[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：表現行列

0.1 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x,y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \;:\; x \mapsto (x\,,\,\phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　(m20050506)

0.2 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \qquad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5, a_6 を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて書き表せ.

(3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は,

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4,\ n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$, $\{e_n^{(2)}\}$, $\{e_n^{(3)}\}$, $\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ.

(4) 線形写像 $T : W \to W$ を,

$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \qquad \text{ただし} \qquad b_n = a_{n+1}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.3　3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1)　V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\left\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\right\}$，$\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2)　3 次以下の実数係数多項式 f で，

$$f(-1) = 3, \qquad f'(-1) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.4　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ．

(1)　f の表現行列 A を求めよ．

(2)　A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110608)

0.5　次の 3 次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE-A)=(x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$ と因数分解される．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(2) $V_1=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ (A-\lambda_1E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$, $V_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ (A-\lambda_2E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ．

(3) $(A-\lambda_1E)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ．

(4) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.6 $V=\mathbb{R}^4$ とし，$B=\{\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{v}_2\,,\ \boldsymbol{v}_3\,,\ \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする．$f:V\to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_2\,,\quad f(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_3\,,\quad f(\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{v}_1\,,\quad f(\boldsymbol{v}_4)=\boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし，$g:V\to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\,,\quad g(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3\,,\quad g(\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_1\,,\quad g(\boldsymbol{v}_4)=\boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\,f$ の基底と次元，$\mathrm{Im}\,f$ の基底と次元を求めよ．

(2) 線形写像 $g:V\to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ．さらに，行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) g は同型写像である．g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091002)

0.7 $\nu=\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が 3 次元線形空間 V の基底であり，1 次変換 $f:V\to V$ が

$$f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2-2\boldsymbol{v}_3\,,\quad f(\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3\,,\quad f(\boldsymbol{v}_3)=-\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3\,,$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) f の基底 ν に関する表現行列 A を求めよ．

(2) 合成写像 $g=f\circ f$ の，基底 ν に関する表現行列 B を求めよ．

(3) $\mathrm{rank}A$, $\mathrm{rank}B$ を それぞれ求めよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101002)

0.8 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める．ここで，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$, $f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111002)

0.9 3次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ．

(2) 原点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ．

(3) 次の条件を満たす3次正方行列 A を求めよ．

(a) A の対角成分は上から $1, -5, 2$ である．

(b) $\boldsymbol{a}$ は A の固有値 2 に対する固有ベクトルである．

(c) $\boldsymbol{b}$ は A の固有値 -1 に対する固有ベクトルである．

(4) 前問の条件を満たす A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える．k, ℓ を実数とするとき $k\boldsymbol{a} + \ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ．

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする． A の定める W から W への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2013) (m20131001)

0.10 4次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため，掲載を差し控えさせていただきます．

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ．

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を1組求めよ．

(電気通信大 2014) (m20141001)

0.11 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ.

ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である.

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.12 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する.

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$.

さらに，W を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ.

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.13 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ.

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.14 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える.

基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする.

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.15　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 x_1, x_2 が与えられれば定まる．そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 T を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1\ ,\ \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する T の表現行列が A になることを示しなさい．

(3) A^n の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．ただし，A^n は $A\times\ A\times\ \cdots\times\ A$ を表す．

(千葉大 2013)　　(m20131202)

0.16　集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix},\quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f\ :\ P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ．

(2) f が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061315)

0.17　線形写像　$f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$　$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + \ \ x_3 \\ ax_1 + \ \ x_2 + ax_3 \\ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix}$　$(a \in \boldsymbol{R})$

について，以下の問に答えなさい．

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ．

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ．

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071315)

0.18　線形空間 $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$，線形空間 $\boldsymbol{W}$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ とする．$\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ への線形写像 F が下記の関係を満たすとき，これらの基底に関する F の表現行列 M を求めよ．また，F による $\boldsymbol{V}$ の像 $F(\boldsymbol{V})$ の次元を求めよ．なお，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルを表す．

$$F(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2\ ,\ F(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3\ ,\ F(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = F(\boldsymbol{o})\ ,\ F(\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3$$

