[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：回転

0.1　ベクトル場 $\mathbf{a} = (x\cos z, y\log x, -z^2)$ に対して

(1) 発散 div **a** を求めよ.

(2) 回転 rot **a** を求めよ.

(北海道大 1997)　(m19970103)

0.2　以下の問いに答えよ．ただし，j は虚数単位とする.

(1) 次の複素数を極形式 $re^{j\theta}$ （r, θ は実数）で表せ.
(a) $1+j$　(b) j

(2) 次の複素数を $x+jy$ （x, y は実数）の形で表せ．また，複素平面上に図示せよ.
(a) j の平方根　(b) $\frac{1+j}{1-j}$ の 3 乗根

(3) 複素数 $z_R = \cos\theta + j\sin\theta$ を 0 でない複素数 z_1 に乗ずると，答えは z_1 が複素平面上で θ だけ回転したものになることを示せ.

(北海道大 2004)　(m20040104)

0.3　次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ について, 次の問に答えよ.
(a) 楕円の内部の面積を求めよ.
(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.
(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004）　(m20040302)

0.4　曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2 + z^2 = b^2$ $(a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい.

(1) 次の文中の $\boxed{（ア）}$ から $\boxed{（エ）}$ に正しい式を入れなさい.

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{（ア）}$ 及び $\boxed{（イ）}$ で囲まれる領域 D_1 である.

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される.

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{（ウ）}$ 及び $\boxed{（エ）}$ で与えられる.

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい.

(3) 次の文中の $\boxed{（オ）}$ から $\boxed{（キ）}$ に正しい式を入れなさい.

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である.

この立体の体積 V は式 ① で与えられる.

$$V = \pi\int_{-b}^{b} \boxed{（オ）}\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V = \boxed{\quad（カ）\quad}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z = \boxed{\quad（キ）\quad}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V = 2\iint_{D_1} \boxed{\quad（キ）\quad}\, dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.5 2 つの曲線 $y = \cos 2x\ (0 \leqq\ x \leqq \pi)$,　$y = \sin x\ (0 \leqq\ x \leqq \pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい．

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160304)

0.6 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1' y_2' - x_2' y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1' = 0,\ x_2' > 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.7 直交座標系 (x, y, z) において，点 O, A, B, C, D の座標がそれぞれ $O(0, 0, 0)$, $A(2, 2, -4)$, $B(3, 5, -2)$, $C(5, 1, -3)$, $D(0, 0, -6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q : $\sqrt{2}x + y + 3z = 2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 $\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.8　x を実数とし，　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.9　点 $P(0, -1)$ を通る直線と曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ が 2 点 Q, R で交わるとき，以下の問いに答えよ．ただし，点 Q の x 座標を a として，$0 < a < 2$ とする．

(1) 点 Q, R それぞれにおける曲線 C の接線 ℓ_Q , ℓ_R の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 ℓ_Q , ℓ_R の交点の軌跡を求めよ．

(3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき，y 軸，曲線 C，接線 ℓ_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し，この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ．

(東北大 2012)　　(m20120503)

0.10　xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.11　次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30^\circ$回転させたベクトルを　$\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.12 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3z)\,\mathbf{i} + (x^2yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，**i, j, k** は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.13 図の様に，x,y 平面上の座標が (x,y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x',y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．

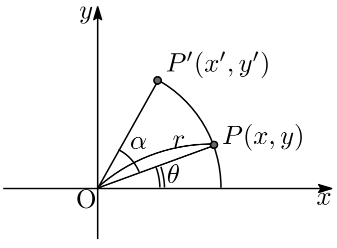
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999)　　(m19990610)

0.14 半径 a の円が x 軸に接しながら滑らずに回転してゆくとき，円周上の一点の軌跡をサイクロイドと呼ぶ．

(1) 点の初期位置を原点として，この軌跡の方程式を回転の中心角に関するパラメータ表示で与えよ．ただし，円は常に x 軸の上側にあるものとする．

(2) この点が再び x 軸に戻るまでの一周期分の曲線の弧長を計算せよ.

（お茶の水女子大 2001）　(m20010601)

0.15 二次元平面上で x- y座標軸を反時計回りに θ だけ回転させた座標軸を x'- y' とする. ある点 P の位置 (x, y) はこの新しい座標軸では (x', y') と表されるが, 両者の間には次のような関係がある：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{①}$$

以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A とその転置行列 A^T の積 AA^T を求めよ.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{②}$$

とするとき, BB^T は前問の AA^T に等しいことを示せ. また, A が 2 次元平面上での座標軸の回転を表していたのに対し, B は何を表すかを説明せよ.

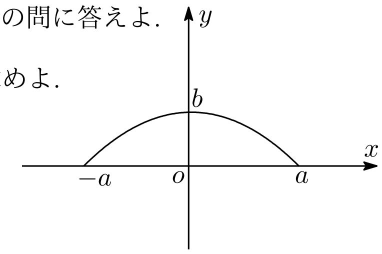
(3) A, B のような行列は直交行列と呼ばれる. 前問で見たような行列 A と B の違いは直交行列のどのような性質によるのか、答えよ.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100606)

0.16 実 3 次元空間の任意の点を (x, y, z) と表すとき, ベクトル $\vec{V} = (yz, zx, xy)$ の発散 $(\mathrm{div}\vec{V})$ と回転 $(\mathrm{rot}\vec{V})$, 及び $|\vec{V}|$ の勾配 $(\mathrm{grad}|\vec{V}|)$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2022)　(m20220607)

0.17 図の曲線は点 $(0, b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.



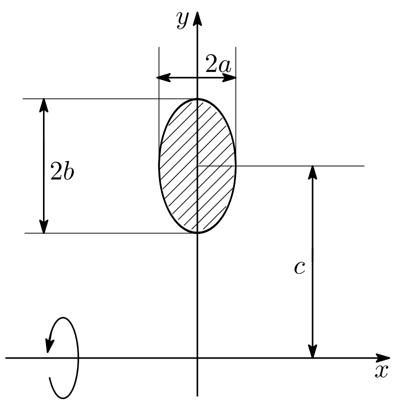
(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.

(東京大 2002)　(m20020702)

0.18 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c $(c > a,\ c > b)$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　(m20040701)

0.19 空間において, xz 平面上の単位ベクトル $(u, 0, w)$ を考える.

(1) y 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0, 0, 1)$ をベクトル $(u, 0, w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u, 0, w)$ を軸とする角度 θ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

0.20 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において, xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{4a^2} = 1$ $(a > 0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ.

(2) (1) の表面上の点 $(x.y, z) = (x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ. ただし, $z_0 > 0$ とする.

(3) (1) の表面上において, 正の z 成分を持つ 2 点 P_1, P_2 は, それぞれ $\left(\dfrac{a}{2}, -a\right)$, $\left(-\dfrac{a}{3}, \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x, y) 成分を持つとする. 点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み, かつ原点を通る平面の方程式を求めよ.

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.21 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

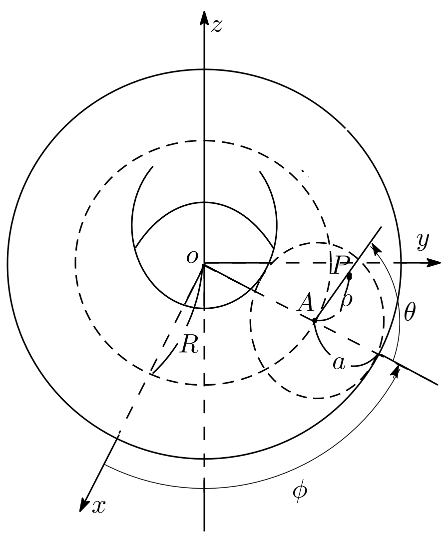
$$V = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ. ただし, $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル, dS はベクトル面積素である.

(2) 下図のように, あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり, z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる. このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると, その断面は半径 a の円となり, この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$. トーラス表面および内部の任意の点を P とする. 点 P と z 軸とを含んだ平面と, トーラス中心軸との交点を A とする. 線分 AP の長さを ρ, x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする. 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ.

