[選択項目]　年度：1991〜2023 年　文中：階数

0.1　(1)　放物線を表す次の式

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

を一般解とする，階数の最も低い微分方程式を求めなさい．

(2)　式①で表されるどの放物線とも直交する曲線の方程式を求めなさい．ここで，二つの曲線 C と C' が交点 (x, y) で直交するとは，(x, y) における C の接線と C' の接線とが直交することと定義する．

(3)　(2) で求めた曲線のうち，原点を通るものを求め，それがどんな曲線であるかを述べなさい．

(北海道大 2008)　(m20080103)

0.2　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　行列 A のランク（階数）rank (A) が 3 であることを示しなさい．

(2)　$\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい．

(3)　行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい．

(4)　$P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい．

(岩手大 2019)　(m20190302)

0.3　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，　$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　行列 A のランク（階数）rank(A) が 3 であることを示しなさい．

(2)　$AB = C$ であるとき，行列を用いて x, y, z の値をそれぞれ求めなさい．

(3)　行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2021)　(m20210302)

0.4　行列 $C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

（秋田大 2004）　(m20040405)

0.5　(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(2)　問題 (1) の行列 A に対して，$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき,P の各列ベクトルが A の固有ベクトルであることを確かめ，$AP = PX$ となる行列 X を求めよ．

(3)　問題 (1) の行列 A の階数 (rank) と行列式 (determinant) を求めよ．

（秋田大 2005）　(m20050403)

0.6 次の $\boxed{}$ に当てはまる整数を入れよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{}$ である.

(2) 連立一次方程式 $\begin{cases} x + y - 3z = -9 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 34 \end{cases}$ の解は $x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$, $z = \boxed{}$ である.

(秋田大 2007) (m20070402)

0.7 次のカッコ内に当てはまる整数を記入せよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数は $\boxed{(ア)}$ であり, A の固有値は, 小さい方から順に

$\boxed{(イ)}$, $\boxed{(ウ)}$, $\boxed{(エ)}$ である.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式の値は $\boxed{(オ)}$ である. B の逆行列について, B^{-1} の

$(2, 1)$ 成分は $\boxed{(カ)}$ である。

(秋田大 2010) (m20100401)

0.8 a は負, b は正の定数とする. 3 次実正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数が 2 であるための必要十分条件を求めよ.

(2) A が正則行列のとき, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(東北大 2015) (m20150507)

0.9 t を実数とする. 3×4 行列 A を次で定義する. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \ a, b, c, d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ. また, W の基底を一組求めよ.

(東北大 2019) (m20190505)

0.10 n を 2 以上の整数とする．n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は，

それらの内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ について $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \neq 0$ を満たすとする．n 次正方行列 A を $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ と定める．ここで，${}^t\boldsymbol{a}$, ${}^t\boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) A の階数と行列式をそれぞれ求めよ．また，A の固有値をすべて求めよ．

(2) k を正の整数とする．${}^t\boldsymbol{b}A^k\boldsymbol{a}$ を $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と k を用いてできるだけ簡潔に表せ．

(東北大 2022)　　(m20220508)

0.11 次の正方行列 A, B, C を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) A, B, C の階数を求めよ．

(2) A, B, C に逆行列が存在すれば求めよ．

(3) n 次正方行列 A について，次の 2 つの命題を考える：

(a) A^{-1} が存在する．　　(b) A の階数が n である．

この 2 つの命題の関係は次の 1), 2), 3) のうちのどれか？理由とともに答えよ．

1) 同値

2) 一方が他方の十分条件であるが，必要条件でない．

3) 1),2) のいずれでもない．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030610)

0.12 以下の各問いに答えよ．

(1) t を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ．また，この行列が対角化可能となるような t の値を求め，そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ．

(2) n を自然数，A を n 次実正方行列とする． 以下では i は自然数，$r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする．

(a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ．

(b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき，$r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ．

(c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ．

(お茶に水女子大 2012)　　(m20120602)

0.13 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．S の階数（ランク）$\mathrm{rank}S$ の定義を述べよ．

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ．

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T)=\mathrm{rank}S+\mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S,T の例をあげよ．

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする． このとき，

$$\mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}S\,,\quad \mathrm{rank}S\circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ．

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.14 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c を実数とし $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H=\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| ax+by+cx=0\right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}\neq 0\,,\quad 1\leq i\leq j\leq 3$$

となる自然数 i,j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A\ :\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $f_A(x)=Ax,\ x\in\mathbb{R}^3,$ で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

とする．線形写像 $f_B\ :\ \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ を $f_B(x)=Bx,\ x\in\mathbb{R}^4,$ で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.15 (1) $m \times n$ 型実行列 $A = (a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ.

(2) t を実数とする．次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す． t が実数全体を動くとき， $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ．また，そのときの $V(t)$ の基底を求めよ.

(4) t を実数とする．未知数 x, y, z に関する次の連立 1 次方程式が解をもつような t をすべて求めよ.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017) (m20170604)

0.16 以下の問いに答えよ．ただし，行列はすべて複素行列とする.

(1) X をベクトル空間, U, V, W を X の部分ベクトル空間とする．W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき, W は U に含まれるか, V に含まれるかのどちらかであることを示せ.

