[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：帰納法

0.1 次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp\ A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　(m19980311)

0.2 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x} \cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　(m20110502)

0.3 以下の問いに答えよ．

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 7, \qquad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \qquad (n = 1, 2, 3\cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ．

$$b_1 = 0, \qquad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \qquad (n = 1, 2, 3\cdots)$$

(3) 次の条件を満たす c_2，c_3 および c_4 を求め，数列 $\{c_n\}$ を推定せよ．また，その推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ．

$$c_1 = 2, \qquad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \qquad (n = 1, 2, 3\cdots)$$

(東北大 2014)　(m20140503)

0.4 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 3, \qquad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，b_1 と b_2 は正の整数とする．

(a) $b_1 = 21$, $b_2 = 27$ のとき，b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ．

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき，b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ．

(3) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について，以下の問に答えよ．

$$-1 < c_1 < 0, \qquad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき，c_2 を求めよ．

(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ．

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し，さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \to \infty$ の極限を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170503)

0.5 次の行列 $\boldsymbol{X}$ と数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ について，以下の問に答えよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{X}^3$ を求めよ．

(2) n が 1 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{X}^n$ が次の形式で表されることを，数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\boldsymbol{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n, b_n, c_n で構成される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220502)

0.6 (1) 同じ数字を 3 個並べてできる 10 進 3 桁の整数（例えば，444,　555　など）は 3 で割りきれることを証明せよ．

（a を任意の数字とするとき，$aaa = a \times \ (10^2 + 10^1 + 10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(2) 同じ数字を 3^2 個並べてできる 10 進 3^2 桁の整数は 3^2 で割りきれることを証明せよ．

（$aaaaaaaaa = aaa \times \ (10^{2 \times \ 3} + 10^3 + 10^0)$ と表せることに注意せよ.）

(3) 1 以上の任意の整数 n に対して，同じ数字を 3^n 個並べてできる 10 進 3^n 桁の整数は 3^n で割りきれることを，n に関する数学的帰納法で証明せよ．

（$\underbrace{a \cdots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{a \cdots a}_{3^k}\underbrace{a \cdots a}_{3^k}\underbrace{a \cdots a}_{3^k} = \underbrace{a \cdots a}_{3^k} \times \ x$ と表したとき，x はどのような数になるかを考えよ.）

(電気通信大 2000)　　(m20001001)

0.7 $A=\{0,1,2\}$ とする．A^n を，A の要素を n 個並べてできる列全てからなる集合とする．さらに A^n の要素のうち，n 個の数の総和を 3 で割った剰余が k $(k=0,1,2)$ になるものの集合を $A^n(k)$ とする．

例：$A^2=\{00,01,02,10,11,12,20,21,22\}$

$A^3=\{000,001,002,\cdots,221,222\}$

$A^2(0)=\{00,12,21\},\quad A^2(1)=\{01,10,22\},\quad A^2(2)=\{02,11,20\}$

(1) $A^3(0), A^3(1), A^3(2)$ の全ての要素を上の例のように列挙せよ．

(2) 任意の正整数 n に対し，$|A^n(0)|=|A^n(1)|=|A^n(2)|=3^{n-1}$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $n \geq 4$ のとき，$A^n(0)$ の要素のうち，ちょうど 2 個の 0 で始まる（3 個以上ではいけない）列の個数を n を用いて表せ．

(電気通信大 2001)　　(m20011001)

0.8 (1) 集合 $\{1,2,3\}$ の空でない部分集合をすべて書け．それらの部分集合を，3 を含むものと含まないものに分けよ。

(2) $n=3$ のとき $\{1,2,3\}$ のすべての空でない部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1 \leq k \leq 3$ の和

$\displaystyle\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_k}$ を計算せよ（計算過程も書け）．

(3) $n(n \geq 1)$ に関する帰納法により $\displaystyle\sum_{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_k}=n$

を示せ．ただし，左辺は $\{1,2,\cdots,n\}$ の空でないすべての部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$1 \leq k \leq n$ に対して和を計算するものとする．

(電気通信大 2006)　　(m20061007)

0.9 $p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=5,\ p_4=7,\ p_5=11$ のように p_n で n 番目の素数を表すとする. 次の問いに答えよ.

(1) $1+p_1\cdots p_n$ を割る最小の素数を p とすると,

$$p_{n+1} \leq p \leq 1+p_1\cdots p_n$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 番目の素数は $2^{2^{n-1}}$ 以下であることを帰納法で示せ.

(筑波大 2010)　　(m20101305)

0.10 A を正方行列，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(n \geq 2)$ を A の固有値，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 一般に，k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立で，$k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}$ が線形従属ならば，$\boldsymbol{a}_{k+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合であることを示せ.

