[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：コーシー

0.1　以下の問いに答えよ．ただし，解とともに導出過程も示せ．

(1) 複素数 A_n を係数とする複素多項式

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

を考える．ただし，z は複素変数，a は複素数，n は整数とする．複素平面上で a の周りを反時計回りに一周する経路 C に沿った積分について，以下の式が成り立つことを示せ．ここでは i を虚数単位とする．

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i A_{-1}$$

必要であれば以下のコーシーの積分定理を用いて良い．

複素関数 $g(z)$ が複素平面上の閉曲線 C' とその内部 D' で正則あれば．
C' を一周する経路に沿って $g(z)$ を積分すると，その結果はゼロである．

(2) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

(3) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

(4) 実変数 x について，以下の定積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

(東京大 2012)　　(m20120704)

0.2　整関数 $f(z)$ $(z = x+iy)$ は，$f(0)=0$ を満たし，その実部が $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + ay\sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $u(x,y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たす）ことから a の値を定めよ．

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x,y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991005)

0.3　２つの曲線

$$C_1 : z = e^{i\theta} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

$$C_2 : z = \frac{3}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{2} \qquad (\,0 \leqq \theta \leqq \pi\,)$$

が与えられているとする．次の各問に答えよ．

(1) C_1, C_2 を図示せよ．

(2) $\displaystyle\int_{C_1} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

(3) コーシーの積分定理を使って，$\displaystyle\int_{C_2} \frac{1}{z}dz$ を求めよ．

ただし，(2) と (3) における積分路の向きは，$\theta = 0$ のときの点から $\theta = \pi$ のときの点にむかう向きを正の向きとする．

(茨城大 2000）　(m20001704)

0.4 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z \neq 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする．

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(1) $z = x + yi$ のとき，複素関数 $f(z) = u + iv$ の実部 $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ および虚部 $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ を x, y の関数として表しなさい．

(2) (1) の実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい．

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が，

$$f'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$$

となることを，実関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい．

(福井大 2015)　(m20152424)

0.5 関数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - a - ibx}$$

について，以下の設問に答えよ．ただし，x は実変数，a と b は正の実定数，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x)$ を変形して

$$f(x) = A\left(\frac{1}{x - z_1} - \frac{1}{x - z_2}\right)$$

としたとき，z_1 および z_2 を求め，複素平面上に図示せよ．ただし，A, z_1, z_2 は複素数の定数である．

(2) ζ を実数とし，積分

$$I(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx$$

のコーシーの主値，すなわち

$$I(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{\zeta-\varepsilon} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx + \int_{\zeta+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta}\, dx\right) \qquad ①$$

を考える．式①の積分路は実数軸上にあるが，図 1 で示した複素平面内における積分路 C_1, C_2, C_3 に沿った複素積分を利用することにより，$I(\zeta)$ を求めることができる．ここで，C_1 は原点を中心とした半径 R の下半円周，C_2 は ζ を中心とした半径 ε の下半円周，C_3 はこれらの半円周とそれらを結ぶ実数軸の線分で構成される閉曲線であり，いずれも図中の矢印に沿って積分するものとする．

(a) C_1 に沿った積分路の $R \to \infty$ での極限値を求めよ．

(b) ε が十分小さいとき，C_2 に沿った積分値を求めよ．

(c) C_3 に沿った積分値を求めよ．

(d) 以上の結果から，$I(\zeta)$ を求めよ．

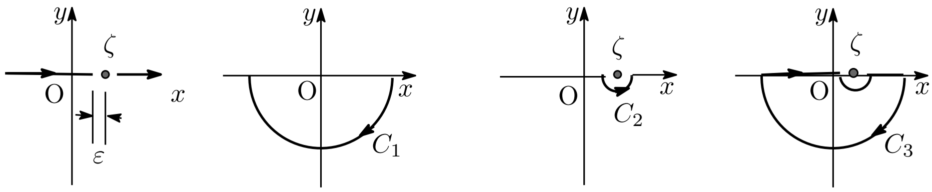

図 1　左から順に，式 ① の積分路，C_1，C_2，C_3 を示す.