(筑波大 2008)　　(m20081310)

0.19　3 次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし，f を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1,\ f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2,\ f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(4) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

0.20 実ベクトル空間 V と線形写像 $F : V \to V$ を考える．

(1) $B = \{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ．

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ．

(3) $\dim V = 2$ とし，$v_1,\ v_2$ を F の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする．

(a) $v_1,\ v_2$ は一次独立であることを示せ．

(b) n を自然数とし，F^n を F を n 回合成した写像とする．F^n の $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.21 $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \sin x \quad (a_0,\ a_1,\ a_2$ は実定数) の形の実関数全体が作る実線形空間 V に内積 $(g, h) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx \ \ (g, h \in V)$ を導入する．以下の問いに答えよ．

(1) ３つの関数 $1,\ \cos x,\ \sin x$ は互いに直交することを示し，これらを正規化して正規直交基底を作れ．

(2) 線形変換 $F : f(x) \mapsto f(x + c)$ について，(1) で得られた正規直交基底に関する表現行列を求めよ．ここで，c は実定数である．

(筑波大 2015)　　(m20151308)

0.22 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．V は $1, x, x^2, x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．

さて，線形変換 $T\ :\ V \to V$ を

$$(T_p)(x) = (1 - x^2)\frac{d^2 p}{dx^2}(x) - 2x\frac{dp}{dx}(x) + 12p(x)\ , \quad p \in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\operatorname{rank} T$ を求めよ．

(3) $\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.23 高々2次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) $\{1,1+x,x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ．

(2) 任意の $f,\ g\in V$ に対して $(f,g)=f(-1)g(-1)+f(0)g(0)+f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f,g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ．

① 任意の $f,g\in V$ に対して $(f,g)=(g,f)$

② 任意の $f,g,h\in V$ に対して $(f,g+h)=(f,g)+(f,h)$

③ 任意の $f,g\in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)$

④ 任意の $f\in V$ に対して $(f,f)\geq 0$ で，等号成立は $f(x)=0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f,g) のもとで $1,x,3x^2-2$ は直交することを示せ．さらに，$1,x,3x^2-2$ を正規化して V の正規直交基底を1組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1,L_2,L_3\}$ とする．線形空間 V から3次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1)=c_1,\ \varphi(1+x)=c_2,\ \varphi(x+x^2)=c_3$$

で定めるとき，$\{L_1,L_2,L_3\}$ と $\{c_1,c_2,c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1,c_2,c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.24 x を2次以下の実数係数の多項式 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ の写像 F は，$f(x)$ を $f(x)+f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) F が上への1対1の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(4) A を対角化して，行列 A^n を求めよ．(n は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

0.25 V は $\mathbb{R}$ 上の3次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f:V\to V$ について

$$f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=2\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$$
$$f(\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1+2\boldsymbol{v}_2+3\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像の次元を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201314)

0.26 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021) (m20211310)

0.27 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \left\{(a_n) \;\middle|\; a_n \in \mathbb{C} \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$W = \left\{(a_n) \in V \;\middle|\; a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$$

とする．また W の元 (x_n), (y_n), (z_n) をそれぞれ

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分空間になることを示せ．

(2) (x_n), (y_n), (z_n) が W の基底になることを示せ．

(3) $F\ :\ W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ．

(4) W の基底 (x_n), (y_n), (z_n) に関する F の表現行列 A を求めよ．

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(筑波大 2022) (m20221315)

0.28 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f, g を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) f が線形写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ．

(2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ．

(4) g は線形写像でないことを示せ．

(5) g は全単射であることを示せ．

(茨城大 2018)　　(m20181701)

0.29 空間 (R^3) において，次の各問に答えよ．

(1) ベクトルの組 $\vec{b_1}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{b_2}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{b_3}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$ について，$\{\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}\}$ は R^3 の基底を作ることを示せ．

