[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：固有ベクトル

**0.1** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，$t$ ： 定数

(北海道大 1997)　　(m19970102)

**0.2** ２次の正方行列 $A$ を

$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad (0 < p < 1\,,\ 0 < q < 1)$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を対角化せよ．

(3) $A^n$ を求めよ．

(北海道大 2003)　　(m20030103)

**0.3** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} \quad (a \neq b,\ a, b \neq 0,\ a, b \in R)$$

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ を対角化せよ．

(北海道大 2004)　　(m20040103)

**0.4** 次の 2 階の微分方程式 ：

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \ ,$$

は, $y_1 = y$, $y_2 = dy/dx$ の変数変換により,

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

と表せる．行列 ：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} ,$$

の固有値・固有ベクトルを計算することにより，$y_1$ , $y_2$ の一般解を求めよ．

(北海道大 2005)　　(m20050101)

**0.5** 次の 3 次実正方行列 $A$ について，以下の問いに答えなさい．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値を求めなさい.

(2) $A$ のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) $A$ を対角化する行列 $P$ を求め，$A$ の対角化 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(北海道大 2006)　　(m20060102)

**0.6** 行列，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{100}$ を計算しなさい．ここで，$I$ は単位行列である.

(北海道大 2009)　　(m20090102)

**0.7** 次の行列 $A$ について以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ の対角化行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, そのときの行列 $P$ を示せ.

(北海道大 2010)　　(m20100104)

**0.8** 以下の設問に答えよ. 途中の計算結果を詳しく記述すること.

(1) $k$ を任意の実数とするとき, 次のベクトルの組 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が一次独立となる条件を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2 \ \ \boldsymbol{a}_3]$ とする．また, $k = 0$ とするとき, 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$（$n$ は自然数）を求めよ.

(北海道大 2012)　　(m20120101)

**0.9** 次の対称行列について，以下の設問に答えよ.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ.

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ ($= \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$) を挙げよ．　ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし，３つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと.

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$　($\mathbf{\Lambda}$ : 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ.

(北海道大 2013)　　(m20130101)

**0.10**　行列 $A$ を $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ で定める．

(1)　$A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)　$n$ は自然数とする．$A^n$ を求めよ．

(北海道大 2017)　　(m20170105)

**0.11**　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$（$\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい．

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bx}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\ \boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，$T$ は転換を表す．

(北海道大 2018)　　(m20180103)

**0.12**　次の行列 $A$ について，以下の設問に答えなさい．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1)　$A$ の固有値を求めなさい．

(2)　各固有値に属する固有ベクトル（ただし大きさが 1）を求めなさい．

(北海道大 2020)　　(m20200103)

**0.13**　次の行列 $A$ について，以下の設問に答えなさい．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(1)　行列 $A$ の行列式を求めなさい．

(2)　行列 $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(3)　行列 $2A$ の行列式と固有値を求めなさい．

(北海道大 2021)　　(m20210102)

**0.14**　次の行列 $\boldsymbol{A}$ について，以下の設問に答えなさい．ただし，$a$ は任意の実数とする．

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1)　行列 $\boldsymbol{A}$ が正則となるための $a$ の条件を求めなさい．また，このとき逆行列を $a$ を使って表しなさい．

(2)　$a=3$ のとき，固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(北海道大 2022)　　(m20220103)

**0.15** $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．$A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(北見工業大 2008)　　(m20080205)

**0.16** 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ につき以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) 各固有値に属する固有ベクトルをひとつ挙げよ．

(北見工業大 2009)　　(m20090205)

**0.17** 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 次の式を計算しなさい．

(i) $A$ の逆行列 $A^{-1}$　　(ii) $\left(A+6A^{-1}\right)\left(A-6A^{-1}\right)$

(2) 行列 $A$ で表される一次変換を $f$ とするとき，一次変換 $f$ による直線 $y=3x-2$ の像の方程式を求めなさい．

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090303)

**0.18** 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 $P$ をひとつ求めなさい．

(4) 任意の自然数 $n$ に対し $A^n$ を求めなさい．

(岩手大 2010)　　(m20100302)

**0.19** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ に関して，次の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 行列 $B, C$ と 2 次の単位行列 $E$ に関して $BC=E$ が成り立つとき，行列 $C$ を求めなさい．

(3) 行列 $B$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(4) 行列 $B$ を対角化しなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120302)

**0.20** 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，$a, b$ は定数とする．

(1) 定数 $a, b$ を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい．

(3) 行列 $A$ の固有ベクトルを求めなさい．

(岩手大 2013)　　(m20130302)

**0.21**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 $P$ を求め，$A$ を対角化しなさい.

(4) $A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は自然数とする.

(岩手大 2015)　　(m20150302)

**0.22**　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ を考える．$B' = AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$，$C = AC$ であるとき，次の問いに答えなさい

(1) $a, b, c, d$ の値をそれぞれ求めなさい.

(2) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(3) $D = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に対し $D' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = AD$ であるとき，逆行列 $A^{-1}$ を用いて $u$, $v$ の値をそれぞれ求めなさい.

(4) 行列 $A$ の固有値，および，それに属す固有ベクトルを求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする.

(岩手大 2016)　　(m20160302)

**0.23**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$，　$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(2) $AB = C$ であるとき，逆行列 $A^{-1}$ を用いて $u$, $v$, $w$ の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 $P$ を求め，$A$ を対角化しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180302)

**0.24**　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ のランク（階数）$\mathrm{rank}\,(A)$ が 3 であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$ , $\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 行列 $A$ の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 $P$ を求め，$A$ を対角化しなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190302)

**0.25**　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，　$C = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 39 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ のランク（階数）$\mathrm{rank}(A)$ が 3 であることを示しなさい.

(2) $AB = C$ であるとき，行列を用いて $x, y, z$ の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2021)　　(m20210302)

**0.26** 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \\ 10 & 2 & b \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をもつとき，$a$ と $b$ の値を求めなさい.

(2) 行列 $A$ の固有値をすべて求めなさい.

(岩手大 2022)　　(m20220302)

**0.27** $a$ を実数とし，$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値が，5 と 1 になるように，$a$ の値を定めなさい.

(2) $a > 0$ であり，かつ，$A$ の固有値が 5 と 1 であるとする．このとき，$A$ の固有ベクトルで大きさ 1 のものを求めなさい.

(秋田大 2003)　　(m20030404)

**0.28** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 問題 (1) の行列 $A$ に対して, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく. このとき,$P$ の各列ベクトルが $A$ の固有ベクトルであることを確かめ, $AP = PX$ となる行列 $X$ を求めよ.

(3) 問題 (1) の行列 $A$ の階数 (rank) と行列式 (determinant) を求めよ.

(秋田大 2005）　　(m20050403)

**0.29** $A$ は 2 次正方行列，$a, b$ は $A$ の固有ベクトルで，固有値はそれぞれ 2, $\dfrac{1}{2}$ であるとする.
$x_1 = a + b,\ x_2 = Ax_1,\ x_3 = Ax_2,\ \cdots,\ x_n = Ax_{n-1}$ とする．$x_n$ を $a, b$ を用いた式で表せ.