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を, 前問 (2) の結果を用いて, ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ. この結果を用い, 変数の範囲に注意して, このトーラスの表面積を求めよ. なお円周率を π とする.

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ.



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.22 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m \geqq 3)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M = 6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m = 6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M = 6$, $n = 2$ の例である．この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n = m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

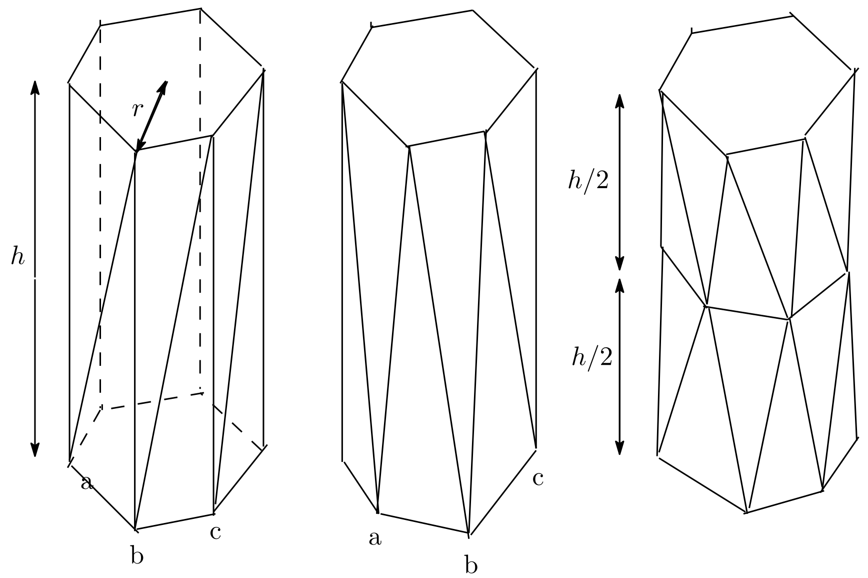
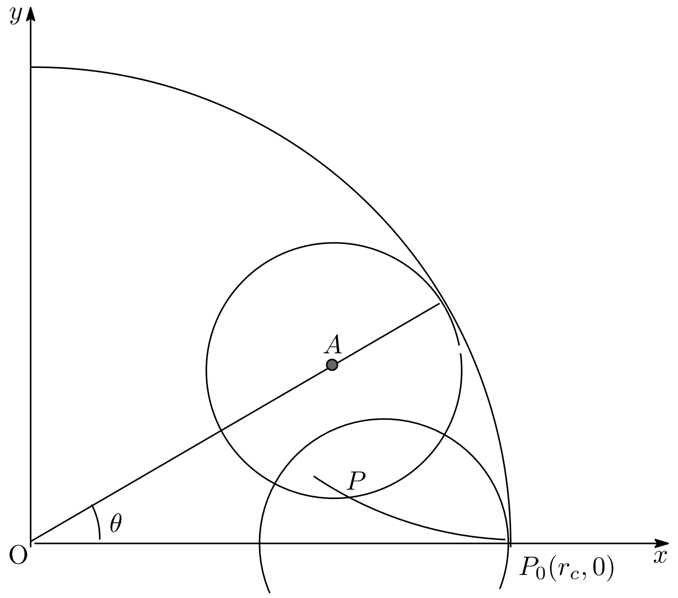


図 1　図 2　図 3

(東京大 2013)　(m20130703)

0.23 図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ.

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする.

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ.

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ.

(3) $r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ.

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.24 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する.

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r, z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい.

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

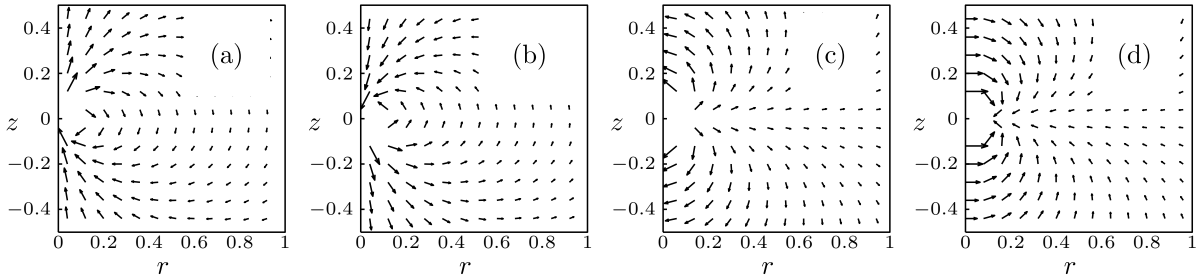
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ.

(2) $r \le r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ.

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ.

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ.



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ.

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.25 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x = e^z \cos z \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq z \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x = 0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ.

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$ と円柱 $x^2 - 2x + y^2 \leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ.

$$\iiint_B |z| \, dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.26 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $x + z = 0$ に関する対称移動とし，$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を平面 $y - z = 0$ に関する対称移動とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x + z = 0$ の原点を通る法線に点 (x, y, z) からおろした垂線の足を P とするとき，点 P の座標を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3 次正方行列 A を求めよ.

(3) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ を解け.

(4) 平面 $x + z = 0$ と平面 $y - z = 0$ のなす角 θ を求めよ，ただし，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(5) $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は原点を通る直線を軸とする回転移動となる．軸となる直線の方向ベクトルと回転する角度を答えよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131002)

0.27 原点を O とする左手系の直交座標を，x-O-y とする．原点 O を，$(x, y) = (1, 2)$ に平行移動した座標系を X-O'-Y とする．座標系 X-O'-Y をその原点 O' の周りに反時計方向に，$\pi/4$ 回転した座標系を x'-O'-y' とする．原点 O の周りに反時計方向に，座標系 x-O-y を $\pi/4$ 回転した座標系を X'-O-Y' とする．X'-O-Y' の原点を $(X', Y') = (1, 2)$ に平行移動した座標系を x''-O''-y'' とする．これらの座標系に関して以下の設問に答えなさい.

(1) 座標系 x-O-y と座標系 x'-O'-y' との関係を図示しなさい.

(2) 座標系 x-O-y と座標系 x''-O''-y'' との関係を図示しなさい．

(3) x-y 座標系の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．座標系 x'-y', x''-y'' において，この図形を式で表しなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011203)

0.28 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ 　(ただし，$a > 0,\ b > 0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1) 体積を求めよ．　　(2) 表面積を求めよ．

(筑波大 2001)　　(m20011305)

0.29 $2 \leq x \leq 2$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \\ \\ 0 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.

(2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい.

(3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

（筑波大 2004）　　(m20041306)

0.30 $y = x^2 - 2x - 8$ の曲線を x 軸に対して回転させて囲まれる部分の体積を求めよ.
ただし, 求める部分は $x^2 - 2x - 8 = 0$ の解 x_1 , x_2 の間のみとする ($x_1 \leqq\ x \leqq\ x_2$).

（筑波大 2004）　　(m20041309)

0.31 (1) $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ で与えられる図形の概略を描け ($a > r > 0$).

(2) この図形を y 軸の周りに回転して得られるドーナッツ型の回転体（トーラス）の体積 V を求めよ.

(筑波大 2006)　　(m20061317)

0.32 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f \circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f \circ g\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ.

(3) 次の積分を求めよ.　$\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y) \mid -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$

(筑波大 2007)　　(m20071312)

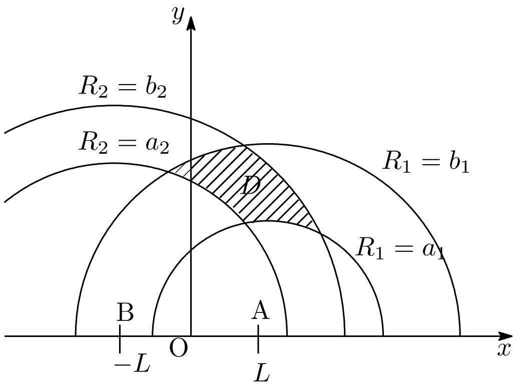
0.33 点 $P(3,1)$ と直線 $y = x$ について対称な点を Q,　Q を原点を中心に反時計回りに 90° 回転した点を R とするとき，R の座標を求めよ.