(2) R^3 の基本ベクトルを $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ とし，線形変換 $f:\ R^3(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\to R^3(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ の表現行列が $\begin{bmatrix}2&-1&2\\1/2&1/2&5/2\\3/2&-3/2&7/2\end{bmatrix}$ で与えられるとき，f を $f:R^3(\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3})\to R^3(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ なる線形変換と考えたときの表現行列を求めよ．ただし、$R^3(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ は $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ を基底とするベクトル空間 R^3 を意味する．

(新潟大 2006)　　(m20062012)

0.30 $\boldsymbol{R}^2$ における基底 $\chi=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^2$ における標準基底から，基底 χ への取りかえ行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ における線形写像 f の標準基底に関する表現行列を，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ とする．このとき，f の基底 χ に関する表現行列を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142010)

0.31 $V=R^3$ を R 上の 3 次元ベクトル空間とする．

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&2&1\\-1&4&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

とし，行列 A が定める V 上の線形変換を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\in V)$ とする．次の問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ は V の基底であることを示せ．

(2) V の基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}f$ は V の部分空間であることを示せ．また，$\mathrm{Im}f$ の基底を一つ求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112205)

0.32 線形変換 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ は

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\qquad f(\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

をみたすとする．ただし $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底，即ち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ の標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像 $(\mathrm{Im}\, f)$ の次元が 2 とする．

(a) b を a と c で表せ．

(b) f の核 $(\mathrm{Ker}\, f)$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142204)

0.33 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f : R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152204)

0.34 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \left\{ \boldsymbol{v} \in R^3 \;\middle|\; f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \right\}$ で定義する．V の基底を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162236)

0.35 P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする．写像 $G : P \to P$ を，

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R})$ に対し $G(f(x)) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$

で定義する．

(1) G は線形写像であることを示せ．

(2) P の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ．

(富山大 2014)　　(m20142308)

0.36 $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ について以下の各問いに答えよ.

(1) 2次形式 F の表現行列 $\mathbf{A}$ を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有値 α, β およびそれに対応する単位固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求めよ.

(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交することを示せ.

(4) 一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ.

(5) $\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とした時, $\mathbf{P}$ は直交行列であることを示せ.

(6) $\mathbf{A}$ を対角化せよ.

(7) F の標準形を求めよ.

(大阪大 1995)　　(m19953506)

0.37 $\mathbf{R^3}$ の基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 行列 B を次のように定める.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

φ を基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ に関して B で表現される $\mathbf{R^3}$ 上の線形変換とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 基底 $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

(2) どの基底に関しても φ が B で表現されているときの a, b, c の値を求めよ.

(神戸大 2003)　　(m20033811)

0.38 (1) 次の行列 A の行列式 $|A|$ は, x に関する高々4次の多項式で表される. このとき, x^2 の係数を A の成分を用いて表せ. ただし, A の $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ 成分以外の成分は x に無関係な定数とする.

$$A = \begin{pmatrix} x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x^2 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(2) $\{a,\ b,\ c\}$ を3次元ベクトル空間 V の基底とし, f を次のような V の線形変換とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

$$\begin{cases} f(a) = -a - c \\ f(b) = a \\ f(c) = a + b + 2c \end{cases}$$

(a) $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ は V の基底であることを示せ.

(b) V の基底 $\{a+b+c,\ a+b,\ a\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093801)

0.39 線形写像 $T\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする. このとき, $\big[T(\boldsymbol{u}_1) \quad T(\boldsymbol{u}_2) \quad T(\boldsymbol{u}_3) \quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = \big[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_3\big]B$ を満たす $3\times\ 4$ 行列 B が一意に存在する. この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$, $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という. 以下の問いに答えよ.

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ, $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき,

$$\big[T(\boldsymbol{u}_1) \quad T(\boldsymbol{u}_2) \quad T(\boldsymbol{u}_3) \quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = A\big[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3 \quad \boldsymbol{u}_4\big]$$

を示し, $P = \big[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3 \quad \boldsymbol{u}_4\big]$　$Q = \big[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \boldsymbol{v}_3\big]$ とおいて, $B = Q^{-1}AP$ を証明せよ.