(秋田大 2006)　　(m20060403)

**0.30** 行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の設問 (1),(2) に答えよ.

(1) $P$ の逆行列が $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ になることを確かめよ.

(2) $P$ の第 1 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$，第 2 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_2$ とする．$\boldsymbol{p}_1$ が，ある $2 \times\ 2$ 行列 $A$ の固有値 1 の固有ベクトルであり，$\boldsymbol{p}_2$ が，同じ行列 $A$ の固有値 $-1$ の固有ベクトルであるとき，$A$ を求めよ.

(秋田大 2011)　　(m20110402)

**0.31** 以下の問いに答えよ.

(1) 以下の四角内に当てはまる値を計算し，解答欄の指定した箇所に記入せよ．

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し，$A$ の 2 つの固有値をそれぞれ $\alpha$, $\beta$ とする（ただし，$\alpha < \beta$ とする）．また，$\alpha$ と $\beta$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $v_\alpha$, $v_\beta$ とする．このとき

$$\alpha = \boxed{\quad（カ）\quad},\ \beta = \boxed{\quad（キ）\quad},\ v_\alpha = \begin{pmatrix} \boxed{（ク）} \\ 1 \end{pmatrix},\ v_\beta = \begin{pmatrix} \boxed{（ケ）} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる，

<u>注意</u> $\boxed{（ク）}$ と $\boxed{（ケ）}$ は，それぞれ $v_\alpha$ と $v_\beta$ のベクトルの第一成分である．

(2) 2 つのベクトル $v_\alpha$ と $v_\beta$ が直交するかどうか答え，その理由を述べよ．

(秋田大 2013)　　(m20130404)

**0.32** (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある．ベクトル $s\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{A} + t\boldsymbol{B}$ が直交するとき，スカラー $s$ と $t$ の関係式を求めよ．

(2) $a$, $b$ を実数とするとき; 行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の固有ベクトルと固有値を求めよ．

(秋田大 2015)　　(m20150403)

**0.33** $a, b$ を実数とし，$ab \neq 0$ とする．行列 $A$ を，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

とする．以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値の固有ベクトルを，ひとつずつ求めなさい．

(3) (2) で求めた固有ベクトルの図形的関係を答えなさい．

(秋田大 2017)　　(m20170404)

**0.34** 行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 等式 $\boldsymbol{Bx} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすとき，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 $\lambda$ を求めよ．

(2) (1) が成立するとき，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ は，微分方程式

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{By}$$

の解であることを示せ．

(3) $t$ $(0 \leq t \leq +\infty)$ を時間とすると，未知ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ の終端はどのような軌跡となるか，答えよ．

(秋田大 2021)　　(m20210404)

**0.35** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．

(2) 2 次正方行列 $B$ が，1 と 2 を固有値として持つとする．さらに，

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は，それぞれ，固有値 1 に対する固有ベクトル，固有値 2 に対する固有ベクトルであるとする．行列 $B$ を求めなさい．

(秋田大 2022)　　(m20220404)

**0.36**　2 次曲線 $C\ :\ 3x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 18 = 0$ は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, ${}^t\boldsymbol{pAp} - 18 = 0$ と表すことができる. ただし，${}^t\boldsymbol{p} = (x \quad y)$ である.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を求め, それぞれに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ , $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし, ある行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて, 線形変換 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{Up}'$ を行えば, 2 次曲線 $C$ は標準形になる. 行列 $\boldsymbol{U}$ を求め, 2 次曲線 $C$ の標準形を $x'$ , $y'$ を用いて表せ.

(3) $x$ 軸と $x'$ 軸のなす角度を求め, $x$ 軸 , $y$ 軸と $x'$ 軸 , $y'$ 軸の関係を図示し，2 次曲線 $C$ の概形を描け.

(東北大 2005)　　(m20050501)

**0.37**　$\mathbb{R}^3$ において $x$ , $y$ の標準内積を $(x, y)$ で表す. 3 次実対称行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $A$ は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ．$\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\lambda_3$ , および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル $\phi_1$ , $\phi_2$ , $\phi_3$ をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j\ :\ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する $f_j$ の表現行列を $P_j$ とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_jP_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, $O$ は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 $B$ を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　　(m20050506)

**0.38**　対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　で定義する.

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ. ただし, $n$ は自然数とする.

(東北大 2006)　　(m20060503)

**0.39**　行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ. その際, 固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ.

(3) (2) で求めた固有値を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする. 2 次形式 $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10z^2$ を標準形 $\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ.

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により, 平面 $x + y + z = 1$ はどのような図形に変換されるか. 変換前後の図形の概形を描け.

(東北大 2008)　　(m20080503)

**0.40**　行列　$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$　の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東北大 2008)　　(m20080504)

**0.41**　行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ. さらに, $A$ を対角化する直交行列を求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090505)

**0.42**　行列 $A$ を次のように定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) $A^5 - 13A^3$ を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ を 1 つ求めよ. また, その逆行列 $P^{-1}$ を求めよ.

(4) $A^n$ を求めよ. ただし, $n$ は自然数とする.

(東北大 2010)　　(m20100503)

**0.43**　$\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ に対し, $\left(\dfrac{1}{2}A\right)^n v\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $n \longrightarrow \infty$ で収束するとき, その極限を

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}A\right)^n v = \begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \\ z_\infty \end{pmatrix}$$

とあらわす. この極限が存在し 0 でないとき, 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011) (m20110503)

**0.44** 3 次の対称行列 $A$ および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を, 次のように定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $f(x, y, z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで, 左上付き添字 ${}^t$ は転置を表す). $f(x, y, z)$ を $x, y$ および $z$ の多項式で表せ.

(3) 原点を通り $A$ の固有ベクトルに平行な直線と, 2 次曲面 $f(x, y, z) = 18$ との交点をすべて求めよ.

(東北大 2014) (m20140502)

**0.45** 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさを 1 とする.

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 $\theta$ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする. $\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ. ただし, $\theta$ は反時計回りを正とする.

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30^\circ$回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ とする. (2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ. さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ.

(東北大 2016) (m20160504)

**0.46** 3 次実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(2) $x, y, z$ の連立方程式

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は解を持つか, その理由も答えよ.