(筑波大 2008)　　(m20081327)

0.34 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x-L)^2 + y^2 \,, \qquad R_2 = (x+L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は
$$V = 2\pi \int_D y dx dy$$
で与えられる．x, y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z) = \log\left(\dfrac{z-L}{z+L}\right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$, $0 < r_2$, $0 < \theta_1 < \pi$, および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016)　　(m20161315)

0.35 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T = {}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t = 1, 2, 3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1, 2, 1)$ に平行にとること．

(3) 3次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，$y_1,\ y_2,\ y_3$ を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.36 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A + 2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A + E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.37 直交座標系の座標軸 O-xyz を，原点を固定して回転した座標軸を O-XYZ とする．直交座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がそれぞれ，新座標系の正規直交形で

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$ と表されたとき，以下の設問に答えよ．

(1) 旧座標系で表された点 $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ の新座標系での座標を求めよ．

(2) 新座標系で $(0, 4, 2)$ と表される点の旧座標系での座標を求めよ．

(埼玉大 2014)　　(m20141401)

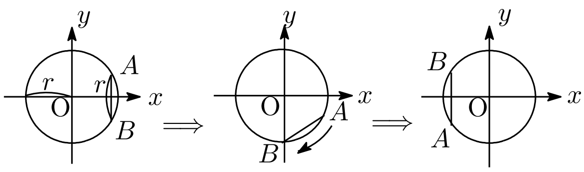
0.38 xyz 空間のベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対する線形変換について，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を y 軸に対して対称移動させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ を z 軸のまわりに角 θ だけ回転させるような $3\times\ 3$ 行列を導出せよ．

(埼玉大 2016)　　(m20161404)

0.39 原点を中心とする半径 $r(r>0)$ の円の円周に両端が接する長さ r の線分 AB がある．図のように AB がはじめ y 軸と平行に置かれ，線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び y 軸と平行になるまで移動する．このとき次の問に答えよ．



(1) 線分 AB が通る領域を図示し，その面積を求めよ．

(2) (1) の図形を y 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

0.40 3 次元空間の曲線 $x=0$，かつ $z=y^2 \quad (0 \leqq y \leqq 2)$ を z 軸のまわりに回転させてできる曲面を考える．この曲面を内面とする容器を z 軸の正方向が鉛直上向きになるように置き，単位時間当たり体積 V_0（定数）の水を容器が完全に満たされるまで注ぎ入れる．このとき，次の設問に答えよ．

(1) 容器の底から水面までの高さが h のとき，容器内の水の体積 V を求めよ．

(2) 空の容器に水を注ぎ入れ始めてから時間 t 後の容器の底から水面までの高さを t の関数 $h(t)$ と表す．$h(t)$ に対する微分方程式を導け．また，それを解いて $h(t)$ を求めよ．

(3) 容器を完全に満たしてから静かに 45 度傾けたとき，容器内に残る水の体積を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171801)

0.41 3 次元デカルト座標系で (x, y, z) と表される点を任意の軸のまわりに回転させる演算子に関して，次の設問に答えよ．

(1) 点 (x, y, z) を z 軸のまわりに，その軸の正方向からみて反時計回りに角度 ϕ 回転させる演算子を，3 行 3 列の行列 $R_z(\phi)$ で表す．このとき，$R_z(\phi)$ を求めよ．

(2) 設問 (1) の $R_z(\phi)$ において，角度 ϕ が微小量 ϵ であるとき，ϵ の 2 次のオーダーまで考慮して $R_z(\epsilon)$ を求めよ．

(3) 設問 (1), (2) と同様にして，x 軸，y 軸のまわりの回転を表す行列 $R_x(\epsilon)$, $R_y(\epsilon)$ を，それぞれ ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で求めよ．

(4) $R_x(\epsilon)$ と $R_y(\epsilon)$ の交換関係を $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ と書き，$[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)] = R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon)$ とする．このとき $[R_x(\epsilon),\ R_y(\epsilon)]$ を ϵ の 2 次のオーダーまでの範囲で，単位行列 I と $R_z(\epsilon^2)$ を用いて表せ．

(山梨大 2017)　　(m20171803)

0.42　放物線 $y = x^2 + x - 1$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ の周りに回転させて出来る立体の体積を求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102010)

0.43　x-y 平面上の曲線 $y = 2x^2$ を，原点のまわりに 45°回転して得られる曲線の方程式を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142009)

0.44　3 次元空間上のベクトル $\vec{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\vec{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\vec{\mathrm{V}}' = U(\theta)\vec{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2, K^3, および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.45　次の一次変換 f, g について答えよ．

(1) 原点を中心として左回りに角度 θ だけ回転させる変換 f を表す行列を求めよ．

(2) 原点を中心とする相似比 k の相似変換 g を表す行列を求めよ．

(3) f と g の合成変換 $f \circ g$ を表す行列を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152011)

0.46 X-Y 座標平面上に点 $A(x_1,\ y_1)$ がある．原点を中心として点 $A(x_1,\ y_1)$ を $45°$ 回転した時の座標点 $B(x_2,\ y_2)$ を求めよ．また点 $A(x_1,\ y_1)$ を，点 $P(1,2)$ を中心として $60°$ 回転した時の座標点 $C(x_3,\ y_3)$ も求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172003)

0.47 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1+\sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする．

(新潟大 2022)　　(m20222008)

0.48 xy 平面で, 2 曲線 $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$ で囲まれる部分を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) S の概形を描き, その面積を求めよ.

(2) S を y 軸の回りに回転させてできる回転体を V とする. V の体積を求めよ.

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, V の $t \leqq y \leqq t+1$ にある部分の体積の最大値を求めよ.

（長岡技科大 2004）　　(m20042101)

0.49 (1) xy 平面上の点 (x, y) の y 軸に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めなさい.

(2) xy 平面上の点 (x, y) の直線 $y = ax$ に関する対称点を (x', y') とするとき, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる行列 B を求めなさい.

(3) 行列の積 BA が角度 $\dfrac{\pi}{3}$ の反時計まわりの回転を表すとき，a の値を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092102)

0.50 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える． $\mathrm{A}(r, 0)$ とし，円周上に点 B を $\angle\mathrm{AOB}= 30^{\circ}$ になるようにとる． 下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014)　　(m20142104)

0.51 関数 $y = \sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする．下の問いに答えなさい.

(1) 図形 S を図示し，面積を求めなさい.

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(長岡技科大 2015)　　(m20152103)

0.52 $\vec{c}$ を定ベクトル, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ を位置ベクトルとするとき, $\vec{c} \times \vec{r}$ の回転 (rot) を求めなさい.
ただし, $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ は, 右手直交座標系の x, y, z 軸に対する基本ベクトルである.

(金沢大 2010)　　(m20102212)

0.53 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ.

(1) $y=x^3$ 上の点 $P(t,t^3)$ から，$y=x$ へ下ろした垂線の足を Q とする．点 Q の座標を，t を用いて表せ.

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする．$t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ.

(3) 点 P から点 Q までの距離を，(2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする． $y=x$ と $y=x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を，$y=x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を，s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ.

(4) $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ.

(金沢大 2012)　　(m20122207)

0.54 次の計算をしなさい．ただし，$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルである.

(1) スカラー関数 $\phi=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配

(2) ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ の発散

(3) ベクトル関数 $\boldsymbol{v}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}$ の回転

(金沢大 2016)　　(m20162209)

0.55 $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1\cdots(*)$ を次の手順で，(x,y) 平面に図示せよ.

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x\quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ.

(2) A の固有値 $(\lambda_1<\lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），

$v_2=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a>0$, $c>0$ と選ぶ.

(3) 行列 $P=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ.

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，(x,y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン

回転すると (X,Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X,Y) 平面上で図示せよ.

(5) $(*)$ を (x,y) 平面上で図示せよ.

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.56 y 軸は鉛直方向，座標軸の単位は cm であるとして，次の問に答えよ．ただし，水位とは x 軸からの水面の高さのこととする.

(1) 関数 $y=x^2$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ．水位が $h\ cm$ のときの水量を求めよ.

