[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：フーリエ

0.1 周期が 2π の次の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

(北海道大 2005)　(m20050102)

0.2 図 1 に示す周期が 2π の関数 $y(x) = \begin{cases} -x & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$ のフーリエ級数を求めなさい.

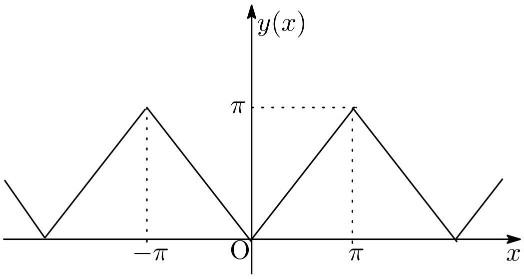
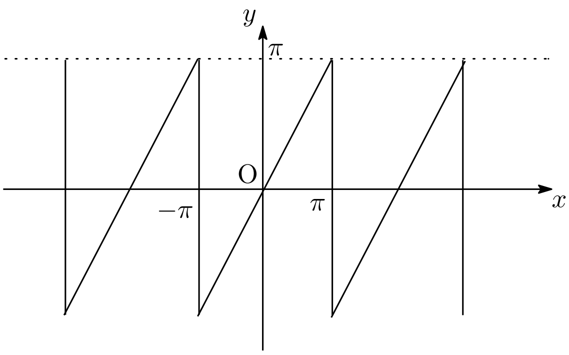


図 1

(北海道大 2006)　(m20060103)

0.3 (1) 次の周期 2π の周期関数（下図参照）をフーリエ展開せよ.　$f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$

(2) $x = \dfrac{\pi}{2}$ とおいて，π を与える次の式を導出せよ.　$\pi = 4\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$



(北海道大 2007)　(m20070104)

0.4 (1) 次の関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ のフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

(2) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

とし，$i = \sqrt{-1}$ とする．次の関数のフーリエ変換 $F(k)$ を求めなさい.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(北海道大 2008)　(m20080104)

0.5 区間 $[-\pi, \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1), (2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) (1) の結果を利用して,

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 2010)　　(m20100103)

0.6 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

とし, 関数 $F(\omega)$ のフリーエ逆変換 $f(t)$ を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

とするとき．次の設問に答えよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ であり，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が $e^{-a\omega^2}$ であるとき，もとの関数 $f(t)$ を求めよ．ただし,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を利用せよ．ここで，$a > 0$ である.

(2) 以下の関係式を満たす関数 $f(t)$ を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) f(\tau) d\tau = e^{\frac{t^2}{2}}$$

(北海道大 2011)　　(m20110102)

0.7 以下の設問に答えよ．途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $f(x) = x$ を区間 $[-\pi, \pi]$ 上でフーリエ級数に展開した結果が
$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n}$
となることを示せ.

(2) $-\pi \leq a \leq \pi$ を満たす任意の定数 a に対して，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$x^2 = a^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos(nx) - \cos(na)}{n^2}$
が成立することを示せ.

(3) (2) の結果を用いて，x の区間 $[-\pi, \pi]$ において
$x^3 - \pi^2 x = 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n^3}$
を導け.

(北海道大 2012)　　(m20120104)

0.8 微分方程式と周期関数について，以下の設問に答えよ．途中の計算手順も，詳しく記述すること.

(1) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = 0$$

(2) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，n は 1 以上の整数である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = \cos nx$$

(3) 関数 $g(x)$ は，周期 2π の周期関数であり，原点を含む 1 周期は次式で表される．
この関数をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 + \dfrac{2x}{\pi}\right) & (-\pi \leq x < 0) \\ \dfrac{\pi^2}{8}\left(1 - \dfrac{2x}{\pi}\right) & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

(4) 次の微分方程式を解き，一般解 $y(x)$ を求めよ．なお，右辺は (3) の周期関数 $g(x)$ である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 10y = g(x)$$

(北海道大 2013) (m20130102)

0.9 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ．

(北海道大 2014) (m20140103)

0.10 f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$F[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 下記の関数 $P(t)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

$$P(t) = \begin{cases} 1 & ,\ |t| < t_0 \\ 0 & ,\ |t| > t_0 \end{cases} \qquad (t_0 > 0)$$

(2) 関数 $P(t + 4t_0) + P(t - 4t_0)$ を横軸 t として図示し，そのフーリエ変換を求めよ．

(北海道大 2015) (m20150104)