(東北大 2017) (m20170504)

**0.47** 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ． ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(2) $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^t$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の転置行列を表す．

(東北大 2018)　　(m20180506)

**0.48** (1) 次の行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 $B$ について，以下の問に答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 $B$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(b) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする．$n$ が 1 以上の整数であるとき，ベクトル $B^n\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(3) 次の行列 $C$ について，以下の問に答えよ．

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ．ただし，$P^{-1}$ は $P$ の逆行列を表す．

(b) $n$ が 1 以上の整数であるとき，行列 $C^n$ を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200503)

**0.49** 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(b) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を示す．

(c) $n$ が 1 以上の整数であるとき，$n$ を用いて $\boldsymbol{C}^n$ を表せ．

(東北大 2021)　　(m20210503)

**0.50** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を一つ求めよ．

(3) $n$ を 2 以上の整数とする．$A^n$ を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 $a_n$ を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

**0.51** 3 次対称行列 $A$ を次で与える．
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970610)

**0.52** (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．
$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $n$ 行 $n$ 列の実対称行列 $A$ の，$n$ 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，$n$ 行 $n$ 列の行列を $B$ としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 $B^TAB$ は対角行列であることを証明せよ．但し，$B^T$ は $B$ の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000614)

**0.53** 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030612)

**0.54** 行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\psi$ は，
$$A\psi = \lambda\psi$$
という関係式を満足する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$
ただし，$a, b$ は正の実数とせよ．

(2) エルミート行列の固有値は，実数であることを証明せよ．ただし，エルミート行列 $H$ とは，複素数の成分をもつ行列であり，転置して複素共役を取った（これをエルミート共役を取るという）行列が，もとの $H$ と一致する行列である．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030614)

**0.55** 次の行列 $A$ について，行列式，逆行列，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい．
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070604)

**0.56** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求め対角化しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090606)

**0.57** 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値，および，独立な固有ベクトルをすべて求めよ

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090607)

**0.58** 次の実対称行列 $B$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶に水女子大 2010)　　(m20100612)

**0.59** 任意の実 $2\times\ 2$ 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい.

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める.

(2) 行列 $T$ の $n$ 乗を計算する.

(3) 行列 $T$ のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 $T$ を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする.

(4) $2\times\ 2$ 行列 $M$ に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 $a, b$ を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の $2\times\ 2$ 行列が上三角行列に変換されることを示す．　さらに．$T_0 = P^{-1}MP$ とするとき $n$ を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す.

(5) 行列 $B$ の要素がすべて実数で，固有値の絶対値が 1 より小さいとする．このとき行列 $B$ を無限回作用すると，実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

**0.60** $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 $f$ が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき，以下の各問に答えよ．

(1) $f$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110608)

**0.61** 次の行列 $A, B, C$ について，固有値と固有ベクトル空間の基底を求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120608)

**0.62** 行列に関する次の問に答えよ．

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有値 $\lambda_1$ $\lambda_2$ と規格化された固有ベクトル $v_1$, $v_2$ を求めなさい．

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて $A$ を対角化しなさい．

一般に，$n$ 行 $n$ 列の実対称行列 $B$ は，ある直交行列 $O$ およびその転置行列 $O^T$ を用いて
$O^T BO$ とすれば対角化されることが知られている．

(3) 直交行列 $O$ の定義を書きなさい．

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 $C$ の行列式がその 2 つの固有値 $c_1$, $c_2$ の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，$C$ が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 $C$ の対角和がその 2 つの固有値 $c_1$, $c_2$ の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，$C$ が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

**0.63** 以下の問いに答えよ．

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 $f$ が線形写像であることの定義を述べよ．

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f$ で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f$ で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ．

(2) 次の行列 $A$ の固有値と，各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

**0.64** 次の行列 $A, B$ について，それぞれ固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160611)

**0.65** 以下の 2 次正方行列について，固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

ただし，$a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b$ とし，$a, b$ は実数とする．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160615)

**0.66** 以下の 2 次正方行列 $A$ について答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170611)

**0.67** 行列 $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ について.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2018) (m20180605)

**0.68** 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ について,

(1) 固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2019) (m20190602)

**0.69** 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ. $i$ は虚数単位である.

(お茶の水女子大 2019) (m20190612)

**0.70** 次の式で定義される実対称行列 $A$ を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 $A$ の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020) (m20200605)

**0.71** 任意の行列 $A$ に対してそのエルミート共役を $A^\dagger$ と表す.

(1) 行列の積 $A^\dagger A$ が負の固有値を持たないことを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, 行列 $A^\dagger A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列 $A$ に対して行列 $(A^\dagger A)^n$ と $e^{A^\dagger A}$ を求めよ. ただし, $n$ は正の整数である.

(お茶の水女子大 2022) (m20220608)

**0.72** 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して, 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ を対称行列 $S$ と交代（逆対称, 反対称）行列 $K$ の和で表せ.

(2) 行列 $KS+SK$ は対称行列，交代行列，その他の行列の何れか．
又，行列 $KSKS+SKSK$ は上記の三つの行列の何れか．

(3) 行列 $A$ の固有方程式を示せ．

(4) 行列 $A$ の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(東京大 1997)　　(m19970702)

**0.73** 数列 $\{a_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ がある．この数列の 隣接した3項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$$

(1) $a_0=a_1=1$ として，極限値

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより，$a_0=a_1=1$ を初期値とした極限値

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また $a_n$ の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997)　　(m19970703)

**0.74** (1) 座標平面上で, 直線 $y=x$ に関する対称変換（線形変換）を表す行列 $A$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた固有値, 固有ベクトルの幾何的意味を考え, そこから行列 $A$ が直線 $y=x$ に関する対称変換を与えることを説明せよ.

(東京大 2002)　　(m20020701)

**0.75** 空間において, $xz$ 平面上の単位ベクトル $(u,0,w)$ を考える.

(1) $y$ 軸まわりの回転を表す行列のうち, ベクトル $(0,0,1)$ をベクトル $(u,0,w)$ に変換するものを求めよ.

(2) (1) で求めた行列を利用して, ベクトル $(u,0,w)$ を軸とする角度 $\theta$ の回転を表す行列を求めよ.

(3) (2) で求めた行列の実数の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(東京大 2005)　　(m20050705)

**0.76** $x_i,y_i$ の各値がある線形系を介して，$x_{i+1}$，$y_{i+1}$ をそれぞれ出力する際，入力値と出力値の関係は，
$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ で表現できる．ただし，$i$ は自然数とし，$A$ は行列とする．
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 \\ -31 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 系を表す行列 $A$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，行列 $A$ の表す一次変換の幾何学的意味を固有ベクトルを用いて述べよ.

