r_2e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x,y)$ に一致することを示せ．ただし，$0<r_1$, $0<r_2$, $0<\theta_1<\pi$, および $0<\theta_2<\pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.22　$z=\dfrac{1}{xy}$, $x>0$, $y>0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1)　$(x,y)=(1,2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2)　曲面 S 上で，平面 $x+3y+9z+18=0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3)　6 つの平面 $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.23　二次曲線 $y=2x^2+5x+3$ を考える．

(1)　二次曲線上の点 $P(-2,1)$ における法線（点 P を通り，点 P における接線と垂直に交わる直線）の方程式を求めよ．

(2) (1) の法線と二次曲線の交点の座標を求めよ.

(3) (1) の法線と二次曲線により囲まれる面積を求めよ.

(群馬大 2009)　　(m20091504)

0.24 平面 π : $2x+3y+4z-12=0$ と点 A:(1,2,3) について，以下の $\boxed{\text{ア}}$~$\boxed{\text{オ}}$ を求めよ.

(1) π は x 軸と点 $\boxed{\text{ア}}$，y 軸と点 $\boxed{\text{イ}}$，z 軸と点 $\boxed{\text{ウ}}$ でそれぞれ交わる.

(2) π に垂直で長さが 1 の法線ベクトルは $\boxed{\text{エ}}$ である.

(3) A と π との距離は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(図書館情報大 2002)　　(m20021608)

0.25 a, b, c を定数として，3 次関数

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

を考える．このとき以下の問に答えよ.

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフにおいて，点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と法線の方程式を求めよ.

(2) どのような場合に，関数 $y=f(x)$ が $x=\alpha$ で極値をとるといわれるのかを説明せよ.

(3) 関数 $y=f(x)$ が x のいかなる値でも極値をとらない条件を a, b, c を用いて示せ.

(茨城大 2002)　　(m20021701)

0.26 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ において $ax+by+cz+d=0$ で与えられる平面 H を考える． 平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする． また，$\boldsymbol{v}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$（H と直交する長さ 1 のベクトル）を求めよ.

(2) $\boldsymbol{v}-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\,\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交することを示せ．また $\boldsymbol{v}-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\,\boldsymbol{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ.
ただし，$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す.

(3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\,\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle\,|$ で与えられることを説明せよ.

(4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大 2012)　　(m20122015)

0.27 曲線 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における法線の方程式を求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172008)

0.28 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A, B, C，3 点 A, B, C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする．ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで，原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする.

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.29 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい.

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

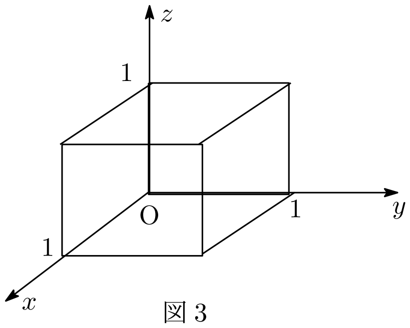


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.30　関数 $f(x,y,z)=\exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f=c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f=\dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f=c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(=\nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.31　(1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線の集合が表す微分方程式を求めよ．

(2) 線形微分方程式 $y'+y=2+2x$ の一般解を求めよ．

(3) 法線影の長さが一定の長さ $a(>0)$ に等しい曲線群のうち， 原点 $O(0,0)$ を通る第一象限の曲線を求めよ．ここで法線影とは，曲線上の一点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を H，P における法線が x 軸と交わる点を N としたときの有向線分 HN の長さをいう．

(富山大 2012)　　(m20122306)

0.32　空間に位置ベクトル $\overrightarrow{a}$ が示す点 A と位置ベクトル $\overrightarrow{b}$ が示す点 B がある．

(1) 点 A を通る直線 ℓ のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて表せ．ただし，直線 ℓ の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とする．

(2) 直線 ℓ のうち，$\overrightarrow{b}$ に平行な直線のベクトル方程式を媒介変数を用いずに表せ．

(3) 点 B を通る平面 S のベクトル方程式を求めよ．ただし，平面 S の単位法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とする．

(4) 点 A から平面 S までの最短距離を媒介変数を用いずに表せ．

(富山大 2013)　　(m20132303)