0.11 周期 2π の周期関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{\pi}$ $\left(-\pi \leq x \leq \pi\right)$ のフーリエ級数 $S[f]$ を求めよ．

(北海道大 2016) (m20160103)

0.12 次式の関数について，次の各設問に答えなさい．ただし，$0 < D < 1$ とする．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leqq x < -D\pi) \\ 1 & (-D\pi \leqq x < D\pi) \\ 0 & (D\pi \leqq x < \pi) \end{cases}$$

設問 1. 次式で示されるフーリエ級数の各係数を求めなさい．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

設問 2. 上式において，n が偶数の項の係数がすべて 0 となる D の条件を求めなさい.

(北海道大 2018)　　(m20180105)

0.13　f を周波数とするとき，時間 t の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．また，時間 t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ の畳み込みは

$$p(t) * q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)q(t-\tau)d\tau$$

で与えられる．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，以下の設問に答えなさい.

(1)　次の関数 $g(t)$ を横軸 t として図示しなさい.

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

(2)　次の関数 $h(t)$ を横軸 t として図示しなさい.

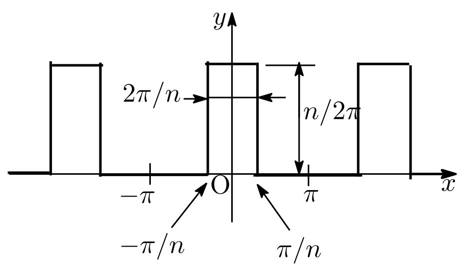
$$h(t) = g(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

(3)　$g(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(4)　$h(t)$ のフーリエ変換を求めなさい.

(北海道大 2019)　　(m20190104)

0.14　右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に 1 である（ただし n は 2 以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる．以下の設問に答えなさい.



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1)　$n = 2$ のとき，a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい.

(2)　2 以上の整数 n について，a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい.

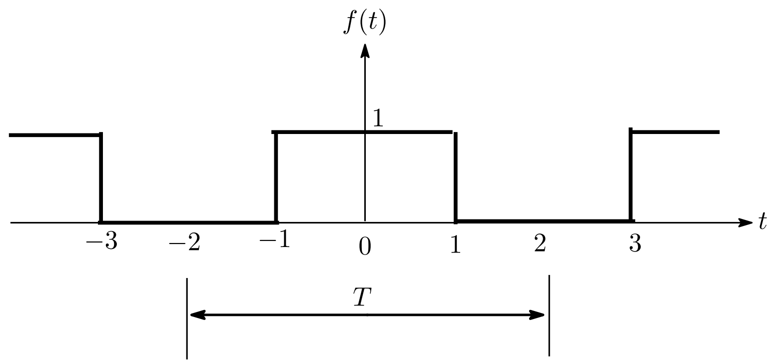
(3)　(2) の結果において，n を ∞ に漸近させると，与えられたパレス列はデルタ関数列になる．この条件における a_k を求めなさい.

(北海道大 2021)　　(m20210103)

0.15　次の図のような矩形パルス（周期 $T = 4$）をフーリエ級数展開するとき，

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \right\}$$

で表すことができる．以下の設問に答えなさい.



(1) a_0, a_n および b_n を T を用いた式で表しなさい.

(2) $T = 4$ のときの a_0, a_n および b_n を求めなさい.

(北海道大 2022)　　(m20220104)

0.16　区間 $[a, b]$ 上の関数 $f(x)$, $g(x)$ は,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

が成り立つとき互いに直交しているという．以下の問いに答えよ.

(1) 次の (a)〜(e) に示した関数が区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上で互いに直交していることをそれぞれ示せ．ただし，k, l はともに自然数である.