(京都大 2008)　　(m20083305)

0.6　関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$　($z = x + iy$，$i = \sqrt{-1}$，x と y は実数，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z = z_0 = x_0 + iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1)　コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2)　$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053509)

0.7　C は複素平面上の円周 $\{z\,;\,|z| = 4\}$, D は $\{z\,;\,|z| < 4\}$ とする.

(1)　D に円周 C を付け加えた集合 $\overline{D} = C \cup D$ で正則な関数に対するコーシーの積分表示を書け.

(2)　次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \cos z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

なおコーシーの積分表示では微分と積分が交換可能であることを用いてよい.

(3)　次の複素積分を求めよ.

$$\int_C \frac{ze^z \sin z}{(z-\pi)^2(z+\pi)^2}\,dz$$

(大阪大 2012)　　(m20123509)

0.8　z は $|z| = 1$, $z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく.

(1)　非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.

(2)　$m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3)　(1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left|\sum_{k=n}^{m-1} \dfrac{z^k}{k}\right| < \varepsilon$ が成り立つ.　　(C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.9 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\big((x,y)\neq(0,0)\big)$ のとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(2) $f(x,y)=x^2-y^2$ のとき，(f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ.

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y)=h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

$$q(x,y)=k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと，(p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.10 $a_1=1$ および $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{1}{2}\leqq a_n\leqq 1$ であることを示せ.

(2) 任意の自然数 n に対して，$\big|a_{n+2}-a_{n+1}\big|\leqq\dfrac{4}{9}\big|a_{n+1}-a_n\big|$ であることを示せ.

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ．また，その極限値を求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164501)

0.11 次の各問いに答えよ.

(1) $f(z)$ は単位円 $|z|\leqq 1$ で正則で，円周 $|z|=1$ 上で $|f(z)|\leqq M$ を満たす．コーシーの積分公式

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z-a}dz,\qquad (|a|<1)$$

を用いて，$|f(0)|\leqq M$ を示せ.

(2) $g(z)=\dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ は円周 $|z|=1$ 上で $|g(z)|=1$ を満たすことを示せ.

(3) この $g(z)$ との合成関数を用いることにより，上の (1) の条件を満たす関数 $f(z)$ は単位円内のすべての点で $|f(z)|\leqq M$ を満たすことを示せ.

(九州大 1999)　　(m19994707)

0.12 複素関数 $w=e^{-z}$ について次の問いに答えなさい．ただし，i を虚数単位とする.

(1) $w=u+iv$, $z=x+iy$　（ u,v,x,y は実数 ）とおくとき，u,v それぞれを x,y を用いて表しなさい.

(2) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(和歌山大 2011)　　(m20116501)

0.13 次の各問いに答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の複素関数について，問いに答えなさい．

$$w = z^3$$

(a) $w = u + iv$, $z = x + iy$ $\quad (u, v, x, y$ は実数$)$ とおくとき，u, v それぞれを x, y を用いて表せ．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 次の複素関数について複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$，$c : |z| = 1$ を求めなさい．ただし，積分の向きは反時計回りとする．

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 4z}$$

(和歌山大 2013) (m20136507)

0.14 (1) 複素数関数 $w = \dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい．

(a) $w = u + iv$, $z = x + iy$ とおくとき，u, v を x, y を用いて表しなさい．ただし，u, v, x, y は実数とする．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい．ただし，積分路 C は $|z| = 2$ とし，向きは反時計回りとする．

(和歌山大 2015) (m20156506)

0.15 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$

(B) $u = e^x \sin y,\ v = e^x \cos y$

(2) (1) で選んだ $u,\ v$ に対して，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ z = x + iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい．

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z| = 1$ とし，向きは反時計回りとする．

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018) (m20186505)