(2) A を 3 次正方行列で, $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする．ただし, O は零行列とする．A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える．ただし，a は複素数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a \neq 0$ のとき，A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022) (m20220604)

0.17 次の行列の階数を求めよ．ただし，x は複素数とする.

$$\begin{pmatrix} x & x+1 & x^2 \\ 1 & x^2+1 & 1 \\ x & x^2+x & x^2 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2001) (m20010807)

0.18 a を実数とするとき，次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(東京工業大 2002) (m20020805)

0.19 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ について

(1) 行列式を求めよ. (2) 階数を求めよ.

(東京工業大 2005) (m20050804)

0.20 定数 a, b, c に対し，行列 B を $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & b \\ a & 2 & -2 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$ と定める．B の階数を求めよ．

(東京工業大 2006) (m20060804)

0.21 次の行列の階数を求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & y & 1 & x \\ y & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & y \\ x & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$

(東京工業大 2007) (m20070803)

0.22 $C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & p & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 3 & 4 & q \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．ただし，p，q は定数である.

(1) C の行列式を求めよ.

(2) D および CD の階数を求めよ．必要に応じ p，q の値で場合わけして答えよ.

(東京工業大 2009) (m20090802)

0.23 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -8 & -14 & -11 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ.

(3) $T_A(x) = Ax$ で定まる写像 $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元を求めよ.

(4) $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ.
（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ に属する.
注 ： $\mathrm{Im}\, T_A = \{T_A(x) \mid x \in \boldsymbol{R}^3\}$, $\mathrm{Ker}\, T_A = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \mid T_A(x) = 0\}$.

(電気通信大 2008) (m20081001)

0.24 次の 3 次正方行列 A に対して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ -24 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ.

(電気通信大 2017)　　(m20171001)

0.25 行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$ とベクトル $\overrightarrow{y_0}=\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}$ が与えられている．この時，次の設問に答えよ．

(1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(A)$ の表す空間図形を求めよ．

(3) $\overrightarrow{y_0}$ が $\mathrm{Ker}(A^T)$ の元と直交することを示せ．

(4) $A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y_0}$ を満たす $\overrightarrow{x}$ を求めよ．

ここで，A^T は A の転置行列，$\mathrm{Im}(A)=\{A\overrightarrow{x}\ :\ \overrightarrow{x}\in R^3\}$，$\mathrm{Ker}(A)=\{\overrightarrow{x}\in R^3 : A\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}\}$ を表す．

(千葉大 1999)　　(m19991204)

0.26 次の行列 A, B について，以下の問に答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}$$

(1) 行列の基本変形を用いて，行列 A および行列 B の階数を求めなさい．

(2) 行列 A および行列 B が正則であるならば，逆行列を求めなさい．

(3) 行列 A を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&3\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\33\\10\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(4) 行列 B を係数行列とした連立方程式 $\begin{pmatrix}1&4&3\\0&2&1\\1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161202)

0.27 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x}=b,\quad A=\begin{pmatrix}2&-3&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&\alpha\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\beta\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$ を考える（α, β は定数）．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．　(2) この方程式に複数の解が存在するための条件を示せ．

(3) そのときの一般解を示せ．

(筑波大 2007)　　(m20071337)

0.28 線形写像 $T\ :\ R^4\to R^4$ の行列表示を $A=\begin{pmatrix}2&1&4&-1\\3&2&7&1\\1&1&3&2\\-1&1&1&8\end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ．

(2) 行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T\circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T\circ T)$ を求めよ．

(3) 連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け.

(筑波大 2008) (m20081308)

0.29 a を複素数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

(1) A の階数 $(= \mathrm{rank}A)$ を求めよ.

(2) $a = 1$ のとき A^{-1} を求めよ.

(筑波大 2009) (m20091311)

0.30 a を 0 と異なる実数とし，3 次実正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ で与える.

(1) A が与える数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の上の線形変換を

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で表す．この f の核 $\mathrm{Ker}\ f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ および 像 $\mathrm{Im}\ f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ の基底を 1 組ずつ求めよ.

(2) $ABA = O$ を満たすすべての 3 次実正方行列 B の中で，階数が最大であるものを 1 つ求めよ．ただし，O は零行列を表す.

(筑波大 2017) (m20171314)

0.31 0 と異なる実数 $a,\ b,\ c$ に対して，$\boldsymbol{u} = (a,\ b,\ c)$ とし, $A = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とおく．ただし，${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の転置とする.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) A が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.

(筑波大 2018) (m20181317)

0.32 2 つの実数 $a,\ \theta$ に対して, 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

で定める.

(1) A^2 の行列式を求めよ.

(2) A^2 の階数を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \right\}$$

で定める．このとき，V の次元を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191314)

0.33　$a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle\, \cdot\,,\, \cdot\, \rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める．また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(2) $\dim V = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\operatorname{Im} f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211301)

0.34　$n \times n$ 行列 A を

$$\begin{bmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{bmatrix}$$

とおく．但し，n は 2 以上の整数，a, b は実数で，$a \neq 0$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ．

(2) 行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して，b を a と n を用いて表せ．

(3) (2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211309)

0.35　A を $m \times n$ の実行列とする．$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(i)}$$

を考える．

(1) 方程式 (i) の解全体は，$\mathbf{R}^n$ の線形部分空間をなすことを示せ.