(a) $\dfrac{1}{2}$ と $\cos kx$

(b) $\dfrac{1}{2}$ と $\sin kx$

(c) $\cos kx$ と $\sin lx$

(d) $\cos kx$ と $\cos lx$　$(k \neq l)$

(e) $\sin kx$ と $\sin lx$　$(k \neq l)$

(2) 区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の任意の関数 $f(x)$ は, $\dfrac{1}{2}$, $\cos kx$, $\sin kx$ の線形和によって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \end{aligned}$$

と表すことができる（これをフーリエ級数展開という）．係数 a_0, a_k, b_k をそれぞれ $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 次の関数 $f(x)$ を区間 $[-\pi\ ,\ \pi]$ 上でフーリエ級数に展開せよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(岩手大 2009)　　(m20090301)

0.17　関数

$$f(x) = |\cos x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

のフーリエ級数を求めよ.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090608)

0.18 次の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(\boldsymbol{r})=a\delta(\boldsymbol{r}), \tag{a}$$

に関する以下の問いに答えなさい．ここで右辺の a は正の実数，$\delta(\boldsymbol{r})$ は 3 次元のデルタ関数

$$\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{b}$$

である．

(1) 関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ のフーリエ変換を

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) \tag{c}$$

とした時，これが方程式 (a) を満たすということから関数 $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を求めなさい．

(2) 積分要素 $d\boldsymbol{k}$ の直交座標系 (k_x,k_y,k_z) から極座標系 (k,θ,ϕ) への変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{k}=\int_0^{\infty}dk\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\phi|J| \tag{d}$$

で与えられる．このときのヤコビアン J を書きなさい．ここで $k=|\boldsymbol{k}|$ である．また (d) の右辺が

$$\int_0^{\infty}k^2dk\int_{-1}^{1}d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\phi \tag{e}$$

と書けることを示しなさい．

(3) 問 (1) で求めた $\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$ を使って，(c) から $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい．必要があれば，公式

$$\int_0^{\infty}dx\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2} \tag{f}$$

を用いてもよい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130606)

0.19 関数 $f(x)$ は区間 $-\pi\le x\le\pi$ で $f(x)=|x|$ の周期 2π の周期関数とする．$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190611)

0.20 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m,n は $m,n>0$ の整数とする．

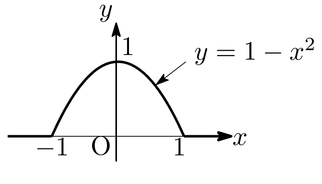
(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$ を求めよ．なお計算過程も示せ．ただし，m,n は $m,n>0$ の整数とする．

(3) フーリエ級数 $\displaystyle f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$ について，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[{a_n}^2+{b_n}^2\right]$$ を証明せよ．

(東京大 1998)　　(m19980704)

0.21 下記のグラフで与えられる関数のフーリエ変換を求めよ．



(東京大 1999)　　(m19990705)

0.22 次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ.

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\,, & a \text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a \sin(nx) \cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.23 x を変数とする関数を $f(x)$ とする．複素単位を $i = \sqrt{-1}$ として，

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

によって決まる ω の関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換という． $F(\omega)$ から逆に $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega x} d\omega$$

によって求めることができる．この逆を逆フーリエ変換という.

関数 $F(\omega)$ を ω で微分することを考える.

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx$$

より微分と積分を入れ換えると，

$$\frac{d}{d\omega} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} \big(f(x)\, e^{-i\omega x} \big) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \big(-ixf(x)\, e^{-i\omega x} \big) dx$$

となり，関数 $(-ix)f(x)$ のフーリエ変換が $\frac{d}{d\omega} F(\omega)$ であることがわかる．このことを利用して以下の設問に答えなさい．ただし，ここで扱う全ての関数は微分と積分の順序を交換できる性質を満たしていることを仮定する.

(1) ω に関する $F(\omega)$ の決める関数 $\frac{d^2}{d\omega^2} F(\omega)$ が関数 $(-x^2)f(x)$ のフーリエ変換であることを示しなさい.

(2) 逆フーリエ変換が $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ になる関数を $F(\omega)$ によって表しなさい.

(3) 微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x^2 f(x) = -(2n+1) f(x)\,,\ \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \qquad (*)$$

の解 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が満たす微分方程式を導きなさい．ただし， n は零以上の整数である.

(4) 設問 (3) の結果から，式 $(*)$ の微分方程式の解のフーリエ変換に関する性質を５０字程度で述べなさい.