(2) 関数 $y=|x^2-1|$ の y 軸を回転軸としてできる回転面を内壁とする容器 B は，上げ底の器のようになる．この器に水を注いで水位が $h\ cm$ になったときの水量を求めよ.

(3) B の容器に毎秒 $V\ cm^3$ の割合で水を注いだとき，水面の上昇速度を水位 h の関数として求めよ.

(富山大 2000)　　(m20002304)

0.57 $x=a\cos\theta$, $y=b(1+\sin\theta)$ $(\pi\leq\theta\leq 2\pi$, a,b は正の定数$)$ によって描かれる $x-y$ 平面上の曲線 S について，次の問いに答えよ.

(1) θ を消去して，x, y の関係式を導け．

(2) S のおおよその形を描け．

(3) y 軸（鉛直方向）を回転軸としてできる曲線 S の回転面を内壁とする容器 A に水を注ぐ，水位が $b/2$ のときの水量 V を求めよ．ここで，水位とは x 軸からの水面の高さをいう．

(4) 関数 $y = cx^2 \ (c > 0)$ の y 軸を回転軸としてできる回転体 B を，容器 A 内に入れたとき，(3) で注がれた水があふれないための c の条件を求めよ．

(富山大 2003)　　(m20032303)

0.58 (1) 位置ベクトル $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$ とし，スカラー関数
$f(x, y, z) = \dfrac{1}{|\overrightarrow{r}|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ の勾配 $\mathrm{grad}\, f$ を，$\overrightarrow{r}$ を用いて表せ．

(2) ベクトル関数 $\overrightarrow{A}(x, y, z) = (x^2y, xy^2, 2z)$ の発散 $\mathrm{div}\, \overrightarrow{A}$ を求めよ．

(3) スカラー関数 $f(x, y, z)$ について，その勾配の回転 $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\, f$ は，常に零ベクトルとなることを示せ．

(富山大 2009)　　(m20092302)

0.59 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r) = \log_e r \ \ (r > 0)$ について次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O - xyz$ の単位ベクトルとし，$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$，$r = |\overrightarrow{r}|$ であるとする．

(1) 点 $P(1, 1, 0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x, y, z 成分を求めよ．

(2) 点 $Q(0, 0, 1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ．

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ．

(4) 勾配の回転 $\nabla \times \ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ．

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.60 スカラー関数 $f(x, y, z) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)}$ について， 次の各問いに答えよ．ただし，$\overrightarrow{i}$，$\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{k}$ は，それぞれ直角座標系の x，y，z 方向の単位ベクトルとする．

(1) 点 $P\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0\right)$ を含む等位面（関数 f の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x，y，z 成分を求めよ．

(2) 関数 f の勾配の発散 $\nabla \cdot \nabla f$ を求めよ．

(3) 関数 f の勾配の回転 $\nabla \times \nabla f$ を計算し，$\overrightarrow{0}$ となることを示せ．

(4) 点 $Q(1, 0, 1)$ における，ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{k}$ の方向への f の方向微分係数を求めよ．

(富山大 2017)　　(m20172303)

0.61 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0\ (0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として
円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.62 ベクトル場 $\vec{A}(x,y,z) = xye^z\vec{i} + x\log_e(z)\vec{j} + yz^4\sin(2x)\vec{k}$，スカラー場 $\phi(x,y,z) = xyz$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ はそれぞれ直角座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルとする．

(1) 回転 $\mathrm{rot}\vec{A}$ を求めよ．

(2) 勾配 $\mathrm{grad}\phi$ を求めよ．

(3) 点 $P(1,1,2)$ における，単位ベクトル $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$ の方向への ϕ の方向微分係数 $\frac{d\phi}{du}$ を求めよ．

(富山大 2020)　　(m20202304)

0.63 直線が $y = x - 1$ ある．

(1) この直線を原点のまわりに角 $\theta\ (0° \leqq \theta \leqq\ 180°)$ だけ回転して得られる直線を求めなさい．

(2) この回転した直線が曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と交わらないための角 θ の範囲を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002414)

0.64 $x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b > a > 0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる体積を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062404)

0.65 円 $x^2 + (y-b)^2 = a^2\ \ (b > a > 0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる立体の体積 v を求めよ．（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2008)　　(m20082404)

0.66 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ を x 軸の周りに一回転して得られる回転楕円体の体積を求めよ．

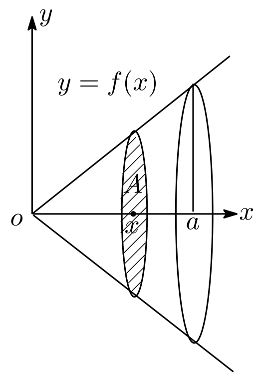
(福井大 2009)　　(m20092411)

0.67 定数 a, r が $0 < r \leq a$ のとき，円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ．

(福井大 2011)　　(m20112417)

0.68 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x$ がある．この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体（回転体）の体積を，次の問いにしたがって求めよ．

(1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき，
$x = x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ．

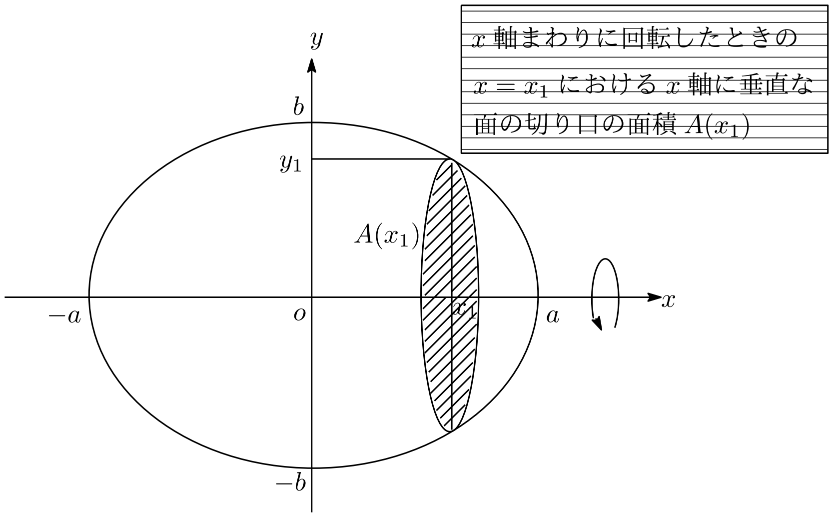


(2) 関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq a$ において x 軸のまわりに回転するときに生じる立体の体積 V を求めよ．体積 V は (1) で求めた面積 A を $0 \leq x \leq a$ の範囲で積分することで求めることができる．なお，円錐の体積を求める公式を使ってはいけない．

(福井大 2012)　　(m20122407)

0.69　右下図に示すように，2 次元 $x-y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ．

(1) この楕円の方程式を書け．



次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体の体積を求める．　各問いに答えよ．

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x=x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ．

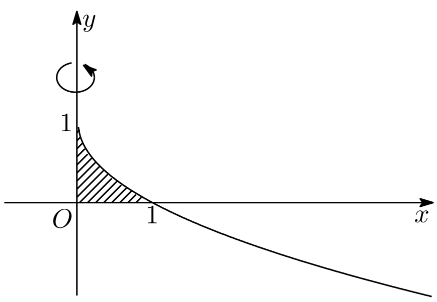
(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと．

(福井大 2013)　　(m20132408)

0.70　$y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$ と x 軸の囲む部分を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142406)

0.71　曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と直線 $x=0$ および $y=0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ．



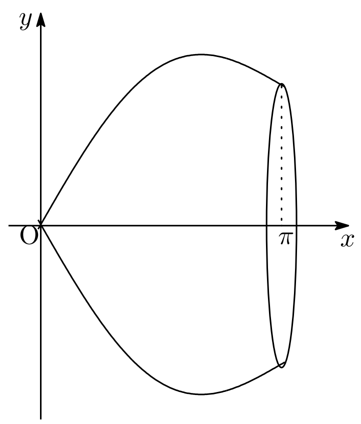
(福井大 2015)　　(m20152404)