(2) (1) の線形部分空間の次元と，A の階数 (rank A) の関係式を記せ.（証明不要）

(3) B も $m \times n$ の実行列とし，一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \qquad \text{(ii)}$$

を考える．rank$A$+rank$B < n$ が成り立つとき，方程式 (i) と方程式 (ii) に $\mathbf{o}$ 以外の共有解が存在することを示せ.

(埼玉大 1999）　(m19991405)

0.36 次の 4 つの行列 A, B, C, D を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B, AB の行列式を求めよ.

(2) 行列 $C + D$ の階数を求めよ.

（埼玉大 2001）　(m20011408)

0.37 a, b, c, d は実数とする.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となるための a, b の条件を求めよ.

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 & c \\ d & 1 & d & 1 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための c, d の条件を求めよ.

（埼玉大 2004）　(m20041407)

0.38 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と階数を求めよ.

(2) 行列 A を対角化して得られる行列を書け（結果だけでよい）.

(3) 行列 A^3 のトレースを求めよ.

(埼玉大 2005)　(m20051405)

0.39 a, b を実数とし，正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 積 AB が単位行列になるような a, b の組をすべて求めよ.

(埼玉大 2007)　(m20071408)

0.40 (1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を求めよ.　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2)　行列 $\boldsymbol{B}$ の逆行列を求めよ．　$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3)　行列 $\boldsymbol{C}$ の行列式を求めよ．ただし，解答は因数分解した形で表せ．　$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{pmatrix}$

(埼玉大 2008)　(m20081403)

0.41　$A=\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ x & 1 & y \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ について，

(1)　A の階数が 1 となる数の組 (x,y,z) をすべて求めよ．

(2)　$x=1$, $y=2$ のとき，

(a) $\det A=0$ となる z を求めよ．

(b) $\det A\neq 0$ のとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(茨城大 1999）　(m19991707)

0.42　連立方程式 $\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ x+2y+3z & = & 0 \\ 2x+3y+az & = & a-3 \end{cases}$ について

(1)　係数行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

(2)　拡大係数行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & a & a-3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3)　この方程式が解をもつか否かを判定し，解をもつ場合にはその解を求めよ．

(茨城大 2003)　(m20031703)

0.43　3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ （a は実数）について，次の各問いに答えよ．

(1)　A の階数を求めよ．

(2)　A の行列式の値を求めよ．

(茨城大 2009)　(m20091702)

0.44　以下の各問に答えよ．

(1)　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 9 & -3 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(2)　連立一次方程式 $\begin{cases} 2x-3y\ +z= & 2 \\ -6x+9y-3z= & -6 \\ x-3y\ +z= & 2 \end{cases}$ を解け．

(茨城大 2013)　(m20131703)

0.45 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体のなす $\mathbb{R}^4$ の部分空間（すなわち解空間）W の次元を求めよ.

(3) W の基底を求めよ.

(信州大 2008) (m20081901)

0.46 以下の行列 A の階数を求めよ．また，連立 1 次方程式 $Ax = 0$ の解空間の次元を求め，解空間の基底を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(信州大 2012) (m20121901)

0.47 次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(3) A の固有値を求めよ.

(4) $A^2 - 3I$ の階数を答えよ．ただし，ここで I は単位行列とする.

(信州大 2021) (m20211904)

0.48 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -10 & 14 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えよ.

(1) 行の基本変形を行うことにより，A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の全体のなすベクトル空間の基底を求めよ.

(新潟大 2001) (m20012008)

0.49 実数 a に対して，$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 同次連立一次方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の実数解を求めよ.

(新潟大 2004)　　(m20042004)

0.50　a を実数とする．このとき，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1)　A の階数 (rank) を求めよ．

(2)　A が対角化可能であるかどうか理由をつけて答えよ．また，A が対角化可能であるとき，A を対角化せよ．

(3)　$a = \sqrt{2}$ のとき，$A^{-1} = bE_3 + cA + dA^2$ となる実数 b, c, d を求めよ．ただし，A^{-1} を A の逆行列，E_3 を 3 次単位行列とする．

(新潟大 2012)　　(m20122010)

0.51　a, b を実数とし，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 3a & 3 \end{pmatrix}$ を考える．

rank A は A の階数を表す．下の問いに答えなさい．

(1)　行列式 $|A|$ の値を a, b を用いて表しなさい．

(2)　行列 A が正則になる条件を a, b を用いて表しなさい．

(3)　rank $A = 1$ となるとき，a, b を求めなさい．

(長岡技科大 2019)　　(m20192101)

0.52　t を実数とし，　$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1)　A の行列式 $\det A$ の値を求めよ．

(2)　A の階数を求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052204)

0.53　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ．

(1)　A の階数（ランク）を求めよ．

(2)　ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の線形変換 f を $f(x) = Ax$ で定める．このとき，f の像の正規直交基底を一組求めよ．

(金沢大 2008)　　(m20082205)

0.54　a, b, c を正の実数として, 行列

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & a & c \\ a & -(a+b) & b \\ c & b & -(b+c) \end{pmatrix}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1)　A の階数 (rank) を求めよ．

(2) 連立 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよ.

(金沢大 2010)　　(m20102204)

0.55 (1) $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ の階数 (rank$M$) を求めよ.