(3) (2) の結果を用いて，$A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする，

(4) $x_n$ , $y_n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする，

(東京大 2007)　　(m20070702)

**0.77** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ , $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を $\lambda_1$ とする．

(2) $xy$ 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$ , $Q(q_1,\, q_2)$ , $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 $PQR$ の面積 $S$ の導出過程を示し，各頂点の座標 $p_1$ , $p_2$ , $q_1$ , $q_2$ , $r_1$ , $r_2$ により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を $n$ 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 $\alpha_n$ , $\beta_n$ および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

**0.78** 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，下の (1)〜(5) を答えよ．

ただし，3 つのベクトル $\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2,\, \boldsymbol{m}_3$ を $\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{m}_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$M = [\boldsymbol{m}_1,\, \boldsymbol{m}_2,\, \boldsymbol{m}_3]$ と表される行列 $M$ は $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ であるとする．

(1) 行列の 3 つの固有値を $a_1,\, a_2,\, a_3$ および固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$|\boldsymbol{u}_1| = |\boldsymbol{u}_2| = |\boldsymbol{u}_3| = 1$ とすること．

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3$ を用いて作られる行列 $U$ を $U = [\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3]$ とする．$UV = I$ のように行列 $U$ に右からかけると単位行列 $I$ となる行列 $V$ を求めよ．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3$ は互いにどのような関係にあるか説明せよ．

(4) 固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \boldsymbol{u}_3$ と行列 $U$ について, 下式を満たすような 3 つの行列 $P_1,\, P_2,\, P_3$ を求めよ．ただし，$P_1,\, P_2,\, P_3$ はそれぞれ 3 行 3 列の行列であり，$\mathbf{0}$ は零ベクトルである．

$$\begin{cases} P_1U = [\ \boldsymbol{u}_1 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_2U = [\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \mathbf{0}\ ] \\ P_3U = [\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \boldsymbol{u}_3\ ] \end{cases}$$

(5) 行列 $A$ の $n$ 乗である $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数である．

(東京大 2011)　　(m20110705)

**0.79** 数列 $x_n,\, y_n,\, z_n$ $(n = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0$，$y_0$，$z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

(3) $x_0 > 0$，$y_0 > 0$，$z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2} < C$ となる定数 $C$ $(C > 0)$ が存在するための，初期値 $x_0$，$y_0$，$z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

**0.80** $n$ 次正方行列 $A$ の第 $i$ 行，第 $j$ 列の成分 $a_{ij}$ が以下のように与えられている．

$$a_{ij} = \begin{cases} a & (i = j) \\ 1 & (i \neq j) \end{cases}$$

(1) 以下の場合について，$A$ の行列式の値を求めよ．

(a) $n = 3$　　(b) $n \geq 1$

(2) 以下の場合について，$A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(a) $n = 2$　　(b) $n = 3$

対角成分より下の成分が 0 となる正方行列を上三角行列と呼ぶ．$n$ 次上三角行列 $B$ の成分 $b_{ij}$ が以下のように与えられている．ただし，$b > 1$ である．

$$b_{ij} = \begin{cases} b & (i = j) \\ 1 & (i < j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}$$

(3) $n \geq 1$ の時，$B$ に関して，以下の問いに答えよ．

(a) 正則であることを示せ．　　(b) 逆行列を求めよ．

(東京大 2022)　　(m20220704)

**0.81** $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする．
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 $\varphi_A$ を

$$\varphi_A(X) = AX$$

と定義する．$\varphi_A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(東京工業大 1996)　　(m19960804)

**0.82** $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$，　$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $S_\theta = \cos\theta A + \sin\theta B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする．$\theta$ を固定するとき，2 次形式 ${}^t v S_\theta v = c$ ($c$ は 0 でない定数，${}^t v$ は $v$ の転置) の表わす図形は何か？

(東京工業大 1997)　　(m19970804)

**0.83** $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求め, $A$ を対角化せよ.

(2) $A^n$ を求めよ.

(東京工業大 2010)　　(m20100804)

**0.84** $c$ を定数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & c \end{pmatrix}$ が 1 を固有値としてもつとき，次の問いに答えなさい.

(1) $c$ の値を求めなさい.

(2) $A$ の固有値 1 に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2015)　　(m20150903)

**0.85** $r$ は実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & r & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えなさい.

(1) $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，$r$ の値を求めなさい.

(2) $r$ は (1) で求めた値とする．そのときの $A$ の固有値を $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ とする．ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ とする．$A$ の固有値 $\lambda_1$ に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2017)　　(m20170903)

**0.86** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値をすべて求めなさい.

(2) $A$ の最小の固有値に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2019)　　(m20190903)

**0.87** $t$ は実数とする．3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}$ について　$A\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ が成り立つとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $t$ の値を求めなさい.

(2) $A$ の逆行列を求めなさい.

(3) $A$ の固有値のうち最小のものを $p$ とする．$p$ に属する固有ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ の形のものを求めなさい.

(東京農工大 2022)　　(m20220904)

**0.88** 3 次の正方行列 $A$ について次の条件が成り立つとする. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 $-1$ の固有ベクトルである. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである. このとき以下の問に答えよ.

(1) $A$ を求めよ.

(2) $A$ を対角化する行列 $P$ と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(電気通信大 2000)　　(m20001004)

**0.89** 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $A$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 $P$ と対角行列 $B$ を 1 組求めよ.

(電気通信大 2012)　　(m20121001)

**0.90** 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ.

(2) 原点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む $\mathbb{R}^3$ 内の平面の方程式を求めよ.

(3) 次の条件を満たす 3 次正方行列 $A$ を求めよ.

(a) $A$ の対角成分は上から $1, -5, 2$ である.

(b) $\boldsymbol{a}$ は $A$ の固有値 2 に対する固有ベクトルである.

(c) $\boldsymbol{b}$ は $A$ の固有値 $-1$ に対する固有ベクトルである.

(4) 前問の条件を満たす $A$ の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換を考える．$k, \ell$ を実数とするとき $k\boldsymbol{a}+\ell\boldsymbol{b}$ のこの変換による像を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の線形結合で表せ．

(5) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を基底とする $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $W$ とする．$A$ の定める $W$ から $W$ への線形変換の基底 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2013)　　(m20131001)

**0.91** 　4 次正方行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため，掲載を差し控えさせていただきます．

(2) $f$ を部分空間 $V$ に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，$g$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 $B$ を求めよ．

(3) $B$ の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する $B$ の固有ベクトルを求めよ．

(4) $V$ の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する $g$ の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

**0.92** 　次の 3 次正方行列 $A$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 3 \\ 6 & -5 & 2 \\ -24 & 12 & -7 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171001)

**0.93** 　次の 3 次正方行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 3 \\ -6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_n = A^n\boldsymbol{a}\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義するとき，$\boldsymbol{a}_n$ を求めよ．

(電気通信大 2019)　　(m20191001)

**0.94** 3 次正方行列 $A$ と $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}$ を次の通りとする．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の実数の固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{v}$, $A^2\boldsymbol{v}$ が 1 次独立でないことを示せ．

(3) $A^3\boldsymbol{v}$, $A^4\boldsymbol{v}$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ の 1 次結合で表せ

(電気通信大 2020)　　(m20201002)

**0.95** 3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) $M$ の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．
基底 $\mathcal{A}$ に関する $f$ の表現行列が $M$ であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する $f$ の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

**0.96** (1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上における関数

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

の最大値と最小値を求めよ．

(横浜国立大 1995)　　(m19951102)

**0.97** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき，

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 $t$ を求めよ．

(3) 3 変数関数

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上における最大値と最小値を求めよ．

(横浜国立大 1996)　　(m19961102)

**0.98** (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を，問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ．

(横浜国立大 1997) (m19971102)

**0.99** 次の行列 $A$ の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(横浜国立大 2001) (m20011102)

**0.100** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列を求めよ.

(2) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトルが線形独立である事を示せ.