(千葉大 2001)　　(m20011204)

0.24 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書かれた時，$f(x)$ はフーリエ級数展開されたという．一般に，係数 a_n, b_n は

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

として求められる．今，$f(x)$ が，区間 $-\pi < x \leq \pi$ で

$$f(x) = x$$

である時，フーリエ級数の係数 a_n, b_n を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012010)

0.25　(1)　1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.
$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2)　上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3)　$\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4)　$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052106)

0.26　連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j = \sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1)　関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0,\ t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2)　$f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3)　$f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4)　$f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006)　　(m20062105)

0.27　関数 $f(x)$ が以下のように与えられている.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ のフーリエ変換　$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$　を求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202413)

0.28 (1) 複素フーリエ級数展開を用いて以下の関数が成立することを示せ

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

(2) 関数 $f(t)$ 及び $g(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ 及び $G(\omega)$ と表す．このとき，以下のフーリエ変換が $F(\omega)G(\omega)$ となることを示せ．

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(t-u)du$$

(福井大 2021)　　(m20212412)

0.29 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を考える．以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(\dfrac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(1) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx \ dx \quad (n \neq 0)$$

(2) 以下の積分を計算せよ．

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx \ dx \quad (n \neq 0)$$

(3) 基本周期が 2π である関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222423)

0.30 次式 (n は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & (2n-1)\pi < x \leqq 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \leqq (2n+1)\pi \end{cases}$$

(名古屋大 2016)　　(m20162803)

0.31 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083405)

0.32 関数 $f(x)$ を近似する三角多項式

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の中で誤差

$$E_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(P_N(x) - f(x)\right)^2 dx$$

を最小にする

$$\{a_0\,,\ a_1\,,\cdots\,,\ a_N\,,\ b_1\,,\cdots\,,\ b_N\}$$

は $f(x)$ のフーリエ係数であることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053510)

0.33　(1)　関数 $f(x) = \dfrac{x^2}{4}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ を　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$　とフーリエ級数に展開したとき, a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, b_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$　を求めよ.

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ を示せ.

(大阪大 2007)　　(m20073511)

0.34　閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する.

(1)　$f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2)　(1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009)　　(m20093507)

0.35　n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.

すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi i n x}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi i n x}$$

とフーリエ展開する.

(1)　$p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2)　$q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\, ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi i n x}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.36　(1)

$$f(x)=\left(\frac{x^2}{\pi}-\cos(x)\right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n=0,1,2,\cdots),\ b_n,\ (n=1,2,\cdots)$$

を求めよ.

(2)　(1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123510)

0.37　自然数 m,k に対して,

$$A_{m,k}=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^m x\,\cos kx\,dx\,, \quad A_{0,0}=2\pi$$

とおく.

(1)　任意の自然数 m,k に対して，以下の等式を示せ.

$$A_{m,k}=\frac{1}{1+\frac{k}{m}}A_{m-1,k-1}$$

ただし，$\cos(k-1)x=\cos kx\cos x+\sin kx\sin x$ を用いてもよい.

(2)　自然数 m が与えられたとき，$\cos^{2m-1}x$ のフーリエ級数が

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}\cos(2k-1)x$$

の形で表されることを示し，フーリエ級数 a_{2m-1} を求めよ.
ただし，$\cos^{2m-1}x=(\cos x)^{2m-1}$ とする.

(大阪大 2013)　　(m20133507)

0.38　$\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset\mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える.

条件 1 ：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big|<\infty, \qquad x\in I$

条件 2 ：$\displaystyle\max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\to 0 \qquad (m,n\to\infty)$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=|x|\ \ (x\in[-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において絶対収束することを示せ.

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において一様収束することを示せ.

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.39 (1) α は整数でない実数とする. $\cos(\alpha x)$ $(-\pi<x<\pi)$ をフーリエ級数展開せよ. すなわち

$$\cos(\alpha x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big\}\ ,\qquad -\pi<x<\pi$$

を満たす

$$a_n\ ,\quad n=0,1,2,\cdots$$
$$b_n\ ,\quad n=1,2,\cdots$$

を求めよ.

(2) y は $\sin y\neq 0$ を満たす実数とする. (1) の結果を利用して

$$\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{y}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{y+n\pi}+\frac{1}{y-n\pi}\right\}$$

が成立することを示せ.

(大阪大 2016)　　(m20163506)

0.40 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる, 周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ. すなわち, $f(x)$ が連続な点で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

をそれぞれ求めよ.

(1-1) $f(x)=\cos^2x+\cos x$

(1-2) $f(x)=x\quad(-\pi<x\leqq\pi)\ ,\quad f(x+2\pi)=f(x)$

(2) (1) の結果を利用して, 等式

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を示せ.

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.41 周期 2π の関数 $f(x)=x\quad(-\pi<x\leq\pi)$ のフーリエ級数を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193604)

0.42 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\ ,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$ （ n：整数）をそれぞれ求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$ （n,m：正整数）をそれぞれ求めなさい.