(2) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 5 \end{cases}$$

(金沢大 2016)　　(m20162232)

0.56 k を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k \\ 1 & 2k & 2 \\ k & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ.

(1) A の階数を求めよ.

(2) A による $\boldsymbol{R}^3$ の変換

$$f : \boldsymbol{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える.

(a) f が $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であることを示せ.

(b) f の像 (Im f) の次元が 2 のとき，f の核 (Ker f) の次元と基底の 1 組を与えよ.

(金沢大 2017)　　(m20172201)

0.57 k を実数とする．行列　$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$　について，次の問いに答えよ.

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ.

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と，その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ.

$$\begin{cases} x + y + z = k - 7 \\ -y + z = 3k \\ 2x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底，f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.58　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & x+2 & -1 & -1 \\ x & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　$(x \in R)$ の階数を求めよ．

(富山大 2014)　　(m20142307)

0.59　次の 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ からなる行列 A がある．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　行列 A のランク（階数）はいくらか．

(2)　次のベクトルと行列の積を計算しなさい．

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3)　行列 A から得られる 2 つの固有ベクトルを求めなさい．

(4)　正規化された固有ベクトルを書きなさい．

(5)　正規化された 2 つの固有ベクトル（列ベクトル）からなる 2 行 2 列の正方行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい．

(6)　列ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする．${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb})$ を計算しなさい. ただし，${}^t(\boldsymbol{Pb})$ は $\boldsymbol{Pb}$ の転置を意味している．

(7)　${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb}) = \dfrac{3}{2}$ が表す図形を図 B に描きなさい. そして, その図形がどのような形状か詳しく説明しなさい．

(福井大 2004)　　(m20042419)

0.60　次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

ここで，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ に対応する行列式の値を求めよ．　(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ．

(3) 上の連立方程式の一般解を求めよ．

(福井大 2007)　　(m20072407)

0.61　次のような連立方程式がある．以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \qquad \text{ここで，} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ は下の 3 つの列ベクトルを使って，次のように表現できる．

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \qquad \text{ここで，} \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数（ランク）を求めよ.

(2) 連立方程式の解を求めよ.

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属か答えよ. もしそれらが一次従属なら, $\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の一次結合として表現せよ.

(福井大 2008)　　(m20082406)

0.62 (1) 次の行列の逆行列を求めよ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

(2) α を実数とする. このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(a) A の行列式を計算せよ.　　(b) A の階数を求めよ.

(3) 三つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ が線形従属（一次従属）となるような x の値を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082409)

0.63 次の整数 a を含む行列 A がある. 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & -4 & 2a \\ 1 & 2 & -2 & a-1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の階数（ランク）が 2 になるために a の値を求めよ.

(2) $a = 5$ のとき行列 A の階数（ランク）を求めよ.

(福井大 2013)　　(m20132411)

0.64 次の行列の階数 (rank) を求めるとともに, 正則性を調べ, 正則なら逆行列を求めなさい.

(1) $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 2a & 3b \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(福井大 2013)　　(m20132423)

0.65 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2016)　　(m20162415)

0.66 (1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次独立, 1 次従属を判定せよ. ただし, x は実数とする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j=n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j=n \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.67　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい．

(1) ランク（階数）を求めなさい．

(2) 固有値をすべて求めなさい．また，そのうち 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい．

(静岡大 2013)　　(m20132510)

0.68　(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(2) x, y, z を実数とするとき，$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ ならば $x = y = z$ が成り立つことを示しなさい．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．ただし，x, y, z は実数とする．

(静岡大 2016)　　(m20162503)

0.69　次の 3 つの行列について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $\det A$, $\det B$, $\det C$ を求めよ．

(2) 行列 A のすべての固有値，および，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 C の階数 (rank C) を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062613)

0.70 (1) 行列 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{bmatrix} a-5 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & a-1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & a & 1 \\ -3 & 1 & 2 & a-1 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

(3) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(岐阜大 2009) (m20092610)

0.71 (1) 次の行列 A の階数 (rank$A$) を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の連立方程式が解をもつような定数 a の値を求め, そのときの一般解を示せ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2010) (m20102602)

0.72 α を実数とする. 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ.

(1) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

(2) 行列 A が固有値 1 をもつような α の値を求めよ.

(3) A が正則にならないような α の値を求めよ. また, そのときの A の階数（ランク）を求めよ.

(岐阜大 2015) (m20152602)

0.73 3 次元空間内の原点を O, 点 A の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す.

点 A を通り, 方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 l が与えられている.

(1) 直線 l を表す方程式を書け.

(2) 空間内に位置ベクトル $p = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 P が任意に与えられたとき，点 P に最も近い直線 l 上の点を Q とする．点 Q の位置ベクトル $q = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q = Lp + b$ の形で表せ．

ただし，L, b は直線 l だけで定まり，p, q には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す．

(3) 行列 L の階数を求めよ．

(4) 行列 L のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(名古屋大 2002)　　(m20022802)

0.74　次の行列 A について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の階数 (rank) を求めよ．

(2) $\overrightarrow{x}$ を列ベクトルとするとき，$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ となる $\overrightarrow{x}$ $(\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0})$ を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012907)

0.75　以下のように行列表現された連立一次方程式がある． ただし, a は任意の実数である.