0.72 (1) 点 $P(x,y)$ を点 $A(a,b)$ を中心として反時計回りに角 θ だけ回転したとき，移動後の点 $Q(x',y')$ を行列で表せ．また，点 P が $(2,1)$，点 A が $(3,2)$ であったときに 30回転したときの点　Q を求めよ．

(2) 3 次元直交座標系（原点を O）において，任意の点 (x,y,z) を x 軸周りに角 θ だけ回転させる行列 $\boldsymbol{R}$ を表せ．また，固有値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222426)

0.73 $y=\dfrac{x}{2}+\sin x$ の $0\leqq\ x\leqq\pi$ の部分の曲線を x 軸のまわりに回転してできる右図のような回転体の体積 V を求めよ．



(岐阜大 2009)　　(m20092617)

0.74 平面上の点 $A(1,2)$ を，点 $B(3,4)$ を中心として時計回りに 90 度回転させた．回転後の点 A の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992706)

0.75 xy 直交座標系の点列 (x_i,y_i), $i=1,\cdots,N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．

各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ア}}\\ \boxed{\text{イ}}\end{pmatrix}\tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix}x_i'\\ y_i'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}\tag{2}$$

とおけば，(x_i,y_i) と (u_i,v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix}u_i\\ v_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}}\\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i'\\ y_i'\end{pmatrix}\tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta)=\sum_{i=1}^{N}v_i^2\tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial\theta}=\boxed{\text{オ}}\tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial\theta}=-2\sum_{i=1}^{N}u_iv_i=0\tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\quad カ \quad}\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i' = \boxed{\quad キ \quad}\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\quad キ \quad}}{\boxed{\quad カ \quad}} = \boxed{\quad ク \quad} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\quad ク \quad} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}({x_i'}^2 - {y_i'}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\quad ケ \quad}\right) + \boxed{\quad コ \quad} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i' y_i'$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x_i'}^2$および$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y_i'}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\frac{7}{4}\pi$や　$\sin^{-1}\frac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.76 下記の式で表される楕円 C_1 を反時計回りに 45°回転して得られる像を　C_2 とする．

$$c_1 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$$

(1) C_1 を C_2 に写す一次変換を表す行列 A を求めよ．

(2) 図形 C_2 を表す式を求めよ．

(3) 図形 C_2 上の点 $P(x,\ y)$ において, P が C_2 上を移動する時, $x,\ y$ がそれぞれとる値の範囲を求めよ．

(豊橋技科大 2011)　　(m20112702)

0.77 xy 平面上の曲線 $y = \cos(x - \pi) + 1 \ \ (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$ と直線 $y = 0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.78 xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ．

(3) 領域 R の面積 S を求めよ．．

(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

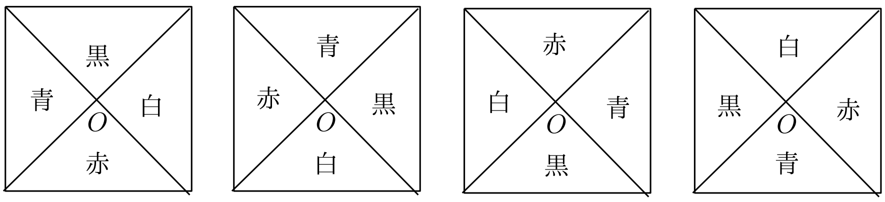
(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182704)

0.79 (1) ある平面上に正方形があり，その対角線の交点を O とする．対角線によりこの正方形を 4 等分してできる 4 つの直角二等辺三角形を塗装する．辺を共有する隣り合う三角形が異なる色となるように塗装することを考える．ただし，この平面上で点 O を中心に，この正方形を回転させると一致する塗装の仕方は同じものと考える．たとえば，下図で示されている 4 つの塗装は同一の塗装の仕方である．

ア．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 2 色を選択し，塗装する方法は何通りかを求めよ．

イ．黒，白，赤，青，黄の 5 色から 3 色を選択し，その 3 色全てを使用して塗装する方法は何通りかを求めよ．



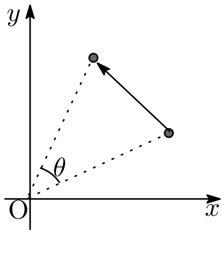
(2) 2 つのサイコロを同時に投げ，出た目の和が奇数とんる事象を事象 A，1 の目が少なくとも 1 つ出る事象を事象 B とするとき，確率 $P(A \cap B)$ を求めよ．

(3) 白玉 3 個，赤玉 4 個が入った袋の中から玉を 1 つずつ取り出し，取り出した順に左から右へ一列に並べる．　ただし，一度取り出した玉は袋に戻さないものとする．7 個全ての玉を順に取り出し並べるとき，白玉が隣り合わない様な並び方となる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192702)

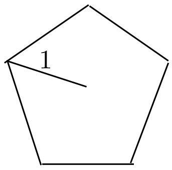
0.80 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問い に答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ.

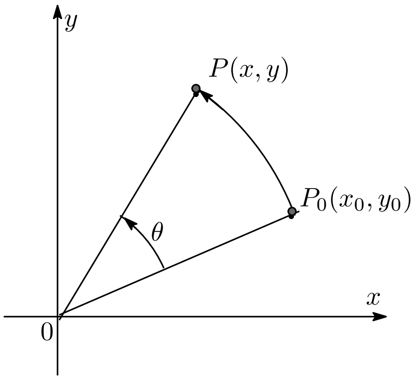


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ.

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ.

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.81 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ.

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ.

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ.

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする.

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.82 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ. なお, 次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

ただし, $n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.83 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系) 上の点 $p(x, y, z)$ を, この座標系と原点を共有し, 別の直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ による正規直交座標系 ($\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系) で示した場合, p の座標値は (x', y', z') となった. なお, 座標系は右手系とする.

(1) x', y', z' を x, y, z へ変換する行列 M を求めよ.

(2) いま, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系における, ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}$ の正側から見て, $\boldsymbol{k}$ を軸として右回りに 45° 回転し, 回転後の $\boldsymbol{i}$ の正側から見て, $\boldsymbol{i}$ を軸として右回りに 45° 回転した後のベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による座標系を $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系とする.

(a) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系で $p_1(1,0,0)$, $p_2(0,1,0)$, $p_3(0,0,1)$ で示される点の, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系での座標を求めよ.

(b) $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系から $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系に変換する行列 M の各要素の値を求めよ.

(c) M の転置行列は M の逆行列と等しくなる. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 座標系で $p_4(2,1,1)$ で示される点の $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ 座標系での座標を求めよ.

(名古屋大 2016) (m20162805)

0.84 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ.

(2) 標準基底に関して行列 $A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$ と表される線形写像 $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がある. この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき, 円 $C : x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ.

(名古屋工業大 2006) (m20062902)

0.85 (1) xy 平面内において, 3 点 $(-2,\ 19)$, $(1,\ -8)$, $(3,\ 4)$ を通る放物線の式 $y = ax^2 + bx + c$ を, 行列を使って求めることを考える. 放物線の式の係数を求める連立一次方程式を書いて, それを行列を使って表現しなさい.

(2) (1) で求めた行列を用いた式を解き, 放物線の式を求めなさい.

(3) xy 平面内の点を原点を中心として反時計まわりに 45°回転させる 1 次変換行列を求めなさい.

(4) (2) で求めた式で表される放物線を, 原点を中心として反時計まわりに 45°回転させて得られる放物線の式を求めなさい.

(三重大 2010) (m20103109)

0.86 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0, 0, \omega)$ (ただし, ω は定数) を考える. 以下の問に答えよ.

