[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：表面積

0.1 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.2 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

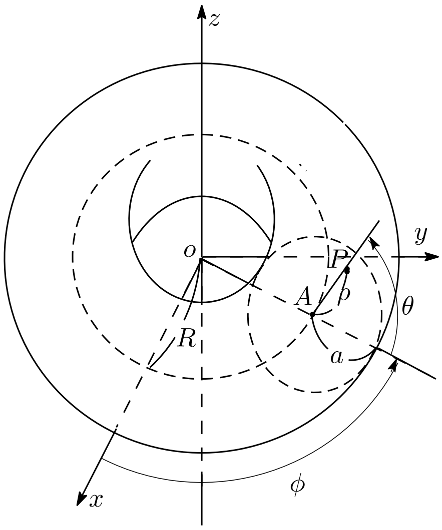
$$V = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ.

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする.

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ.



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.3　$x^2+(y-b)^2=a^2$　(ただし，$a>0,\ b>0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1)　体積を求めよ．　　　　(2)　表面積を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011305)

0.4　D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998)　　(m19981401)

0.5　縦，横，高さがそれぞれ $x,\ y,\ z$ である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L，表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら $x,\ y,\ z$ の値を変化させると，$x,\ y,\ z$ がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして，以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1)　表面積 S を $x,\ y,\ L$ のみを用いて表せ.

(2)　$\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ.

(3)　上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの $x,\ y,\ z$ の値，および S の最大値を，L を用いて表せ.

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.6　体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ.

(1)　直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x,y,z とし，直方体の体積を定数 $C>0$ とおく.
このとき，z を x,y,C を用いて表せ．ただし，$x>0,\ y>0,\ z>0$ とする.

(2)　直方体の表面積を $f(x,y)$ とする．$f(x,y)$ を x,y,C を用いて表せ.

(3)　$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\qquad f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

である.

(4)　$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ.

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> 定理
>
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x,y)$ について，
>
> $$g_x(a,b)=0, \quad g_y(a,b)=0$$
>
> のとき，
>
> $$D=\{g_{xy}(a,b)\}^2-g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)$$
>
> とおくと，$g(x,y)$ は $x=a$，$y=b$ において，$D<0$ かつ $g_{xx}(a,b)>0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x,y)$ は (4) で求めた x,y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.7 表面積一定の直方体で体積最大なものは立方体であることを示せ．

(岐阜大 2008)　　(m20082618)

0.8 二次方程式 $ax^2+x+b=0$ が実数解を持たないような実数 a，b，および 二変数関数 $f(x,y)=ax^2+xy+by^2+x+y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 二変数関数 $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) を，a，b を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x，y は a，b の値によって変化するため，$x=x(a,b)$，$y=y(a,b)$ とかける．特に $x>0$ かつ $y>0$ となるような a，b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$，y，y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a,b)$ とする．このとき $V(a,b)$ は最大値を持つが，$V(a,b)$ が最大となるときの a，b の値を求めよ．

(神戸大 2022)　　(m20223803)

0.9 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n: r^n=\cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ．

(2) 曲線 $C_2(0\leq\theta\leq\pi/4)$ の長さ l は，$l=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ．

(岡山大 2006)　　(m20064002)

0.10 $0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B \;\middle|\; x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $B(r)$ の体積を求めよ．

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.11 円柱面 $x^2+y^2=4$ の内部にある円柱面 $x^2+z^2=4$ の表面積 S を求めよ，

(愛媛大 2017)　　(m20174610)

0.12 高さ h，底面の半径 r，母線の長さ l の円錐の体積 V 及び表面積 S を求めよ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065409)