(横浜国立大 2007) (m20071101)

**0.101** 以下の行列 $A$ について，次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) 次の条件を満たす 4 次正則行列 $P$ を 1 つもとめよ:
「$P$ の列ベクトルはそれぞれ $A$ の固有ベクトルである.」

(横浜国立大 2008) (m20081101)

**0.102** 以下の行列 $A$ について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 互いに直交するように定めよ.

(2) $A$ の行列式を求めよ.

(3) $n$ を 1 以上の整数とする. $A^n$ を求めよ.

(4) $A$ の逆行列を求めよ.

(横浜国立大 2010) (m20101101)

**0.103** 以下の行列 $A$ について，次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(横浜国立大 2012)　　(m20121101)

**0.104**　以下の行列 $A$ について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 互いに直交する 3 本の $A$ の固有ベクトルを 1 組求めよ.

(横浜国立大 2013)　　(m20131101)

**0.105**　$0 < x < 1$ とし, $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ を 1 つ求めよ.

(3) $n$ を 1 以上の整数とする, $A^n$ を求めよ.

(4) $A^n$ の各成分は, $n \to \infty$ のとき極限をもつことを示せ.

(横浜国立大 2014)　　(m20141101)

**0.106**　行列 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ および, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^n$ を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(3) $B^n$ を $\sin(n\theta)$, $\cos(n\theta)$ で表わせ. また, その求め方を説明せよ.

(横浜国立大 2017)　　(m20171103)

**0.107**　以下の行列 $A$ が与えられている.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & a \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ただし, $A$ は異なる 2 つの実数を固有値として持つ. また, 定数 $a$ は正の実数である.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $a$ の値を求めよ.

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $A^{-1}$ を求めよ.

(横浜国立大 2018)　　(m20181101)

**0.108** 次の行列 $A$ が，1 と 4 を固有値としてもつとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 7 & a \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ただし，$a$ は実数の定数である．

(1) $a$ を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $A$ を対角化せよ．

(4) $A^n$ を計算せよ．

(横浜国立大 2019)　　(m20191101)

**0.109** 行列 $A$ が以下で与えられている．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $A$ を対角化せよ．

(3) $A^n$ を計算せよ．ただし，$n$ は正の整数とする．

(横浜国立大 2020)　　(m20201101)

**0.110** 次の行列 $A$ および $B$ に関して以下の問いに答えよ．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{4}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & a & -1 & -a \end{bmatrix}$$

ただし，$a$ は実数の定数であり，$A^{-1} = A^T$ が成り立つものとする．なお，任意の実数行列 $X$ の逆行列を $X^{-1}$ と表し，転置行列を $X^T$ と表す．

(1) $a$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $BB^T$ を求めよ．

(4) $B$ の逆行列 $B^{-1}$ を求めよ．

(横浜国立大 2021)　　(m20211101)

**0.111** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を求め，$\lambda_1, \lambda_2$ に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル $\nu_1, \nu_2$ を求めよ．さらに，$\nu_1, \nu_2$ を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997）　　(m19971203)

**0.112** 以下の設問に答えなさい．

(1) 次の対称行列　$A$　の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)　(1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて $A^n$ を求めなさい．
ここで，$A^n$ は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように $A$ を $n$ 回掛け合わせることを意味する．
例えば，$A^2 = A \cdot A$，$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である．

(千葉大 2000)　(m20001204)

**0.113**　次の 2 次形式について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

(1)　$f(x,y)$ は 2 次の実対称行列 $A$ とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，次のように書き直すことができる．

$$f(x,y) = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

$A$ を求めなさい．ここで，$\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

(2)　$A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．次に，2 次曲線 $f(x,y) = 1$ を，固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O - X, Y$ で表わし，その概形を示しなさい．

(千葉大 2002)　(m20021204)

**0.114**　次の行列 $A$ について答えなさい．　$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(1)　$A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2)　固有ベクトルを用いて $A$ を対角化しなさい．

(千葉大 2004)　(m20041204)

**0.115**　$\mathbb{R}^3$ で行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている．次の問いに答えなさい．

(1)　$A$ の対称部分 $T_1 = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ と，$A$ の歪み対称部分 $T_2 = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ の各行列を求めなさい．
ここで，$A^T$ は $A$ の転置行列を表す．

(2)　対称部分の行列 $T_1$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3)　歪み対称部分の行列 $T_2$ で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ を求めなさい．

(千葉大 2007)　(m20071207)

**0.116**　次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．　$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(千葉大 2008)　(m20081202)

**0.117**　(1)　$A$, $T$ が正則行列のとき，任意の整数 $m \geq 0$ において，

$$(T^{-1}AT)^m = T^{-1}A^mT$$

が成立することを示しなさい．（$T^{-1}$ は $T$ の逆行列）

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3)　$A^5$ を求めなさい．

(千葉大 2009)　(m20091202)

**0.118** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A$ の固有値を全て求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ)1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ , $\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ求めなさい．

(3) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ としたとき．$PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって，$P$ が直交行列であることを確認しなさい．ただし，$I$ は単位行列とする．

(4) $P^{-1}AP$ を計算して，行列 $A$ を対角化しなさい．

(千葉大 2012) (m20121202)

**0.119** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad (n \geq 1)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ は，始めの二項 $x_1, x_2$ が与えられれば定まる．そこで，$(x_1, x_2) = (0, 1)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_1$，$(x_1, x_2) = (1, 0)$ で定まる数列を $\boldsymbol{e}_2$ とする，$\{x_n\}$ の一般項を求めるため，数列の番号を一つずらす線形変換 $T$ を考えれば，基底 $\langle \boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 \rangle$ に関する $T$ の表現行列が $A$ になることを示しなさい．

(3) $A^n$ の固有値を用いて数列 $\{x_n\}$ の一般項を表し，$(x_1, x_2) = (1, 1)$ で定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めなさい．ただし，$A^n$ は $A \times \ A \times \ \cdots \times \ A$ を表す．

(千葉大 2013) (m20131202)

**0.120** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして，横に並べた行列 $P = [\, \boldsymbol{p}_1, \ \boldsymbol{p}_2 \,]$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4) $(P^{-1})^T = [\, \boldsymbol{q}_1, \ \boldsymbol{q}_2 \,]$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が $A^T$ の固有ベクトルであることを示しなさい．ここで $A^T$ は $A$ の転置行列を表す．

(千葉大 2014) (m20141202)

**0.121** (1) 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めなさい．

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(千葉大 2017) (m20171206)

**0.122** 2 次曲線 $-{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 = 1$ を行列で表すと

$$[\, x_1 \quad x_2 \,] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdots (*)$$

となる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2 \ (\lambda_1 < \lambda_2)$ を求めよ．

(2) 固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ について，それぞれの正規化された固有ベクトル $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を求めよ．

(3) 行列 $P = [\,\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2\,]$ を用いた変換

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\,, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

によって，式 $(*)$ を $y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2$ のみで表せ.