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき，

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.40 R^3 の基底 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) 行列 $[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ の逆行列を求めよ．

$T : R^3 \to R^3$ を，以下で定める線形変換とする：

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$
$$T(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$$
$$T(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3$$

(2) R^3 の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に対する T の表現行列を書け．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{x} \in R^3 : T(\boldsymbol{x}) = 0\}$ の基底の 1 つ B_1 を求め，$\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_1 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(4) T の像 $\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in R^3\}$ の基底の 1 つ B_2 を求め，$\mathrm{Im}(T)$ の次元を求めよ．ただし，B_2 を構成するベクトルは $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の線形結合として表せ．

(5) T の標準基底に対する表現行列を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143801)

0.41 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと．

(4) n を自然数とするとき，T の n 回の合成を T^n で表す．$T^n(\boldsymbol{a}_1)$, $T^n(\boldsymbol{a}_2)$, $T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173808)

0.42 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す．

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\ .$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい.

(3) 1 次変換 f について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in \boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい.

(鳥取大 2008) (m20083908)

0.43 V を 3 次元実線形空間，W をその 2 次元部分空間とする．f は V の線形変換で，$f(W) \subset W$ を満たすとする．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W の基底，$\boldsymbol{v}_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする．以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし，A の $(3, 3)$ 成分を a とする．このとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ.

(3) a は A の固有値であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば，$f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする．このとき，A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば，$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ．ただし，$\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である.

(広島大 2012) (m20124104)

0.44 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における，次の 4 点を考える.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く．線形変換 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1) = P_2\,,\ T(P_2) = P_3\,,\ T(P_3) = P_4\,,\ T(P_4) = P_1$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}, \overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ.

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ.

(4) 原点 O と P_1, P_2 を含む 2 次元部分線形空間を W とする．W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ.

(広島大 2013) (m20134107)

0.45 実 n 次正方行列 A について，$A^2 = -E$ が成り立っているとする．ただし，E は単位行列である．また，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める．$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを $\boldsymbol{o}$ と書く．以下の問いに答えよ.

(1) A は実固有値をもたないことを示せ.

(2) n は偶数であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}$ は 1 次独立であることを示せ.

(4) $n = 2$ とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

(5) $n=4,\ \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ で張られる部分線形空間を M とする．さらに $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{w}\notin M$ とする．このとき，$\{\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ A\boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示し，この基底に関する f の表現行列 C を求めよ．

(広島大 2013)　　(m20134109)

0.46 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと．

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{x},\ T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.47 $a\in\mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ．

(1) f の像および核の次元を求めよ．

(2) $a=0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ．

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ．

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.48 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{u}_1)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\,,\quad f(\boldsymbol{u}_1+2\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.49 線形写像 $f\,:\,\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ．

(2) $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$, $f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ．

(4) A は正則であることを示せ．

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ．

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.50 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．$M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \big(a \in M_2(\mathbb{R})\big)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f は一次写像であることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ．

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ．

(高知大 2015)　　(m20154504)

0.51 E を 3 次単位行列とする．3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{1}{2} & -1 & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$ および　$B = E + A$ について，次の問に答えよ．

(1) $B^2 \neq O$ であるが $B^3 = O$ であることを示せ．

(2) 3 次元数ベクトル $\boldsymbol{u}$ で，$B^2\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であるものを一つ選べ．

(3) (2) で選んだベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，$\boldsymbol{u}$, $B\boldsymbol{u}$, $B^2\boldsymbol{u}$ は 1 次独立であること，従って，ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底をなすことを示せ．

(4) 線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

の (3) の基底 $\{\boldsymbol{u},\, B\boldsymbol{u},\, B^2\boldsymbol{u}\}$ に関する表現行列を求めよ．

(愛媛大 2006)　　(m20064614)

0.52 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\mathrm{ker} f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.53 平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を f とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 線形変換 f の表現行列 A を求めなさい．

(2) $x^2 - y^2 = 1$ を線形変換 f により移した曲線の方程式を求めなさい．

(3) (2) で求めた曲線の概形を描きなさい．

(首都大 2018)　　(m20185903)