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立であることを示せ.

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なるとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを，数学的帰納法によって証明せよ.

(筑波大 2013)　　(m20131307)

0.11 数学的帰納法を用いて，次の等式を証明せよ.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

(群馬大 2007)　　(m20071502)

0.12　n を自然数とするとき，　$2^{2n+1}+1$　が 3 で割り切れることを，数学的帰納法により証明せよ．

(山梨大 2007)　　(m20071809)

0.13　n を自然数とするとき，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(山梨大 2009)　　(m20091806)

0.14　数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ．　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{-1/2}\geqq\sqrt{n}$

(山梨大 2015)　　(m20151803)

0.15　(1)　関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき，下式を満たす点 $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．ただし，$f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする．

$$f(x)=f(0)+xf^{(1)}(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分を関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ．

$f(x)=(1+x)^k$　(k は任意の実数) を 2 次式で近似し，$\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい．

(2)　n 回微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ の積 $f(x)\cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい．

$$\Big(f(x)\cdot g(x)\Big)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}{}_nC_if^{(n-i)}(x)\cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016)　　(m20161804)

0.16　命題の証明に関する以下の問いに答えなさい．

(1)　p と q を命題とする．命題 $p\to q$ が真であることを証明するために，下表に示す 3 つの方法がある．直接法に関する説明を参考にして，対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい．

直接法	pを真と仮定して, qが真であることを証明する.
対偶法	（解答用紙に説明しなさい）
背理法	（解答用紙に説明しなさい）

(2)　命題関数 $P(n)$ を「最初の n 個の正の奇数の和は n^2 である」とする．すべての正の奇数 n に対して $P(n)$ が真であることを，数学的帰納法を用いて証明しなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181804)

0.17　${}_nC_r$　$(0\leqq r\leqq n)$ は式 (1)-(3) で与えられる．

$${}_nC_0=1 \tag{1}$$

$${}_nC_n=1 \tag{2}$$

$${}_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}\qquad(1\leqq r\leqq n) \tag{3}$$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ．

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^kb^{n-k} \tag{4}$$

(山梨大 2020)　　(m20201804)

0.18　n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n=\displaystyle\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$　このとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ.　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007)　　(m20072210)

0.19 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める.　$I_n = \displaystyle\int_1^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ.

(2) $n \geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ.　$I_n = \dfrac{1}{e} + (n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.　$I_n = \dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016)　　(m20162214)

0.20 (1) 正方行列 A, P, D の間に $P^{-1}AP = D$ の関係があるとき, A^n（n は自然数）を P, P^{-1}, D, n を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち, 大きさが 1 の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする. ただし，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする. このとき，$Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ.

(3) (1), (2) の結果をもとに, B^{10} を求めよ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする. なお, 必要ならば $2^{10} = 1024,\ 3^{10} = 59049,\ 5^{10} = 9765625$ の値を用いよ.

(富山大 2010)　　(m20102304)

0.21 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x = 0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.22 行列　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について，次の問に答えよ.

(1) 直接計算で $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を確かめよ. ここで，$\boldsymbol{I}$ は 3 次単位行列である.

(2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して，帰納法で $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}^{n-2} + \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}$ を証明せよ．

(3) (2) の結果を用いて $\boldsymbol{A}^{50}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062907)

0.23 n が自然数のとき，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成立することを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(三重大 2007)　　(m20073109)

0.24 箱の中に 1 から 8 までの整数を記入した 8 枚のカードが入っている．この箱から任意にカードを 1 枚取り出し，その数字を調べてからもとの箱に戻す．これを 3 回繰り返し，取り出したカードの数字の最大値を X とする.

(1) $X \leqq 4$ となる確率を求めよ.

(2) $k = 1, 2, 3, \cdots .8$ として，$X = k$ となる確率を求めよ.

(3) 数列の和に関する下記の等式について，数学的帰納法を用いて証明せよ．n は自然数を示す.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

(4) (3) の等式を参照して X の期待値を求めよ.

(三重大 2011)　　(m20113104)

0.25 (1) 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を $x < 1$ において定義する．任意の自然数 n に対して，下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ここで，$\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x, y)$ について，$m \geqq 0,\ n \geqq 0,\ m + n > 0$ の条件を満たす任意の整数 $m,\ n$ に対して式 ㋐ が成り立つとする．また，式 ㋑ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} g(x, y) = g(x, y) \cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0, 0) = e \cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお，$m = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n} g(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) = g(x, y)$$

また，$n = 0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0} g(x, y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x, y) = g(x, y)$$

(a) $g(x, y) = u(x)w(y)$ とおく．任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい．ここで，$u(x)$ は変数 x に関する関数，$w(y)$ は変数 y に関する関数とする.