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1-a & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) a のすべての値について, 行列 $\boldsymbol{A}$ および行列 $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$（$\boldsymbol{A}$ の右側に $\boldsymbol{b}$ を並べたもの）のランク（階数）を求めなさい.

(2) (1) の結果を用いて, a のすべての値について解の存在性を答えなさい. また, 解が存在する場合は解を求めなさい.

(三重大 2004)　　(m20043112)

0.76　次の行列のランク（階数）を求めよ. また, 正則な場合は逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(三重大 2005)　　(m20053117)

0.77　(1) 定数 k_1, k_2 を含む次の行列 A の階数 (rank) を，k_1, k_2 の値で場合分けして求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を考え，その $\boldsymbol{v}$ が表す点の集合が x,y,z を軸とする直交座標系でどのような形状となるかを，行列 A の階数 (rank) ごとに説明しなさい．

(三重大 2007)　　(m20073106)

0.78 行列 A が次のように定義されているとき，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) i 列目の x_i と j 列目の x_j が等しい場合，階数は n より 1 以上小さいことを示せ．

(2) A の行列式は (x_i-x_j) で割りきれることを示せ．$(i\neq j)$

(3) 列の値がすべて同じ値である列数が m であるとすると，階数は $(n-m)$ であることを示せ．

(京都大 1999)　　(m19993303)

0.79 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 4 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 15 & 6 \\ 4 & 10 & 20 & 4 \end{pmatrix}$ の階数（rank）を求めよ．

(京都工芸繊維大 1999)　　(m19993405)

0.80 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{pmatrix}$ を考える．ただし，a は定数である．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 次の連立 1 次方程式が解をもつように a の値を定め，その解を求めよ．

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + az = 3 \\ x + 2y + (a+2)z = a \end{cases}$$

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013409)

0.81 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + 2z - 2w = 3 \\ x - y + z + 2w = k - 3 \end{cases}$ が解をもつように定数 k の値を定め，これを解け．また，係数行列 A を示し，その階数 rank A を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006)　　(m20063410)

0.82 (1) a を実数とする．行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ a & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ

(2) 整数を成分とする 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ がある．

(a) A の固有多項式の 1 次の項の係数を求めよ．

(b) A が複素数の範囲でただ一つの固有値 α をもつとき，$3\alpha^2$ は整数であることを示せ．

(京都工芸繊維大 2014)　　(m20143401)

0.83　a を実数とする．3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．E は 3 次の単位行列を表す.

(1) 行列 $aE + A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 行列 $aE + A$ の階数を求めよ.

(3) 3 次正則行列 P で

$$P^{-1}(aE + A)P = aE + A^2$$

を満たすものは存在しないことを示せ.

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203401)

0.84　$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & -6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 & 4 \\ 5 & -6 & -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ であるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(2) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.

(大阪府立大 2003)　　(m20033602)

0.85　次の連立方程式について，以下の問に答えよ。　$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 4z = b \\ 3x + 4y + 5z = c \end{cases}$

(1) 係数行列の階数 (rank) を求めよ.

(2) この連立一次方程式が解をもつための必要十分条件を求めよ。

(3) 解があるときそれを求めよ.

(大阪府立大 2006)　　(m20063601)

0.86　4 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ により定める.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 行列 A の固有値をすべて求めよ．さらに，そのうちで絶対値が最小の固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163603)

0.87　4 次の正方行列 A と 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

により定める.

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たす 4 次の実数ベクトル $\boldsymbol{v}$ のうち，$||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}||$ を最小にする $\boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{0}$ は 4 次の零ベクトルとし，$||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}||$ はベクトル $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}$ の大きさ（ノルム）を表すとする．

(大阪府立大 2018)　　(m20183601)

0.88 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (= rank) r を求めよ．

(2) B の 4 個の列ベクトルから r 個の 1 次独立ベクトルの取り出し方は何通りあるか求めよ．ただし，r は (1) で求めた r である．

(関西大 2003)　　(m20033703)

0.89 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ のとき，

(1) A の階数を求めよ．

(2) 連立一次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$ が解を持つように a を定めよ．

(3) 定めた a に対して，上の連立一次方程式を解け．

(神戸大 1998)　　(m19983808)

0.90 a を実数とする．自然数 n に対して，対角成分が全て a であり，それ以外の成分が全て 1 である n 次正方行列を A_n とする．以下の各問いに答えよ

$$A_n = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(1) $|A_n| = (a+n-1)(a-1)^{n-1}$ であることを示せ．ただし $0^0 = 1$ とする．

(2) $a = 1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(3) $a = -n+1$ とする．A_n の階数を求めよ．また，同次連立方程式 $A_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元と基底を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173807)

0.91 3 行 4 列の行列 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073915)

0.92 (1) 次の行列 A に対して，その階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $m \geqq 2,\ n \geqq 1$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行を取り除いた $(m-1) \times n$ 行列を A' と書くことにする．$\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A')$ は 0 または 1 であることを示せ．

(3) $m \geqq 2,\ n \geqq 2$ のとき，$m \times n$ 行列 A に対して，A の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(m-1) \times (n-1)$ 行列を A'' と書くことにする．A をさまざまな行列を動かしたときの $\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A'')$ の最小値と最大値を求めよ．

(岡山大 2007)　　(m20074001)

0.93 1 から 9 までの数字を並べて 3 次正方行列 A を作る. ただし, すべての数字を一度ずつ使うこととする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式が 0 であるようなものと, 0 でないようなものの例を一つずつ作れ.