**ヒント:** $P$ が直交行列（${}^tP = P^{-1}$，上付き添字の $t$ は行列の転置）であることを利用する.

(4) 式 (1) で表される図形の種類は何か.

(筑波大 2000）　(m20001309)

**0.123** 行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ に関して，以下の問に答えよ．ただし，$0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする.

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化する必要はない.

(2) 上で求めた固有ベクトルのもとで行列 $A$ を対角化したときの対角行列 $B$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の対角化を用いて，$A^n$ を求めよ（$n$ は自然数）.

(筑波大 2001)　(m20011310)

**0.124** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ を考えよう．ここで，パラメータ $p, q$ の変動範囲は $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ.

(2) 行列 $A$ の $n$ 乗，$A^n$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の $n$ 乗の $n$ が大きい場合の極限値 $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(筑波大 2003)　(m20031316)

**0.125** 正方行列の固有値，固有ベクトルに関する以下の 2 つの問いに答えよ.

(1) 次の正方行列 $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $n$ 次の正方行列 $B$ の固有値とその転置行列 ${}^tB$ の固有値とは同じであることを証明せよ.

(筑波大 2003)　(m20031317)

**0.126** 次の微分方程式を解くために，以下の設問に答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 = 2x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(1) 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．この行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 $P$ を定め，行列 $A$ を対角化せよ.

(3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく．$\mathbf{x}$ と $A$ を用いて，上の微分方程式を表せ.

(4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく．$P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として，これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ．また，この $y_1$，$y_2$ に関する微分方程式の一般解を求めよ.

(5) $x_1,\ x_2$ の一般解を求めよ．

(6) $t=0$ における初期値 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ に対応する解 $x_1,\ x_2$ の，$t\to\infty$ における振る舞いを調べよ．

(筑波大 2004)　　(m20041321)

**0.127** 行列 $A=\begin{bmatrix}0&-4&0\\1&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ とする．

(1) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) ある正則行列 $P$ を用いて, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$ と対角化することは可能か. 可能であれば, $P$ の成分と $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の値を求めよ. 対角化不可能であれば, その理由を説明せよ.

(筑波大 2004)　　(m20041322)

**0.128** $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&3&1\\0&a&b\end{bmatrix}$ とする. このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ が正則であるための $a,b$ の条件を述べよ.

(2) $a=-1$ , $b=1$ のとき, 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051303)

**0.129** 空間（３次元のユークリッド空間）の中で，３つのベクトル $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ に写す，つまり，

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

とするような線形写像（行列）$A$ を考える．

(1) $A$ を具体的な数行列の形で表せ．

(2) $A$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061318)

**0.130** 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 $x,y$ をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell : y=ax$ に関して折り返すという線形写像を $P$ としたとき，$P$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061319)

**0.131** ４次の正方行列 $A$ を　$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ 　と定める．

(1) $A$ の固有値を全て求めよ.

(2) (1) で求めた各々の固有値に対する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(筑波大 2007)　　(m20071305)

**0.132** 2次の実対称行列 $A$ で作った2次形式が次のように与えられたとする. ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 2x^2 - 4xy + 5y^2$

ここで　$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ である.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトル（正規化したもの）をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有ベクトルを並べて作った2次の正方行列 $P$ とその転置行列 ${}^tP$ を使って ${}^tPAP$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に適当な一次変換を行い上記の2次形式を標準形に変換せよ.

(筑波大 2007)　　(m20071320)

**0.133** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値と単位固有ベクトルを求めよ.　(2) $A^n$ を求めよ（$n$ は正の整数）.

(筑波大 2007)　　(m20071336)

**0.134** 方程式 $x^3 - 1 = 0$ の3つの根を1, $\alpha$, $\beta$ とし, $A = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} & \dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \dfrac{\alpha-\beta}{2} & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{bmatrix}$ とする.

(1) $A^3$ を $\alpha$, $\beta$ を用いずに表せ.　(2) $A^2$ の逆行列を, $A$ を用いて表せ.

(3) $A^7$ を $\alpha$, $\beta$ を用いて表せ.　(4) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(5) $A$ を対角化せよ.

(筑波大 2008)　　(m20081312)

**0.135** 次の行列 $A$ について問いに答えよ.　$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような3次正則行列 $P$ は存在するか, 理由をつけて答えよ.

(筑波大 2008)　　(m20081313)

**0.136** 行列 $A$ について以下の設問に答えよ.

$$A \equiv (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ を構成する3個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は, 1次独立か1次従属か, 理由を示して答えよ.

(2) $A$ が正則かどうかを調べ, 正則な場合は逆行列を求めよ.

(3) $A$ の固有値と固有ベクトル（大きさを1に正規化したもの）をすべて求めよ.

(4) $A$ を対角化する行列を与え, それを用いて対角化されることを示せ.

(筑波大 2008)　　(m20081323)

**0.137** 独立変数が 1 個 $(t)$, 従属変数が 2 個 $(x = x(t),\ y = y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + \sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{2}x + y \end{cases}$$

を考える．初期条件を $x(0) = x_0$ , $y(0) = y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ.

(1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて，与えられた微分方程式を行列 $A$ を使って，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える．$A$ を具体的な行列の形で表せ.

(2) $A$ の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）し，それを $\boldsymbol{p}_1$ , $\boldsymbol{p}_2$ とする.

(3) $\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{p}_1 + c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする．$c_1(0)$, $c_2(0)$ は $x_0$ , $y_0$ を使ってどう書けるか.

(4) $c_1(t)$, $c_2(t)$ が満たす（$t$ に関する）微分方程式を求めよ.

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて，$c_1(t)$, $c_2(t)$ を求めよ．初期条件 $c_1(0)$, $c_2(0)$ は，設問 (3) で得ていることに注意せよ.

(6) $x(t)$, $y(t)$ を $x_0$ , $y_0$ を使って表せ.