0.33　$\phi(x,y,z)=e^{2x^2-4y^3+z^2}$，$\overrightarrow{A}(x,y,z)=2xyz^3\overrightarrow{i}+x^2z^3\overrightarrow{j}+3x^2yz^2\overrightarrow{k}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は直交座標の単位ベクトルである．

(1) rot $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{0}$ を示せ．

(2) 点 $(1,1,-1)$ において，$\phi\overrightarrow{A}$ の発散の値を求めよ．

(3) 点 $(1,1,-1)$ における ϕ の点 $(-3,5,6)$ に向かう方向の方向微分係数を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_S \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S は円柱面 ： $x^2+y^2=1$ の $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 0 \leqq z \leqq 1$ を満たす部分とし，$\overrightarrow{n}$ は S の単位法線ベクトルとする．

(富山大 2014)　　(m20142303)

0.34 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r\ \ (r>0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$，$r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ．

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ．

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.35 スカラー関数 $f(x,y,z)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について，　次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の $x,\ y,\ z$ 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の $x,\ y,\ z$ 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla\cdot\nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla\times\nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1,0,1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.36 スカラー場 $\phi(x,y,z)=x^2y+y^2z-xy\,e^{(z^2)}$，ベクトル場 $\overrightarrow{F}(x,y,z)=-y\overrightarrow{i}+x\overrightarrow{j}+xyz\overrightarrow{k}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}$ は直交座標系 $x,\ y,\ z$ の各軸方向の単位ベクトルとする．また，点 P の座標を $(2,\ 1,\ 0)$ とする．

(1) 点 P における，ϕ の等位面の単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 点 P における，$\overrightarrow{F}$ 方向に対する ϕ の方向微分係数を求めよ．

(3) $\mathrm{rot}\overrightarrow{F}$ を求めよ．

(4) 原点 O から点 P に至る線分 OP における，$\overrightarrow{F}$ の線積分 $\displaystyle\int_{OP}\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}$ を求めよ．ここで，$\overrightarrow{r}$ は位置ベクトルである．

(富山大 2022)　　(m20222304)

0.37 曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 $(1,2,5)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012408)

0.38 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ のとき，$t=t_0$ に対応する点 (x_0,y_0) における接線と法線の方程式を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062402)

0.39 (x,y) 平面上の任意の点 A における法線へ原点から下ろした垂線の長さが，点 A の y 座標に等しい曲線は $x^2+y^2=cx\ \ (c$ は定数$)$ となることを示せ．

(静岡大 2006)　　(m20062509)

0.40 xyz 空間における平面 $\pi : x+2y+3z-5=0$ および直線 $g : \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-5}=\dfrac{z+3}{2}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 平面 π の単位法線ベクトルを求めよ.

(2) 直線 g の単位方向ベクトルを求めよ.

(3) 平面 π と直線 g の交点の座標を求めよ.

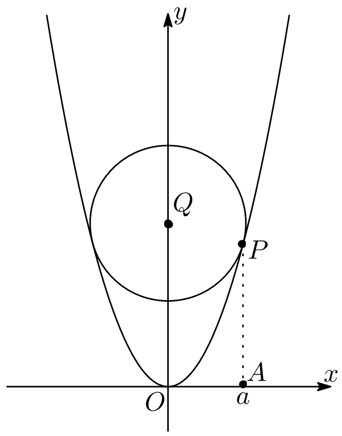
（岐阜大 2004）　(m20042605)

次式で表される放物線がある.

$$y=x^2$$

図に示すように, y 軸上にある点 Q を中心とする円がこの放物線に接している. $x>0$ の領域における接点を P とし, 点 P から x 軸に下ろした垂線の x 軸との交点を A とし, その x 座標を a とする.

以下の問いに答えよ.



0.41 (1) 点 P を通り, 放物線に接する直線の方程式を a を用いて表せ.

(2) 点 P を通り放物線の法線となる直線の方程式を a を用いて表せ.

(3) 点 Q の y 座標を a を用いて表せ.

(4) 原点 O から点 Q までの距離 $\overline{OQ}$ と点 A までの距離 $\overline{OA}$ の比 $r=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}$ が最小となる a の値を求めよ.
また, そのときの r の値を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　(m20052705)

0.42 放物線 $y=x^2$ から点 $A(10,2)$ までの最短距離を次の方法に従って求めよ.

(1) この放物線上の点 $P(x_p, x_p^2)$ における法線の方程式を求めよ.