(2) 階数が 1 であるような行列 A は作れないことを証明せよ.

(岡山大 2010)　　(m20104003)

0.94 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする．ここで, ${}^tA$ は A の転置行列を表す.

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ.

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は，V 上の線形変換であることを示せ．また，f の階数を求めよ.

(岡山大 2012)　　(m20124004)

0.95 行列 X の階数を $\mathrm{rank}(X)$ と表すことにする．A, B を n 次正方行列としたとき以下の問いに答えよ．

(1) 不等式

$$\mathrm{rank}(AB) \leqq \mathrm{rank}(B)$$

を示せ．また，A が正則ならば等号が成立することを示せ.

(2) $AB = O$（ゼロ行列）のとき，不等式

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leqq n$$

を示せ.

(3) $n = 3$ とし，$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とおく．B の階数を求めよ．さらに

$$\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A) - 2$$

を満たす A は存在しないことを示せ.

(岡山大 2013)　　(m20134004)

0.96 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．ただし，A は次で与えられる行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ．

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ．

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.97 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A \, : \, \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.98 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ．

(3) $a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島大 2006)　　(m20064104)

0.99 実数 a に対して行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め，その時の A の階数を計算せよ．

(3) 前問における a に対して，$A\boldsymbol{v} \neq 0$ かつ $A^2\boldsymbol{v} = 0$ となるようなベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084103)

0.100 実行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．S の概形を図示せよ．

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

0.101 A は実 $n\times\ k$ 行列でその階数は $\operatorname{rank} A = k < n$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ．

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ．

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ．

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) ={}^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

を定める．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big)({}^tAA)\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.102 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ．

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174103)

0.103 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式，階数を表す．次の問いに答えよ．

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について，$\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ．

(3) A を n 次正方行列，I を n 次単位行列とし，$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく．λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき，$\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084503)

0.104 3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるときの a の値を求めよ．

(高知大 2009)　　(m20094505)

0.105 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) A の階数 $(\mathrm{rank}\ A)$ を求めよ．

(2) A が正則行列であるための定数 a に対する条件を求めよ．

(3) 方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ の他にも解をもつための定数 a に対する条件を求め，その条件のもとで一般解を求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124503)

0.106 A を $A^2 = O$（零行列）を満たす複素数を成分とする 4 次の正方行列とする．さらに，$A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ が一次独立となる 4 次元複素ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ があるとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $A\boldsymbol{p}$, $A\boldsymbol{q}$ は一次独立であることを示せ．

(2) 行列 A の固有値と階数を求めよ．

(3) $P = (A\boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{p} \quad A\boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{q})$ とおくと P は正則であることを示し，さらに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることを示せ．

(高知大 2017)　　(m20174505)

0.107 3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ．

(3) A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ．

(4) $\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ．

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.108 次の行列を，行の基本変形を使って上 3 角行列に変形せよ．また，これらの行列の階数（ランク）と行列式を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ただし，上 3 角行列とは $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ という形の行列である．

(愛媛大 2008)　　(m20084605)

0.109 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

について次の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) A の各固有値に対する固有空間をそれぞれ求めよ．

(4) 適当な正則行列 P によって A を対角化せよ．

(愛媛大 2011)　　(m20114601)

0.110 a を実数とし，行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -1 & a \\ a & a & -1 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(2) $a = 1$ のとき，実数 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式 $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ の解を求めよ．

(3) 実数 x, y, z を未知数とする連立 1 次方程式 $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}$ が唯一つでない解を持つとき，a の値を求めよ．また，このとき，この連立 1 次方程式の解を求めよ．

(愛媛大 2017)　　(m20174613)

0.111 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数の定義について，以下の下線部に適切な単語を記入せよ．

(a) A の 0 でない小行列式の ＿＿＿＿＿．

(b) A の ＿＿＿＿＿ な列ベクトルのの最大個数．

(c) A の ＿＿＿＿＿ な行ベクトルのの最大個数．

(d) A で定まる線形変換の値域の ＿＿＿＿＿．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) 次の連立方程式に解があれば，そのすべてを求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003)　　(m20034706)

0.112 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値を求めよ．

(2) A が逆行列を持たないときの c の値は

(a) $c = \boxed{}$ のときと

(b) $c = \boxed{}$ のときである．

(3) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(4) (2) の 2 つの場合　(a),(b) それぞれについて，行列 A の固有値をすべてを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064701)

0.113 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める．

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし，$(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す．また，$A_1 = p$ とする．

(1) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ．

(2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ．

(3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく．数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ のみたす漸化式を導き，a_n，$n = 1, 2, \cdots$，を求めよ．

(九州大 2007)　　(m20074709)

0.114　$4\times\ 4$ 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　A の行列式が 0 となる a の値を求めよ．

(2)　行列 A の階数を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094707)

0.115　次の行列 A, B について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & c \end{pmatrix}$$

(1)　A の階数が 1 となる条件，2 となる条件をそれぞれ求めよ．

(2)　AB が正則であるための条件を求めよ．

(3)　BA の逆行列が存在するならその条件を求めよ．存在しないならその理由を述べよ．

(九州大 2014)　　(m20144701)