(3) 周期 2π をもち，$f(x)=\begin{cases} -\pi/4 & (-\pi<x<0\text{のとき}) \\ \pi/4 & (0<x<\pi\text{のとき}) \end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい．

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.43 (1) 2つの任意の自然数 m,n について，次をそれぞれ示せ．

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx=0$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases} 0\ ;\ m\neq n \\ \pi\ ;\ m=n \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases} 0\ ;\ m\neq n \\ \pi\ ;\ m=n \end{cases}$

(2) 周期 2π の関数 $f(x)$ がフーリエ級数に展開できる，つまり　$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ と表現できるとき，

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$　　(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos pxdx$　　(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin pxdx$　　$(\ p=1,2,\cdots)$

をそれぞれ計算せよ．

(3) 周期 2π の関数 $f(x)=|x|\ ;\ -\pi<x\leq\pi$ をフーリエ級数に展開せよ．

(4) (3) の結果を用いて，

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$　　(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$　　(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$　　をそれぞれ計算せよ．

(九州大 2006)　　(m20064704)

0.44 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，　$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$，　$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$，

$g(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする．

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ は発散することを示せ．

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ．

(4) $x=\pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ．

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.45 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \left(-\pi\leqq x<-\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4}\leqq x<\pi\right) \end{cases}\quad ,\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y=F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t)=\begin{cases} a & (|t|\leqq T) \\ 0 & (|t|>T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t>0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.46 (1) 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を次のように定める．以下の問いに答えよ．

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,\cdots), \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,\cdots)$$

(a) 任意の実数 α に対して $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(x)\cos nxdx=a_n$ が成立することを示せ．

(b) 整数 n と実数 x に対して $\cos n(x+\pi)=\begin{cases}\cos nx & (n\text{ が偶数})\\ -\cos nx & (n\text{ が奇数})\end{cases}$ が成立する．

このことを踏まえ，関数 $g(x)=f(x+\pi)$ のフーリエ係数 $a_n'=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nxdx$,

$b_n'=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nxdx$ を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ とおく．以下の問いに答えよ．

(a) $f(x)=e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ．

(b) フーリエの積分定理（逆フーリエ変換）を利用して，次の定積分を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{\cos u}{1+u^2}du$$

(九州大 2013)　　(m20134703)

0.47 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=|x| \quad (-\pi\leqq x<\pi), \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ．

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ．

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.48 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\boxed{\begin{array}{l} \mathfrak{L}[1] = \dfrac{1}{s}, \quad \mathfrak{L}[t^n] = \dfrac{n!}{s^{n+1}}\ (n = 1, 2, \cdots), \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}, \quad \mathfrak{L}[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}, \\ \mathfrak{L}[\cos \omega t] = \dfrac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s) \end{array}}$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.49 (1) $f(x) = \begin{cases} 1\,, & (0 \leq x \leq 1) \\ 0\,, & (\text{上記以外}) \end{cases}$ とする．以下の設問に答えよ．

(a) $f(x)$ 自身の畳み込み積分 $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$ を求めよ．

(b) $f(x)$ のフーリエ変換 $F(u)$ を求めよ．

(c) $g(x)$ のフーリエ変換 $G(u)$ が $F(u)^2$ で与えられることを示せ．

(2) $f(x)$ が $f(x) = x$ ，　$(-\pi \leq x \leq \pi)$ で与えられる周期関数とする．ここで周期 T は 2π である．$f(x)$ を $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ によりフーリエ級数展開し，$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$ であることを示せ．なお，i は虚数単位を表す．また，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ である．

(九州大 2017)　　(m20174708)

0.50 周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ．

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.51　関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

(2) $f(t)$ が $f(t)=\begin{cases} 1 & , \quad |t|\leq T \\ 0 & , \quad |t|>T \end{cases}$ 　ただし T は正の実数　で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω, 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055007)

0.52　1 周期が次のような周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t)=t \qquad (-1\leqq\ t<1)$$

(大分大 2008)　　(m20085102)

0.53　次の関数 $f(x)$ の $[-\pi,\ \pi]$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-\pi\leq x\leq 0) \\ -1 & (0<x<\pi) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(大分大 2009)　　(m20095103)

0.54　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (-\pi<t\leqq\ 0) \\ 1 & (0<t\leqq\pi) \end{cases}$$

(大分大 2011)　　(m20115103)

0.55　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (-\pi\leqq\ t\leqq\ 0) \\ -1 & (0<t<\pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125103)

0.56　1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き，そのフーリエ級数を求めよ.

$$f(t)=\begin{cases} -\pi & (-\pi<t\leqq\ 0) \\ 2t-\pi & (0<t\leqq\pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125106)

0.57　次のように定義される周期関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい.

$$f(x)=x^2 \quad (-\pi\leq x<\pi), \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい.