(2) 上で求めた法線が点 A を通ることから x_p を求め，点 P と点 A の距離を計算せよ.

(豊橋技科大 2006)　(m20062702)

0.43 (1) 次の行列の行列式を $\det A$ とする.

$$A=\begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

ここで，a,b,c,d,e,f,l,m,n は定数として，方程式 $\det A=0$ が 3 次元空間（xyz 空間）上の平面の式を与えることを示せ．また，この平面の法線ベクトルを求めよ.

(2) この平面に直線 $\dfrac{x-d}{l}=\dfrac{y-e}{m}=\dfrac{z-f}{n}$ が含まれることを示せ.

(三重大 2003)　(m20033112)

0.44 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\angle AOB=\theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ.

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O,A,B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.45 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0,0,2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x,y,z を用いてあらわしなさい．

(2) 楕円 E 上の点 $(0,2,0)$ をとおり，$\overrightarrow{n}=(0,1,3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい．

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい．

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.46 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて　$x=r(t-\sin t),\ y=r(1-\cos t)\quad(0 \leq t \leq 2\pi)$
で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a,0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x=a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.47 滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 4 − 1 に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 4 − 1, 4 − 2）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2-\boldsymbol{m}_1=d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right|=\dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

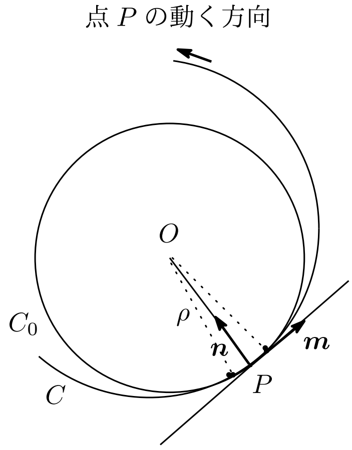


図 4 − 1

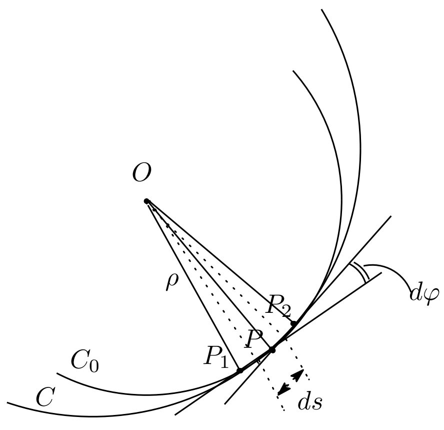


図 4 − 2

(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が,

$\boldsymbol{r}(t) = [b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$ （$b,\ c$ は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ.

(京都大 2013)　　(m20133304)

0.48 関数 $f(x,y) = x^y \ (x > 0,\ y > 0)$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(e, 1, f(e,1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ.

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083403)

0.49 曲線 C 上の点を $P(x,y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ.

(大阪大 2009)　　(m20093503)

0.50 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$，$\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$，$\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$，$\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ.

$$A\cdot(B\times\ C) = B\cdot(C\times\ A) = C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4,3,5)$，$\boldsymbol{b} = (3,1,4)$，$\boldsymbol{c} = (8,3,2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ.

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする.

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\ \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\ \cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる.

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r,\ \ 0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqq\ v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ.

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.51 原点を中心とした半径 $r\ (r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 $u,\ v$（ラジアン単位）を用いて,

$$\boldsymbol{r}\big(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\ \boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$

$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$，$\boldsymbol{i}_y$，$\boldsymbol{i}_z$ は x，y，z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである.

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r，$\boldsymbol{i}_r$，v で表せ.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分,

$$\iint_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.52 x, y 実数とし,

$$f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z = f(x,y)$ の, 点 $(1,1,\pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010)　　(m20103804)

0.53 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \quad (a, b > 0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0, y_0, z_0), $(x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073905)

0.54 $z = xy$ なる面上の点 $P(2, -1, -2)$ において，この面の単位法線ベクトルを求めよ.

(広島大 2001)　　(m20014106)

0.55 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を，z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.56 次の線形変換を考える．以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換の像 $\boldsymbol{p}'$ はある平面上に限定される．この平面を表す式を求めよ.

(2) (1) で求めた平面に対する零でない法線方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ.