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする．C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ．ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである．

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ とし，D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする．重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla\times\ \boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{e}_z\,dxdy$ を計算せよ．

(三重大 2013)　　(m20133116)

0.87 (1) 次の関数の不定積分を求めなさい．

$\sin 3x\cos 2x$

(2) 次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい．

$y=-3x^2+12 \qquad (0\leqq x\leqq 2)$

(三重大 2017)　　(m20173103)

0.88 曲線 $y=3x^2$ を y 軸周りに回転してできる回転体を容器として考える．y 軸を鉛直上向きにとり，この容器に毎秒 c の割合で水を入れるものとする．この際，t 秒後の容器内の水面の高さを答えなさい．ただし，c は定数である．また，水面の高さは x 軸と水面との距離とする．

(三重大 2022)　　(m20223106)

0.89 ３次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする．ここで，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x,y,z 軸方向の単位ベクトルである．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{r}$ の発散，$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．$\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ は，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}$ とも書く．

(2) $\boldsymbol{w}=c\boldsymbol{k}$ とするとき，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\times\ \boldsymbol{r}$ の回転，$\nabla\times\ \boldsymbol{v}$ を求めよ．ただし，c は定数である．$\nabla\times\ \boldsymbol{v}$ は，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ とも書く．

(奈良女子大 2007)　　(m20073209)

0.90 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の量を計算せよ．

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\omega)$　(ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla\times\boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.91 ２次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸および y 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ とする．また，x 軸および y 軸をそれぞれ反時計方向に θ だけ回転して得られる座標軸を x' 軸，y' 軸とし，x' 軸と y' 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e'}_x$ および $\boldsymbol{e'}_y$ とする．このとき，以下の (1)〜(5) に答えよ．

(1) 条件 $(\boldsymbol{e'}_x\ \ \boldsymbol{e'}_y)=(\boldsymbol{e}_x\ \ \boldsymbol{e}_y)P$ を満足する２次の正方行列 P を θ を用いて表せ．

(2) 行列 P に対して $P^T P = P P^T = I$ が成り立つことを示し，この等式の幾何的な意味を，4つのベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e'}_x$, $\boldsymbol{e'}_y$ を用いて説明せよ．なお，P^T は P の転置行列を，また，I は2次の単位行列をそれぞれ表す．

(3) このユークリッド空間における任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$ のように，２通りの座標を用いて表すことができる．これら２通りの座標間の関係を行列 P を用いて表せ．さらに，$x^2 + y^2 = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ が成り立つことを示せ．

(4) このユークリッド空間におけるベクトル全体をそれ自身に写す変換 f が

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

なる関係を満たすとき，f を一次変換という．ここに α と β は任意の実数，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルである．一次変換 f と $\boldsymbol{e}_x$ $\boldsymbol{e}_y$ に対して，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_x) = a_{xx}\boldsymbol{e}_x + a_{yx}\boldsymbol{e}_y \\ f(\boldsymbol{e}_y) = a_{xy}\boldsymbol{e}_x + a_{yy}\boldsymbol{e}_y \end{cases} \qquad ④$$

が成り立つとし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X\boldsymbol{e}_x + Y\boldsymbol{e}_y$ と表すとき，これら２組の座標間の関係を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形で表現する行列 A を求めよ．

(5) 一次変換 f に対して，(4) の条件④に加えて．

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e'}_x) = a'_{xx}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yx}\boldsymbol{e'}_y \\ f(\boldsymbol{e'}_y) = a'_{xy}\boldsymbol{e'}_x + a'_{yy}\boldsymbol{e'}_y \end{cases}$$

が成り立つとする．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $f(\boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\boldsymbol{u} = x'\boldsymbol{e'}_x + y'\boldsymbol{e'}_y$, $f(\boldsymbol{u}) = X'\boldsymbol{e'}_x + Y'\boldsymbol{e'}_y$ と表せば，２組の座標間の関係は (4) と同様に

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

と表現される．このとき，行列 A と A' の関係を P を用いて表せ．

(京都大 2009)　　(m20093303)

0.92 x, y をデカルト座標とする R^2 において, 原点以外の点 P を原点 O のまわりに角度 θ だけ反時計回りに回転させた点を P_θ で表す. いま, P を x軸に関して線対称の位置に移した点を　P' とする. さらに, P' を直線 $ax + by = 0$ に関して線対称の位置に移した点を P'' とする. ただし, a, b は定数で, 同時にゼロとはならない. 位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP_\theta}$, $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{OP''}$ をそれぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_\theta$, $\boldsymbol{p}'$, $\boldsymbol{p}''$ で表す. 以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{p}_\theta = R\boldsymbol{p}$ をみたす行列 R を見出せ.

(2) $\boldsymbol{p}' = M\boldsymbol{p}$ をみたす行列 M を見出せ.

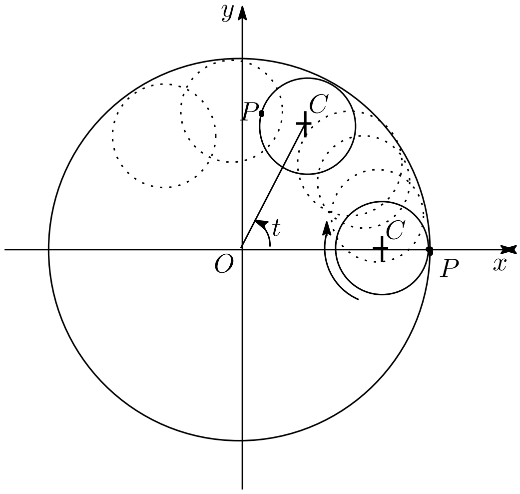
(3) $\boldsymbol{p}'' = N\boldsymbol{p}$ をみたす行列 N を見出せ.

(4) $\boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_\theta$ が成り立つように, 直線 $ax + by = 0$ を定めよ.

(京都大 2010)　　(m20103301)

0.93 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり，初期状態において座標 $(a, 0)$ にある点 P で大円に内接している．　小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円

は反時計回りに大円の内側を移動する． 点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする． このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき， 点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.94 2 つの曲線　$(y-a)^2 = a(a+x)$,　$(y-a)^2 = a(a-x)$　がある．ただし，$a > 0$ とする．
次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x-y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

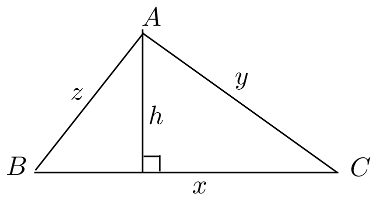
(大阪大 2006)　　(m20063504)

0.95 a を正定数とする． 3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．
$BC = x$, $CA = y$, $AB = z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

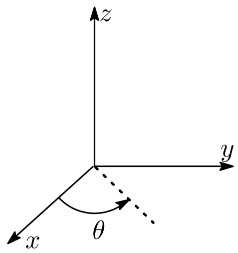
(2) 体積 V を x, y の関数として表せ．同時に，変数 x, y の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) x, y が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの x, y の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.96 下図に示すように，3 次元実ベクトル空間における直交座標系を考える．z 軸回りの回転については，回転角 θ の正の方向を，下図の矢印の方向とする．また，$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする．このとき，以下の問に答えよ．



(1) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す xy平面に平行な移動　$x' = x + az$, $y' = y + bz$, $z' = z$ を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 A を求めよ．

(2) 点 (x, y, z) を点 (x', y', z') へと移す z 軸周り角 θ の回転を考える．このとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

なる 3 次正方行列 B を求めよ．

(3) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，行列式 $|AB|$ を求め，$(AB)^{-1}$ が存在することを示せ．

(4) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$(AB)^{-1}$ を求めよ．

(5) 問い (1),(2) における行列 A, B に関して，$AB = BA$ となるための必要十分条件を示せ．

(大阪大 2012)　　(m20123504)

0.97 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x = 2\cos\theta$,　$y = 2\sin 2\theta$ で表される点 (x, y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．$y = f(x)$ の 1 点 (a, b) における接線の方程式が $y = -2(x - c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x - c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.98 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8 - x^2}$　(ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.99 (1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x,y)=x^3+y^3-9xy$ の臨界点を全て求め，それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y)=f(x\cos\theta+y\sin\theta,\ -x\sin\theta+y\cos\theta)$$

を満たすことをいう.

(神戸大 2018)　　(m20183803)

0.100 次の問に答えよ.