(筑波大 2009)　　(m20091310)

**0.138** 行列 $A$ について以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\lambda_3$ を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) 前問で得た固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\lambda_3$ に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$ , $\boldsymbol{l}_2$ , $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$ , $\boldsymbol{l}_2$ , $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) $A$ を対角化する行列 $L$ とその逆行列 $L^{-1}$ を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101309)

**0.139** 4 次正方行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について．以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の行列式を計算せよ.　　(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 $P$ を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111320)

**0.140** 2 次曲線 $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4x - 4\sqrt{3}y - 12 = 0$ を ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 12 = 0$ と表すことにする.
ここで, $A = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ ,　${}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ,　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,　${}^t\boldsymbol{x} = (x \quad y)$
である．この 2 次曲線について以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値 $a_1$, $a_2$ $(a_1 < a_2)$ とその各々に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて作った 2 次の正方行列を $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とする．
${}^tPP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を示せ．

(3) 前問で作った $P$ を使って座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ ，$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を行うと，この 2 次曲線は
${}^t\boldsymbol{x}'\,{}^tPAP\boldsymbol{x}' + 2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}' - 12 = 0$ と書ける．この式を $x'$, $y'$ を使って表せ．

(4) さらに，座標の平行移動 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{c}$ を行って，この 2 次曲線を標準形で表せ．
ここで，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ である．$c_1$, $c_2$ の値も答えよ．

(5) $XY$ 平面上にこの 2 次曲線の概形を描け．さらに，その図中に $x'y'$ 座標軸および $xy$ 座標軸も描き加えよ．

(筑波大 2012)　　(m20121312)

**0.141** $A$ を正方行列，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $(n \geq 2)$ を $A$ の固有値，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一般に，$k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立で，$k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}$ が線形従属ならば，$\boldsymbol{a}_{k+1}$ は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合であることを示せ．

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立であることを示せ．

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なるとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることを，数学的帰納法によって証明せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131307)

**0.142** 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 3y_n - z_n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $x_0 = -5,\ y_0 = 10,\ z_0 = 5$ のとき，$x_n,\ y_n,\ z_n$ を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131311)

**0.143** 3 次元の列ベクトルからなる線形空間を $V^3$ とし，$f$ を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は $V^3$ の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{b}_1$, $f(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{b}_2$, $f(\boldsymbol{a}_3)=\boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する $f$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(4) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

**0.144** 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) (2) で求めた $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を使って行列 $P$ を $P=(\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくとき，その逆行列 $P^{-1}$ は $P$ の転置行列 ${}^tP$ で与えられる．これは $P$ がどのような行列であることによる性質か．また，$P^{-1}$ および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け．

(4) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t)=-A\boldsymbol{r}(t)$ を考える．ここで，$\boldsymbol{r}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ である．

$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とおくとき，$q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ が満たす微分方程式をそれぞれ求めよ．さらに，その一般解を求めよ．

(5) 初期条件が $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と与えられたとき，$x(t), y(t), z(t)$ を求めよ．ここで，$\dot{x}(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$, $\dot{y}(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$, $\dot{z}(t)=\dfrac{dz(t)}{dt}$ である．

(筑波大 2014)　　(m20141311)

**0.145** 実ベクトル空間 $V$ と線形写像 $F: V \to V$ を考える．

(1) $B=\{v_1,\ v_2\}$ が $V$ の基底ならば $B'=\{v_1-v_2,\ v_1+v_2\}$ も基底であることを証明せよ．

(2) $F$ の基底 $B$ に関する表現行列 $A$ と $B'$ に関する表現行列 $A'$ はどのような関係にあるか詳しく述べよ．

(3) $\dim V=2$ とし，$v_1$, $v_2$ を $F$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする．

(a) $v_1$, $v_2$ は一次独立であることを示せ．

(b) $n$ を自然数とし，$F^n$ を $F$ を $n$ 回合成した写像とする．$F^n$ の $B'=\{v_1-v_2,\ v_1+v_2\}$ に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151302)

**0.146** 正方行列 $A$ に対して $\boldsymbol{x}$ をその固有ベクトル，$\lambda$ を対応する固有値とする．次の命題を証明しなさい．

(1) 各 $k=1,2,\cdots$ について，$A^k\mathbf{x}\neq 0$ のとき $A^k\boldsymbol{x}$ は $A$ の固有ベクトルである．

(2) 行列 $A$ が正則なら $\dfrac{1}{\lambda}$ は $A$ の逆行列の固有値である．

(筑波大 2015)　　(m20151313)

**0.147**　$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の独立な固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) $A$ は対角化可能であるかどうかを示せ．もし $A$ が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような $P$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161310)

**0.148**　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) $A$ の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ とする．

(3) $A$ を $P^{-1}AP = D$（ただし，$P$ は直交行列，$D$ は対角行列）として対角化したとき，$P$, $P^{-1}$ および $D$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $P$ に対して，$P^{-1}(A + aE)^n P$ を求めよ．ただし，$E$ は 3 次の単位行列，$a$ は実定数，$n$ は正の整数とする．

以下では $AB = BA$ となる 3 次の正方行列 $B$ について考える．

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ は $B$ の固有ベクトルになることを示せ．

(6) (3) で求めた $P$ に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161316)

**0.149**　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) $A$ を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 $R$，および，その逆行列 $R^{-1}$ を答えよ．

(4) $x,\ y,\ z$ をそれぞれ任意の実数とし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する．

また，$\boldsymbol{u}^T = (x \quad y \quad z)$ とする．このとき，$x,\ y,\ z$ を変数とする関数 $f(x, y, z) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u}$ について考える．

(a) (3) で求めた $R$ を用いて新たな変数 $X,\ Y,\ Z$ を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，$f(x,y,z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の関数 $f(x,y,z) = F(X,Y,Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X,Y,Z)$ を $X,\ Y,\ Z$ の式で表せ．

(b) 任意の $x,\ y,\ z$ に対して，$f(x,y,z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x,y,z) = 0$ を満たす $x,\ y,\ z$ を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171303)

**0.150**　$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

とおく．ただし，$D_x$ は $D_x = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_m)$ なる対角行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置とする．

(1) 0 が $A_x$ の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}\, A_x\, \boldsymbol{y} \geq 0$ を示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171315)

**0.151**　次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$，およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(4) $a_n,\ b_n$ の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

**0.152**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の多項式 $f(A) = A^5 - A^4 + A^3 - A^2 + A - E$ について，以下の問いに答えなさい．ただし，$E$ は単位行列である．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ および固有ベクトルを求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ となるようにとること．

(2) $A$ を $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$ と対角化する行列 $P$，およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(3) $f(A)$ を求めよ．

(4) $|f(A)|$ を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181303)

**0.153**　$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $S$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $S$ の固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) $S$ の固有値に対応する固有ベクトルを並べて得られる直交行列 $P$ を一つ示せ.

(4) (3) の直交行列 $P$ に対して, $P^TSP$ を求めよ. ただし, $P^T$ は $P$ の転置行列である.

(筑波大 2018)　　(m20181309)

**0.154** 二つのメーカー $X$ および $Y$ からなる市場において, 各メーカーのユーザー数を調査したい. 毎年メーカー $X$ のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー $Y$ のユーザーとなり, 一方で, メーカー $Y$ のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー $X$ のユーザーとなる, それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし, ユーザーの総数は変化しない. このとき以下の問いに答えなさい.

(1) ある年におけるメーカー $X$, $Y$ のユーザー数をそれぞれ $x_n$, $y_n$ で表す. このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 $x_{n+1}$, $y_{n+1}$ を二次正方行列 $A$ を使って以下の形で表す. 行列 $A$ を具体的に示しなさい.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ を一つ求めるとともに, $P$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めなさい.

(4) 行列 $A^n$ を求めなさい.

(5) (4) の結果を使って, $n \to \infty$ としたときのメーカー $X$ および $Y$ のユーザー数の比率を求めなさい.