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) = u(x)$$

(b) 関数 $g(x, y)$ を求めなさい.

(三重大 2018)　　(m20183104)

0.26 次の関数　$y = e^x \sin x$　について以下の問に答えよ．

(1) 第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が　$y^{(1)} = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$　となることを示せ．

(2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が $\quad y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right) \quad$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033202)

0.27 初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.28 Nim という複数個の石を２人で交互に取るという簡単なゲームがある．１回に取る石は，１～３個で最後に石を取った方が負けである．以下の問いに答えよ．

(1) 残っている石が２～４個のとき，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(2) 残っている石が５個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(3) 残っている石が６～８個の時，次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(4) 残っている石が $4n+1$ 個の時，次に石を取らない方が必ず勝つ事が出来る事を数学的帰納法で示せ．また，それ以外の時は次に石を取る方が必ず勝つ事が出来る事を示せ．

(京都大 1998)　　(m19983301)

0.29 行列に対する新たな演算子 $\otimes$ を考え，式の集合 $\mathcal{Z}$ を以下のように定義する．

(1) 各行列 A_1，$A_2, \ldots$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(2) $\mathcal{Z}$ に属する任意の式 F, G に対し，式 $(F \otimes G)$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(3) $\mathcal{Z}$ は，上の２条件に該当する式だけを要素として含む．

このとき，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ に対し，それが $\mathcal{Z}$ の要素となるように「括弧づけ」を行うことを考える．例えば，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ に対しては

$$((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3))$$

の２通りの「括弧づけ」が存在する．また，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4$ に対しては

$$(((A_1 \otimes A_2) \otimes A_3) \otimes A_4), \quad ((A_1 \otimes A_2) \otimes (A_3 \otimes A_4)) \quad ((A_1 \otimes (A_2 \otimes A_3)) \otimes A_4)$$

$$(A_1 \otimes ((A_2 \otimes A_3) \otimes A_4)), \quad (A_1 \otimes (A_2 \otimes (A_3 \otimes A_4)))$$

の５通りの「括弧づけ」が存在する．以下では，式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ (ただし $n \geq 2$) に対する「括弧づけ」の個数を T_n と表す．

(1) 式 $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4 \otimes A_5$ に対する「括弧づけ」を５通り示せ．

(2) $T_n \geq 2T_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $T_n \geq 2T_{n-1}$ の結果および数学的帰納法を用いて, $T_n \geq 2^{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(4) 式 $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n$ には $\otimes$ が $n-1$ 個現れていることに注意して，$T_n \leq (n-1)!$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013501)

0.30 n 枚のコインを 1 列に並べる．各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1)=2$ であり, $n=2$ のときは (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) の 4 通りの置き方があるので $f(2)=4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n=1$ のときは $(H),(T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1)=2$ であり, $n=2$ のときは $(H,H),(H,T),(T,H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2)=3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005)　　(m20053507)

0.31 あるパーティで, n 人の参加者が 1 つずつプレゼントを持ち寄り, 主催者がこれを集めて, 帰りに n 人の参加者に 1 つずつランダムに配るものとする. このとき, 自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも 1 人出る確率を $Q(1,n)$ とする. 参加者に 1 番から n 番までの番号をつける. i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする.

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ.

(2) $i_1,i_2,\cdots,i_m$ をそれぞれ 1 以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする. 事象 M_{i_1}, M_{i_2}, $\cdots$ M_{i_m} が同時に起こる確率を n と m の式で表せ.

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く. 2 つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1\cap A_2)$, A_1 と A_2 のうち少なくとも 1 つが起こる確率を $P(A_1\cup A_2)$ と書く.
このとき $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$ である. 一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1,A_2,\cdots,A_N$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)$ は

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_N)=\sum_{l=1}^{N}(-1)^{l-1}S_l \tag{i}$$

$$\text{ここで } S_l=\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_l}P(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap\cdots\cap A_{k_l}) \tag{ii}$$

である. ただし, 式 (ii) の右辺の $\sum$ は, N 個の整数 $1,2,\cdots,N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する. 特に $l=1$ のときは $S_1=\sum_{j=1}^{N}P(A_j)$ である. 式 (i) を数学的帰納法で示せ.

(4) $Q(1,n)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{1}{j!}$ を示せ.

(5) $\lim_{n\to\infty}Q(1,n)$ を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073508)

0.32 正の実数 R に対して, 複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする. 以下の問いに答えよ.