(1) サイクロイド：$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta\quad(0\le\theta\le 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

(2) 曲線 $y=2x^2$ と直線 $y=x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2011)　　(m20113904)

0.101 曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,\ b>0)$ および直線 ℓ : $x=\dfrac{a}{2}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $x\geqq\dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(2) $x\geqq\dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

(鳥取大 2013)　　(m20133901)

0.102 $n=1,2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n=\cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2(0\le\theta\le\pi/4)$ の長さ l は，$l=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006)　　(m20064002)

0.103 (1) 平面 $\boldsymbol{R}^2$ において原点を中心に角度 α だけ回転させる線形変換の行列表現を求めよ.

(2) 実数を成分とする 3 × 3 行列 X で，$X^3=I\ \ (X\ne I)$ を満たすものをひとつ求めよ．ただし，I は単位行列を表す.

(岡山大 2008)　　(m20084003)

0.104 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする．ただし，$x^2+y^2\le 9$ である．線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す．このとき，z を x,y の関数で表せ.

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく． 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる．ただし，$D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leq 9\}$ である．この 2 重積分を計算することにより，V の値を求めよ．

(広島市立大 2011)　　(m20114203)

0.105 xy 平面上での次の変換に対応する行列を求めなさい.

(1) 直線 $y = 2x$ に関する対称移動に対応する変換行列

(2) 原点を中心として 60° 回転移動に対応する変換行列

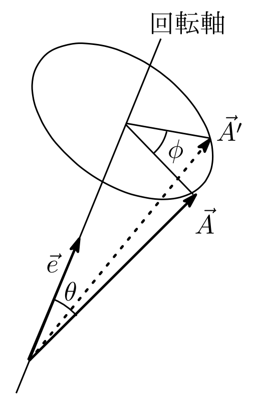
(山口大 2003)　　(m20034310)

0.106 放物線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる体積 V_1 および y 軸のまわりに回転してできる体積 V_2 を求めなさい.

(山口大 2006)　　(m20064301)

0.107 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 ϕ（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e}\times\vec{A}$ の関係を説明しなさい.

（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい.）



(山口大 2006)　　(m20064307)

0.108 次の平面の線形変換に対応する行列を求めよ．求める過程も述べよ.

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動となる変換.

(2) 原点を中心として時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転する変換.

(3) 直線 $x + 2y = 0$ へ正射影する変換.

(4) $y = x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $(2p, 2q)$ に移る．また，$y = -x$ 上の各点 (p,q) は同じ直線上の点 $\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{q}{2}\right)$ に移る．これらの 2 条件を満たす変換.

(高知大 2013)　　(m20134503)

0.109 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = & a\cos t \\ y = & b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ．

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.110 (1) 次の不定積分を求めよ．　$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

(2) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x\ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$，直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

ただし，$\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする．

(愛媛大 2017)　　(m20174602)

0.111 $a > 0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2 = a^2x$ を考える．

(1) 上の曲線の概形をかけ．

(2) 上の曲線を $x=0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.112 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし，次の条件を満たすとする．

- C は y 軸上の点 $(0, a)$ $(a > 0)$ を通る．
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられ，第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられる．

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x = a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ，第二象限内では $x = a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し，C の概形を描け．

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.113 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ ,\quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ．

イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ．

(2) 原点を中心とした単位円 C： $x^2+y^2=1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ．

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される．

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア〜ウを埋めよ．

$$E'\ :\ \left(\boxed{\quad ア \quad}\right)x^2 + \left(\boxed{\quad イ \quad}\right)xy + \left(\boxed{\quad ウ \quad}\right)y^2 = 1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.114 二次曲線 $y=ax^2+b$ と直線 $x=-1$，$x=1$ および $y=0$ とで囲まれる部分を面 D とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．ただし，a,b は定数であり，$a>0$，$b \geqq 0$ とする．

(1) 面 D の部分に斜線を施して図示しなさい．

(2) 二次曲線の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分を，曲線が x 軸に接するまで y 軸と平行に移動したとき，この曲線の移動部分がつくる面の面積 S を求めなさい．

(3) 面 D を y 軸を中心に回転させたときの回転体の体積 V_y，および x 軸を中心に回転させたときの体積 V_x を求めなさい．ただし，$a=b=1$ とする．

(4) $b=0$ のとき，$V_y=V_x$ が成り立つ a の値を求めなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034910)

0.115 平面内に点 P があり，これを $x-y$ 座標系で表示すればその座標値は $(1,1)$ である．いま，$x-y$ 座標系を反時計回りに 75 度回転させたものを $x'-y'$ 座標系とするとき，点 P の座標値を $x'-y'$ 座標系で表示せよ.（ヒント：$75=30+45$）

(佐賀大 2006)　　(m20064945)

0.116 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ を x 軸の周りで回転させてできる体積 V を求めよ．ただし，a, b は，正の定数である．

(佐賀大 2007)　　(m20074925)

0.117
$$\frac{(x+y)^2}{18}+\frac{(x-y)^2}{8}=1$$
で与えられる楕円について，次の問いに答えよ．

(1) 与式を満足する点の集合を図示せよ．

(2) 与えられた楕円を回転させ，長軸を x 軸に一致させるために必要な回転行列を求めよ．

(3) 与えられた楕円を半径 1 の円に変換する行列を求めよ．

(佐賀大 2011)　　(m20114909)

0.118 次の問いに答えよ．

(1) 平面上の点の x 軸への正射影となる線形変換 f_A を定める行列 A を示せ．

(2) 原点の周りに $\theta=45^\circ$ 回転する線形変換　f_B を定める行列 B を示せ．

(3) f_A，f_B の順番で変換する合成変換を求め，その変換により直線 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が移された後の直線を求めよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134903)

0.119 (1) 曲線 $xy=3$ と直線 $x+y=4$ の交点の座標をすべて求めよ．

(2) 曲線 $xy=3$ と直線 $x+y=4$ で囲まれる図形を，x 軸まわりに回転した回転体の体積 V_x と y 軸まわりに回転した回転体の体積 V_y を求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144910)

0.120 2 次元 xy 平面を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 点 $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を原点の回りに角 ϕ だけ回転して $(x',y')=\big(r\cos(\theta+\phi),\ r\sin(\theta+\phi)\big)$ に移すときの回転行列 $R(\phi)$ を求めよ．

(2) $\Delta\phi$ が十分小さいとき，$R(\phi)$ が次のように表されることを示せ．

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\phi \\ \Delta\phi & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2015)　　(m20154913)

0.121 xy 平面上の原点回りの回転角 -45°，60°の 1 次変換を ，それぞれ f, g とする．次の問いに答えよ．

(1) 合成関数 $g \circ f$ の行列を求めよ．

(2) 点 $(1, 1)$ を合成関数 $g \circ f$ で写像した点を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154923)

0.122 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき，円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし，$\theta = 0$ のとき，点 P は原点に位置したとする．

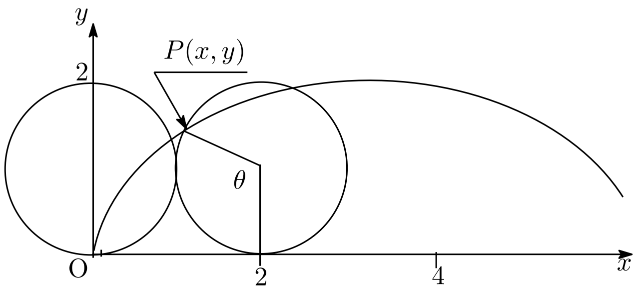
(1) 回転角が θ で与えられるとき，点 P の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ．

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.123 次の設問 (1),(2) に答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x} \sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ．

$$y = \frac{1}{x+1} \quad , \qquad x \text{ 軸}, \quad y \text{ 軸}, \quad \text{直線 } x = 2$$

（長崎大 2004）　　(m20045004)

0.124 方程式 $y = x^2 + 2x + 2$ について, 以下の問に答えよ．

(1) この方程式を示すグラフを図示せよ．

(2) このグラフを x 軸方向に $+3$，y 軸方向に -2 移動したグラフの方程式を示せ．

(3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれる領域を x 軸について回転させた時の体積を求めよ．

（長崎大 2004）　　(m20045005)