0.116　a を実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　A の行列式を求めよ．

(2)　A の行列式が 0（ゼロ）となるような a の値をすべて求めよ．

(3)　前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく．(前問 (2) の解がただ一つの場合は，それを a_0 とおく．)　$a = a_0$ の場合に，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154706)

0.117　x は実数とし，n は 2 以上の自然数とする．A は n 次の正方行列で，その対角成分はすべて x，それ以外の成分はすべて 1 であるとする．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　すべての成分が 1 である n 次の列ベクトル（縦ベクトル）を $\boldsymbol{v}$ で表す．このとき，n と x に依存して決まるある実数 c_n に対して $A\boldsymbol{v} = c_n\boldsymbol{v}$ が成り立つことを示せ，また，c_n を求めよ．

(2)　$c_n = 0$ となる x の値を x_n とおく．x_n を求めよ．

(3)　$n = 3, x = x_3$ の場合に，A の固有値をすべて求めよ．

(4)　$n = 4, x = x_4$ の場合に，A の階数 (rank) 求めよ．

(5) n は 2 以上の任意の自然数とし，$x = x_n$ とする．A の n 個の列ベクトル（縦ベクトル）を左から順に $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ とする．このとき，$A\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ を用いて表せ．また，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{a}_n$ は一次独立であるか，それとも一次従属であるか，答えよ．その理由も示すこと．

(九州大 2017)　　(m20174702)

0.118 a を $a \neq 0$ なる実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194710)

0.119 次の行列 B について，以下の問いに答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|B|$ を計算せよ．

(2) 2 つのベクトル $(1, -2, 4), (-2, 4, -3)$ が 1 次独立であることを示せ．

(3) B の階数 $\mathrm{rank}B$ を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034927)

0.120 次に示す 3 つのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ について各問に答えよ．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ のベクトルの一次結合により零ベクトルをつくり, これらのベクトルが一次従属であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ の各ベクトルを他の 2 つのベクトルの一次結合で表しなさい. また, この 3 つのベクトル系の階数が 2 であることを説明しなさい.

（佐賀大 2004）　　(m20044926)

0.121 次の対称行列の階数および行列式を求め, この行列が正則であるかどうか判断せよ. 正則な場合は, 逆行列を求めよ. さらに, 固有値と対応する固有ベクトルを求めて, この行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2004)　　(m20044932)

0.122 次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{0}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 2010)　　(m20104911)

0.123 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする.

(1) 行列 A の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解を求めよ.

(佐賀大 2012)　　(m20124904)

0.124 次の行列 M と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 15 \\ 2 & -4 & 11 & 8 \\ 1 & 7 & -8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の階数を求めよ.

(2) 連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつように a の値を定めよ.

(3) (2) の条件のもとで，連立方程式 $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(佐賀大 2015)　　(m20154917)

0.125 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ a & 5 & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし $a > 0$ とする.

(1) 行列 A の行列式が 0 となる a の値を求めよ.

(2) (1) で求めた a を用いて行列 A のランク（階数）を求めよ.

(3) $a = 2$ のとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ の解をはき出し法（ガウスの消去法）を用いて求めよ.

(佐賀大 2016)　　(m20164923)

0.126 次の設問に答えなさい.

(1) 列ベクトル $A = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ と行ベクトル $B = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix}$ を用いて，次の行列積を計算しなさい.

① AB　　② BA

(2) 次の行列の階数を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めなさい．

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

ただし，ω は $x^3 = 1$ の 1 つの虚数解とする．

(鹿児島大 2014)　　(m20145403)

0.127 以下の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ，$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ としたとき，行列の積 AB を求めなさい．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 8 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めなさい．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -x \\ 1 & -6 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ が正となる実数 x の条件を求めなさい．

(室蘭工業大 2011)　　(m20115511)

0.128 行列 $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．ただし，a, b は実数とする．

(岡山県立大 2006)　　(m20065602)

0.129 以下の行列 U の階数（ランク）を求めよ．

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -7 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2018)　　(m20185704)

0.130 以下に示す行列 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ について各設問に答えよ．

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -8 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{U}$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 直交行列を求め，行列 $\boldsymbol{V}$ を対角化せよ．

(香川大 2020)　　(m20205705)

0.131 (1) 次の行列の階数（ランク）を求めよ．

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 次の行列の固有値を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

(香川大 2021)　　(m20215707)

0.132　行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 1 となる (a, b, c) の組を, すべて求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055803)

0.133　a, b, c を 0 でない実数とする．このとき，行列 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるための必要十分条件を求めよ.

(島根大 2006)　　(m20065804)

0.134　$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の (a)〜(e) を求めよ.

(a) A^T ,　(b) AA ,　(c) $|A|$,　(d) A の階数 ,　(e) A^{-1}

ただし，A^T は A の転置行列を表す．$|A|$ は A の行列式である.

(島根大 2006)　　(m20065811)

0.135　任意定数 a を含む行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & a \end{bmatrix}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 逆行列 A^{-1} を求めよ. さらに，$A^{-1}A$ が単位行列となることを示せ.

(3) 行列 A の階数 rank$A$ を求めよ.