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha| < R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z-\alpha} dz$$

を求めよ．

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z) = h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z) = {} & h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z) + h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ & + \cdots + h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ & + \cdots + h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1 z + b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z) = 0$ の n 個の複素数解を α_1, α_2, $\cdots$, α_n とし，R は $|\alpha_j| < R$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2 f'(z)}{f(z)} dz$$

を b_{n-2}, b_{n-1} を用いて表せ．

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.33 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\, f_n(t)\, dt\,, \quad n = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

このとき，$f_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k\, k!}$　$n = 1, 2, \cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ．

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.34 正の整数 n と実数 $c, y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し，$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1y_1 + c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_1y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義し，また $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を

$$d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1 \\ y_2 & y_2y_2 + c & \cdots & y_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n + c \end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$\det A$ は行列 A の行列式を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n \geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = cD_{n-1}(c, y_2, \cdots, y_n) + y_1 d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

(2) $n \geq 2$ のとき $d_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^{n-1} y_1$ であることを示せ.

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ. (ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^n + c^{n-1} \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(神戸大 2014)　　(m20143806)

0.35 自然数 n に対し，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおく．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ．

(2) 自然数 n を固定する．各 $j = 0, 1, ..., n-1$ に対し，多項式 $\dfrac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^n$ は $x^2 - 1$ で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

ただし必要ならば $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \, dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1}$
を用いてよい．　(鳥取大 2001)　　(m20013902)

0.36 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の n 次導関数 $(n \geqq 1)$ が　$(-1)^n \{x^2 - 2nx + n(n-1)\} e^{-x}$
であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) $f(x)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数展開を求めよ（一般項も記すこと）．

(広島市立大 2001)　　(m20014201)

0.37 (1) 数学的帰納法によって，次の式を証明せよ．ただし，n は正の整数である．

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

(2) 次の無限級数の和 S を求めよ．

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots$$

(広島市立大 2006)　　(m20064201)

0.38 ド・モアブルの法則 $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい．

(山口大 2003)　　(m20034304)

0.39 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.40 数列 $\{a_n\}$ において， $a_1 = a_2 = 1$ ， $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ であるとき，次の問に答えよ.

(1) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおくとき， S_n と a_{n+2} の間に成り立つ関係式を推定せよ.

(2) 上の問で推定した関係式を数学的帰納法によって証明せよ.

(九州芸術工科大 1999)　　(m19994801)

0.41 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1+2x} \quad \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1), (2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.42 (1) 次の命題を数学的帰納法により証明しなさい.

「任意の自然数 n に対して, $n^3 + 2n$ は 3 で割り切れる」

(2) 次の命題を背理法により証明しなさい.

「自然数 n が, 2 または 3 で割り切れないならば, 6 でも割り切れない」

(熊本大 2010)　　(m20105201)

0.43 以下の証明問題に答えなさい.

(1) 自然数 n に関する不等式 $2^n > 2n - 1$ について，数学的帰納法により証明しなさい.

(2) $\log_{10} 2$ が無理数であることを，背理法により証明しなさい.

(熊本大 2013)　　(m20135201)

0.44 非負の整数 x, y に対して関数 f を次のように定義する.

$$\begin{cases} f(0,y) = y+1 \\ f(x+1,0) = f(x,1) \\ f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y)) \end{cases}$$

(1) $f(1,3)$ の値を計算せよ. ただし, その計算過程も示せ.

(2) $f(0,y) = y+1$ の例のように, y に関する多項式として $f(1,y)$ を表現せよ. そして, その正しさを帰納法により示せ.

(3) $f(x,y) \geq x+y+1$ であることを示せ.

(島根大 2005)　　(m20055802)

0.45 n は 2 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007)　　(m20076106)

0.46 整数 $m,\, n \geqq 0$ に対する次の再帰関数について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A(m,\, n) = \begin{cases} 2n & ,m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき} \\ 2 & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n = 1 \text{ のとき} \\ A(m-1,\, A(m,\, n-1)) & ,m \geqq 1 \text{ かつ } n \geqq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) $A(1, 2)$ を答えなさい.

(2) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m,\, 1)$ を答えなさい.

(3) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(1,\, n) = 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.

(4) 整数 $m \geqq 1$ について, $A(m,\, 2)$ を答えなさい.

(岩手県立大 2010) (m20107001)

0.47 条件 $a_1 = \dfrac{1}{3},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2 - a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ.

(2) 一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ.

(3) 正の整数 n に対して，不等式 $a_n < a_{n+1} < 1$ が成り立つことを証明せよ.

(富山県立大 2017) (m20177102)