また，$\boldsymbol{u}$ とベクトル $\boldsymbol{p}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ に直交するベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{p} \neq 0$ のとき $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ の最大値を求めよ． $\dfrac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}$ が最大値をとるときの x, y, z の条件を示せ．

(九州大 2020)　　(m20204706)

0.57 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ．ただし，λ_j $(j=1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$ を満たす実数とする．

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi}=\lambda_1\nabla\lambda_2-\lambda_2\nabla\lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi}=\lambda_2\nabla\lambda_3-\lambda_3\nabla\lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を，a, b, c, x, y, z を用いて表せ．

(3) 関数 $f=f(x,y,z)$ を $f(x,y,z)=e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z)+x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき，積分

$$\int_{\ell_{AB}} f\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし，ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分，$\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである．

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき，積分

$$\int_S (\nabla\times f)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形，$\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である．

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.58 曲面 $z=x^2+y^2$ の点 $(3,4,25)$ における接平面と法線の式を求めよ．

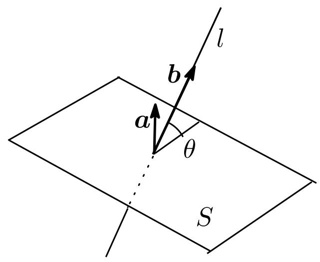
(九州芸術工科大 2003)　　(m20034803)

0.59 頂点の座標が, A 点 $(1,0,1)$, B 点 $(2,0,1)$, C 点 $(3,3,5)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積と法線方向の単位ベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2005)　　(m20055414)

0.60 次のベクトルに関する問いに答えよ．

(1) 右図のように，$\boldsymbol{a}$ は平面 S と直交する法線ベクトルであり，$\boldsymbol{b}$ は平面 S と角 θ $(\leq 90^\circ)$ で交わる直線 l の上に存在するベクトルである．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を用いて $\sin\theta$ を表せ．



(2) 次の式で表される二つの平面 S_1 と S_2 の交角 α を求めよ．

$S_1\ :\ x+2y+2z=3$　　　　$S_2\ :\ 3x+3y=1$

(鹿児島大 2008)　　(m20085403)

0.61 空間に直交座標系 (x,y,z) をとる．以下の設問に答えなさい．

(1) 点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ および $(0,0,1)$ を含む平面の方程式を求めよ．

(2) この平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (l, m, n)$ $(\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1)$ を求めよ.

(3) 座標原点からこの平面までの距離 s を求めよ.

(鹿児島大 2009) (m20095415)

0.62 直交座標系 $O-XYZ$ において，点 $A(1,-3,2)$ を含む平面 C_A : $-2x+y+3z-1=0$，点 $B(1,-1,-2)$ を含む平面 C_B : $3x+2y+z+1=0$ がある．次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．平面 C_A の点 A を通る法線の方程式，平面 C_B の点 B を通る法線の方程式をそれぞれ求めよ.

(2) 両平面の交線の単位方向ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2011) (m20115404)

0.63 直交座標系 $O-XYZ$ において，平面 C_A : $x+y=0$ と平面 C_B : $5y+z=0$ がある．次の問いに答えよ.

(1) 両平面の法線ベクトルを求めよ．さらに，両平面の交線にある交線ベクトルを求めよ.

(2) 上記の交線ベクトルを平面 C_P の法線ベクトルとして，点 $P(1,2,1)$ を含んで平面 C_A と平面 C_B にそれぞれ直交する平面 C_P を求めよ.

(鹿児島大 2012) (m20125410)

0.64 $O-xyz$ 座標系において，次の法線ベクトルをもつ二つの平面に関して以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{n}_1 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の単位ベクトルを表す.

(1) 二つの平面が直交することを示せ.

(2) 二つの平面に平行な直線の単位方向ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2016) (m20165404)

0.65 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$，点 $B(0,2,0)$ および点 $C(-1,-2,3)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) この 3 点を通る平面の方程式を求めよ.

(2) 求めた平面に直交な法線の単位方向ベクトルを求めよ.

(鹿児島大 2017) (m20175404)

0.66 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える.

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ $(|\boldsymbol{n}| = 1)$ を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV = \iiint \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016) (m20165508)

0.67 xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.68 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x}$ を求めなさい．

(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{5^2}=3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい．

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい．

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\ ,\quad D=\{(x,y)\mid x\geqq\ 0,\ y\geqq\ 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)