(大分大 2013)　　(m20135102)

0.58　周期関数 $f(x)=|x|\ \ (-\pi\leq x<\pi), \quad f(x+2\pi)=f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

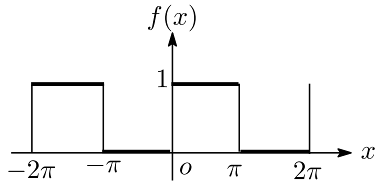
$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

これを用いて，次の公式を証明せよ．

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013)　　(m20135104)

0.59 右図のような周期が 2π の関数 $f(x)$ をフーリエ級数展開しなさい．



(室蘭工業大 2005)　　(m20055510)

0.60 区間 2π で定義された関数　$f(t)=\pi-|t|$; $-\pi\le t\le\pi$　を $f(t+2\pi)=f(t)$ の関係によって周期関数に拡張した関数を考える．

(1) この関数の概形を $-2\pi\le t\le 2\pi$ の範囲で図に示せ．縦軸，横軸に適切な数値を入れること．

(2) この周期関数をフーリエ級数で表せ．

(室蘭工業大 2006)　　(m20065509)

0.61 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi,\pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\quad b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases}-2x & (-\pi\leqq\ x\leqq\ 0)\\ 2x & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.62 (1) 周期 2π の周期関数 $f(x)=\pi^2-x^2$ $(-\pi\leqq\ x<\pi)$ のフーリエ級数を求めなさい．

(2) (1) の結果を利用して，$1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$ を示しなさい．

(和歌山大 2007)　　(m20076508)

0.63 (1) $f(t)=e^{-|t|}$ のフーリエ変換を求めなさい．

(2) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega}{1+\omega^2}d\omega$ と $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\omega}{1+\omega^2}d\omega$ の値を求めなさい．

(和歌山大 2009)　　(m20096504)

0.64 周期 X の周期関数

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\ |x|\leqq\ d/2\ )\\ 0 & (\ d/2<|x|\leqq\ X/2)\end{cases}$$

について次の問いに答えなさい．ただし，$0<d<X$ である．

(1) $f(x)$ をフーリエ級数に展開しなさい．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\alpha}{n}$ の値を求めなさい．ただし，$0<\alpha<1$ とする．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi\alpha}{2n-1}$ の値を求めなさい. ただし, $0 < \alpha < 1$ とする.

(和歌山大 2010)　　(m20106504)

0.65　次の各問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int e^x \cos nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(2) $\displaystyle\int e^x \sin nx\, dx$ を求めなさい．ただし n は正の整数とする.

(3) 関数 $f(x) = e^x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$ をフーリエ級数展開 $f(x) \approx \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big]$ したとき，係数 $a_n (n \geq 0)$，$b_n (n \geq 1)$ を求めなさい.

(和歌山大 2012)　　(m20126507)

0.66　関数 $f(t) = |t| \quad (-1 < t < 1)$ について，次の各問いに答えなさい.

(1) $f(t)$ をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2013)　　(m20136506)

0.67　次の関数のフーリエ変換を求めなさい.

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

(2) $f(t) = e^{-|t|}$

(3) $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

(和歌山大 2014)　　(m20146509)

0.68　(1) $f(x) = |\sin x| \ (-\pi \leq x \leq \pi)$ で定められる周期関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(2) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2(2m+1)^2}$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2016)　　(m20166507)

0.69　関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する．ただし，i は虚数単位，e は自然対数の基底である.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

また，2 つの関数 $g(x)$，$h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する.

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\alpha) h(\alpha) d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする．関数 $f_2(x)$ を求め，その概略図を描きなさい．

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.70 関数 $f(x)$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とするとき，次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) a_0 を求めなさい．

(2) a_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(3) b_n，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を求めなさい．

(和歌山大 2018)　　(m20186506)