0.125 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx$ を求めよ．

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ．

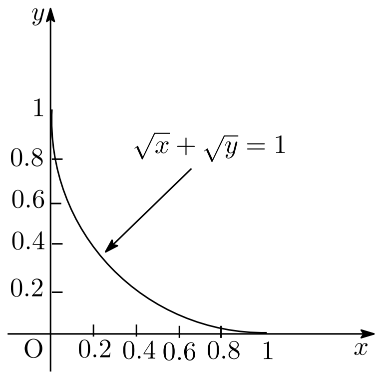
$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$，　　x 軸，　　直線 $x = 2$

(長崎大 2010)　　(m20105013)

0.126　右図に示すような曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ について，以下の問題に答えよ．

(1) この曲線と直線 $x = 0,\ y = 0$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ．

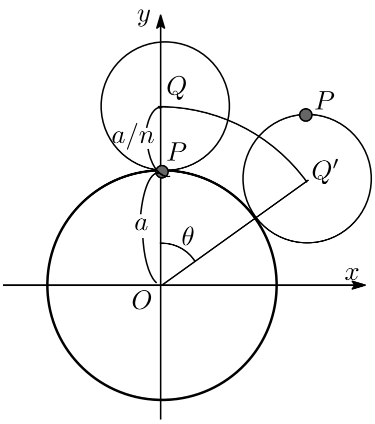


(長崎大 2011)　　(m20115005)

0.127　下図で示すように，固定された原点 O を中心とする半径 a の円の外側を半径 a/n の円が転がっていくとき，以下の問いに答えなさい．ただし n は自然数である．

(1) Q から Q' へ半径 a/n の円が転がった．$\angle QOQ'$ を θ とするとき，θ を用いて点 P の軌跡 $(x,\ y)$ を表しなさい．

(2) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だけ回転したとき，点 P の軌跡の全長を求めなさい．



(熊本大 2022)　　(m20225204)

0.128　平面内にある直交直線座標系で規定したベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$ において，次の問に答えなさい．

(1) 原点の周りに反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアン回転させるベクトルの変換行列 $\boldsymbol{A}$（直交行列）は次のように与えられる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A}$ を用いてベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を回転変換させるには，$\boldsymbol{Ar}$ の演算をすればよい．回転変換によって得られるベクトルを求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ をベクトル $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ に変換する 2 行 2 列の変換行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ. ただし, a, b は実数とする.

(鹿児島大 2005) (m20055411)

0.129 曲線：$y = a\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ （a：定数）と x軸によって囲まれた部分を x軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2009) (m20095408)

0.130 原点 $O(0,0)$, 点 $A(2,1)$ がある時, 以下の問いに答えなさい.

(1) 点 A に対して x 軸に関して線対称な点 B を求めなさい.

(2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|$ を求めなさい. それらを使い $\angle AOB = \theta$ とした時の $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めなさい.

(3) 点 A を原点の周りに反時計回りに 45°回転させた点 C の座標を求めなさい.

(鹿児島大 2010) (m20105409)

0.131 曲線：$y = x^3$ を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転面と, $y = 1$, $y = 8$ を通って y 軸に垂直な 2 平面とで囲まれた領域の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125415)

0.132 曲線：$y = x^2$ と曲線：$x = y^2$ で囲まれる領域の面積を求めなさい. また, その領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125420)

0.133 放物線 : $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器を水で満杯にする. この容器の底に排水口があり, 時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する. 時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする. V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ とする. このとき, 次の問に答えなさい.

(1) 水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表しなさい.

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215422)

0.134 $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055501)

0.135 ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\alpha xy - z^3)\boldsymbol{i} + (\alpha - 2)x^2\boldsymbol{j} + (1-\alpha)xz^2\boldsymbol{k}$ について, 以下の問いに答えなさい. なお, α は実数であり, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は直交座標系の x 軸, y 軸, z 軸上で正の向きを持つ単位ベクトルである.

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ においてベクトル $\boldsymbol{B} = 2\beta\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ と直交するとき, 実数 β を α を用いて表しなさい.

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の回転 $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})$ の値が任意の場所で $\overrightarrow{0}$ となるときの, α の値を求めなさい.

(室蘭工業大 2008) (m20085507)

0.136　括弧の中を埋めよ．全部で 8 箇所ある．

2 次元平面上の任意の点を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表す（図 1-1 を参照する事）．

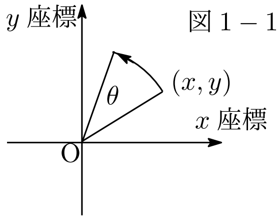


図 1 − 1

点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を原点 O の周りに角度 θ だけ回転（反時計回りを正とする，図 1-2 を参照）した点は $\begin{pmatrix} [ア\quad] \\ [イ\quad] \end{pmatrix}$ となる．

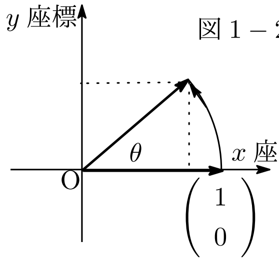


図 1 − 2

同様に考えると，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ はは $\begin{pmatrix} [ウ\quad] \\ [エ\quad] \end{pmatrix}$ に移る．

よって任意の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を原点の周りに角度 θ だけ回転した点は，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，

$\begin{pmatrix} [オ\quad] & [キ\quad] \\ [カ\quad] & [ク\quad] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で与えられる．

(室蘭工業大 2008)　　(m20085511)

0.137　$y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(室蘭工業大 2015)　　(m20155503)

0.138　2 次元直交座標系における任意の点 $P(x, y)$ の座標を変換する行列について，以下の問いに答えよ．

(1)　点 P を x 軸に対称な座標に変換する行列 A を示せ．

(2)　点 P を，原点を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転させる行列 B を示せ．

(3)　点 P を直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に対して対称な座標に変換する行列 C を求めよ．

(室蘭工業大 2021)　　(m20215503)

0.139　xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1)　放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2)　点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3)　点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4)　放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5)　放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.140　平面上の点を原点の周りに 45 度回転する線形変換を f とする．以下の問いに答えなさい．

(1)　線形変換 f の表現行列 A を求めなさい．

(2)　$x^2 - y^2 = 1$ を線形変換 f により移した曲線の方程式を求めなさい．

(3)　(2) で求めた曲線の概形を描きなさい．

(首都大 2018)　　(m20185903)

0.141 $x^2+(y-2)^2=k^2$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし $0<k<2$ とする．

(東京都立大 2022)　(m20225906)

0.142 (1) 3次曲線 $y=x^3-x^2-x+1$ のグラフの概形を描け．

(2) 設問 (1) の曲線と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(宇都宮大 2007)　(m20076103)

0.143 平面上の，曲線 $y^2=x-1$，および，直線 $y=x-3$，について下の問いに答えよ．

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　(m20156103)

0.144 方程式 $(x^2-1)^2+y^2=1$ の表す曲線 C について，下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，円周率は π と表記し，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2016)　(m20166103)

0.145 曲線 $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y=x$，$x=1$，$x=4$ で囲まれた図形を A とする．
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　(m20196103)

0.146 x–y 平面上の曲線 $4x^2+y^2=4$ に囲まれた図形を x 軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　(m20196106)

0.147 実数 $a>1$ として下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$，$S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ．

(宇都宮大 2020)　(m20206103)

0.148 図 1 のように，点 A,B,C,D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，
各座標を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．
また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である．

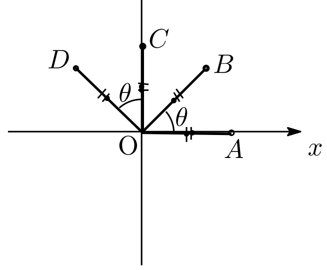


図 1:xy 軸平面

以下の問に答えよ．

(1) 点 B, D の座標を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad ①$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha + \beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.149 次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

$$y = \sqrt{2x}\,, \quad x = 9\,, \quad y = 0$$

(1) この図形の面積を求めなさい．

(2) この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166403)

0.150 原点の回りの $\dfrac{\pi}{3}$ の回転により，方程式 $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2ay + b = 0$ が 2 次曲線 $y = x^2 - 1$ に移される場合，定数 a, b の値を求めなさい．

(和歌山大 2014)　　(m20146503)