(4) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において，解 $\boldsymbol{x}$ がただ一つ求められる条件を示せ．さらに，その条件を満たす場合，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解いて，$\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(5) 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つ条件を示せ．さらに，その条件を満たす a の値を用いて $\boldsymbol{x}$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{x}$ の大きさは 1，すなわち $|\boldsymbol{x}| = 1$ とせよ.

(島根大 2007)　　(m20075809)

0.136　行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して，2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 A の逆行列を求めよ.

(3) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 行列 A の階数を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075812)

0.137 (1) 次の行列式の値を求めよ．

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

(2) a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & 3 & a \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) A の階数が 2 となるような a の値を求めよ．

(b) $V = \{v \in \boldsymbol{R}^4 \mid Av = 0\}$,　$W = \{Av \mid v \in \boldsymbol{R}^4\}$ とおく．このとき，V は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間，W は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(c) (a) のとき，V, W の基底を一組ずつ求めよ．

(d) (a) のとき，$\{v_1,\ v_2\}$ を V の任意の基底とする．また，W の任意の基底 $\{w_1,\ w_2\}$ に対して，$v_3,\ v_4\ (\in \boldsymbol{R}^4)$ を

$$w_1 = Av_3\ ,\quad w_2 = Av_4$$

となるような任意のベクトルとする．このとき，$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ は $\boldsymbol{R}^4$ の基底であることを示せ．

(島根大 2008)　　(m20085801)

0.138 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の階数を求めよ．

(3) 行列 A の逆行列を求めよ．

(4) 行列 A の固有値 λ_i とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085806)

0.139 3 次正方行列 X を以下のように定義する．

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す．

(1) $x_{11} = 1$ とする．積 $X\,{}^tX$ を計算せよ．

(2) $x_{11} = 1$ とする．$(X\,{}^tX)^{-1}$ の行列式の値を求めよ．

(3) $x_{11} = 1$ とする．X の階数を求めよ．

(4) $x_{11} = 1$ とする．X^2 の行列式の値を求めよ．

(5) $x_{11} = -7$ とする．以下の命題が真か偽かを示せ．
命題「任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，方程式 $X\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{y}$ が存在する.」

ただし，以下のように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{y}$ は 3 次列ベクトルとする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125802)

0.140　(1)　次の行列 A と行列 A' の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4a+13 \\ 3 & 0 & 4 & a \end{pmatrix}$$

(2)　連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4a + 13 \\ 3x \qquad + 4z = a \end{cases}$$

の解が存在するための必要十分条件を (1) で求めた階数を用いて述べよ．さらに，解が存在するような a の値をすべて求めよ．

(3)　(2) の連立 1 次方程式が解をもつとき，その一般解を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155803)

0.141　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　A の行列式の値を求めよ．

(2)　A の階数を求めよ．

(3)　A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4)　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

(a)　f は線形写像であることを示せ．

(b)　$f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.142　$m \times n$ 行列のランク（階数）はその行列の線形独立（一次独立）な列ベクトルの最大個数等しい．このとき

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のランクを求めよ．解答には，その理由も述べよ．

(首都大 2004)　　(m20045902)

0.143　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．　　(滋賀県立大 2008)　　(m20086003)

0.144 (1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 行列 B を $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) $\det B = 0$ となるように α を求めよ．

(b) この α に対する B の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056101)

0.145 下の問いに答えよ．なお，計算過程も記入せよ．

(1) 次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

(2) 次の連立 1 次方程式が解を持つときの a の値を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 2a \\ 2x + 5y + 9z = 6 \end{cases} \qquad (*)$$

(3) (2) で求めた a の値に対する連立 1 次方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166101)

0.146 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ．

(3) $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\}$ が平面となることを示せ．

(はこだて未来大 2009)　　(m20096301)

0.147 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は，${}^t(1,0,0)$ を ${}^t(1,0,-1)$ へ，${}^t(0,1,1)$ を ${}^t(0,1,0)$ へ，${}^t(0,1,2)$ を ${}^t(2,1,-2)$ へ，それぞれ移すものとする．ここで ${}^t\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が 1 次従属であることを示せ．

(2) $f(x) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in R^3)$ となるような行列 A を求めよ．

(3) (2) で求めた行列 A について，行列 A の階数を求めよ．

(はこだて未来大 2011)　　(m20116303)

0.148 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の階数を求めよ．

(3) $\left\{ A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in R^3 \right\}$ の基底を求めよ．ただし，R^3 は実 3 次元数ベクトル空間を表す．

(はこだて未来大 2013)　　(m20136303)

0.149 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f : R^3 \to R^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) A の階数 rank$A$ を求めよ．

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) A の像 Im(f) の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146301)

0.150 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : R^4 \to R^3 , \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) f の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) f の像 Im(f) の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2017)　　(m20176301)

0.151 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) 行列 A とその転置 ${}^t\!A$ の積 $A\,{}^t\!A$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1}A\,{}^t\!AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．

(はこだて未来大 2021)　　(m20216301)

0.152 次の行列 A, B について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい．

(2) 行列式 $|A|, |B|$ をそれぞれ答えなさい．

(岩手県立大 2013)　　(m20137003)

0.153 次の行列 A, B, C, D について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) AB を答えなさい．

(2) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい．

(3) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい．

(4) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい．

(5) 行列 D の固有値と固有ベクトルを答えなさい．

(岩手県立大 2016)　　(m20167001)