(筑波大 2018)　　(m20181316)

**0.155** 0 と異なる実数 $a$, $b$, $c$ に対して, $\boldsymbol{u} = (a,\ b,\ c)$ とし, $A = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とおく. ただし, ${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の転置とする.

(1) $A$ の階数を求めよ.

(2) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $A$ が対角化可能であるかどうかを判定し, 対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 $P$ を求めよ.

(筑波大 2018)　　(m20181317)

**0.156** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ のすべての固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. なお, 固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ.

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように, 3 次正則行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ の組を求めよ. なお, $D$ の対角要素は大きい順に並べ, $P$ の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ.

(3) 自然数 $n$ に対して, ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A + 2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を $n$ の関数として求めよ. ここで $E$ は単位行列である.

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 $M$ は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 $\alpha, \beta, \gamma$ を定めよ．

(5) (4) における曲面 $M$ に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，$xy$ 平面，$yz$ 平面，$zx$ 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 $R$ をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

**0.157** 次の行列 $A$ について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ は対角化可能か述べよ．また，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191309)

**0.158** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 $A$ の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を求めよ． ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j \ \ (j = 1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 $A$ を $P^{-1}AP = D$ として， 対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき，$P,\ P^{-1}$ および $D$ を求めよ． ただし，$P$ は直交行列，$D$ は対角行列， $D_{ij}$ は $D$ の第 $i$ 行 $j$ 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が，$\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = -e^A\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020)　　(m20201302)

**0.159** ある企業で従業員の喫煙状況を調査したところ， 毎年，非喫煙者（喫煙経験がない者）の $\dfrac{1}{9}$ が喫煙を始め， 喫煙者のうち $\dfrac{1}{3}$ が禁煙する． また，禁煙者（かつて喫煙していて，かつ喫煙を止めた者）

のうち $\dfrac{1}{6}$ は，再び喫煙を始めることが分かった．ただし，ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ $x_0$，$y_0$，$z_0$，その $n$ 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ $x_n$，$y_n$，$z_n$ とし，対象期間中に従業員は変わらないものとする．

(1) 1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数 $x_1$，$y_1$，$z_1$ を $x_0$，$y_0$，$z_0$ で表せ．

(2) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数とその $n$ 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

と書く．1 年後の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_0$$

としたとき，行列 $A$ を求めよ．

(3) 行列 $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}_n$ を $A$ と $\boldsymbol{x}_{n-1}$ で表せ．

(5) $n$ 年後非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数を表す式を

$$\boldsymbol{x}_n = B\boldsymbol{x}_0$$

とする．このとき，行列 $B$ を $A$ を用いて表せ．さらに，行列 $B$ を求めよ．

(6) ある年の非喫煙者，喫煙者，禁煙者の人数はそれぞれ 1458 人，456 人，408 人だった．その 3 年後の禁煙者の人数を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201303)

**0.160** 未知数 $a, b$ を含む次の行列 $A$ に関して設問 (1)-(3) に答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ による一次変換で直線 $2x+3y=1$ が直線 $x+4y=3$ に写るとき，$a, b$ の値を求めなさい．

(2) (1) の条件を満たす行列 $A$ のすべての固有値と，各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい．

(3) (1) の条件を満たす行列 $A$ による一次変換で円 $x^2+y^2=1$ を写した図形の方程式を求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211308)

**0.161** 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で $I$ は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を定めよ．なお，$P$ はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 $A^3$ を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように $A^2$, $A$, $I$ の線形結合で表したときの線形結合係数 $x, y, z$ を定めよ.

（設問 (2) で求めた行列 $P, P^{-1}$ を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，$A$ の固有値はどれも $A$ の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 $C$ を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 $C'$ も，ある係数 $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 $M$ を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

**0.162** $xy$ 平面上における 2 次曲線 $C$

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21 ,$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする．

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ．

(4) $A$ を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 $P$，およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 $C$ を，$x'$, $y'$ を用いて表せ．

(6) $x'$ 軸および $y'$ 軸を，それぞれ $x$, $y$ を用いた直線の式で表せ．

(7) 2 次曲線 $C$ の概形を $xy$ 平面上に描け．ただし，図中には $x'$ 軸と $y'$ 軸を明記すること．

(筑波大 2022)　　(m20221304)

**0.163** 次の 3 次正方行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 $A$ のそれぞれの固有値に対応する，固有空間を張る（固有）ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて，3 次実数空間の正規直交基底を求めよ．

(4) (3) で求めた正規直交基底を並べた行列 $P$ を用いて，行列 $A$ を対角化せよ．

(筑波大 2022)　　(m20221305)

**0.164** (1) $n$ 次正方行列 $A$ について，$A$ の固有値，固有ベクトルの定義を述べよ．

(2) $B$ は 3 行 3 列の行列で，次の (a)(b)(c) を満たしている．

(a) $B$ の固有値は 1 と 2 である．

(b) $B$ の 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる．

(c) $B$ の 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる．

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 $B$ を求めよ．

(埼玉大 1998) (m19981402)

**0.165** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の逆行列を求めなさい．

(2) 次の連立 1 次方程式の解 $x, y, z$ を (1) の結果を用いて求めなさい．

$$\begin{cases} -x - y - z = 3 \\ 4x - 3y - 4z = 2 \\ -4x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(3) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(埼玉大 2003) (m20031409)

**0.166** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ としたとき，$AP = PB$ となる $a, b$ を定めよ.

(4) (3) の関係を用いて $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする.

(埼玉大 2004) (m20041408)

**0.167** (1) 次の行列 $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 行列 $A$ を $P^{-1}AP$ により対角化せよ. 解答では, まず, 行列 $P$ を求めてから $A$ を対角化せよ.

(埼玉大 2005) (m20051402)

**0.168** 関数 $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ に関連した以下の問に答えよ．ただし，$\boldsymbol{M}^T$ は，行列 $\boldsymbol{M}$ の転置を表すものとする．

(1) $f$ は，列行列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 及び，対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表す事が出来る．対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値，および固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．ただし，固有ベクトル（列ベクトル）は，大きさが 1 となるように規格化せよ．

(3) $(x_1, x_2, x_3)^T = y_1\boldsymbol{p}_1 + y_2\boldsymbol{p}_2 + y_3\boldsymbol{p}_3 = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)(y_1, y_2, y_3)^T$ の関係を用いて，関数 $f$ を変数 $y_1, y_2, y_3$ で表せ．ただし，$(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ は $3\times\ 3$ の正方行列の各列が，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{p}_3$ で表される行列であることを表す．

(埼玉大 2006)　　(m20061404)

**0.169** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求め，$A$ を対角化せよ．　(2) 自然数 $n$ に対して，$A^n$ を求めよ．

(埼玉大 2006)　　(m20061407)

**0.170** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 $P$ を 1 つ求めよ.

(埼玉大 2007)　　(m20071409)

**0.171** (1) $\boldsymbol{R}^2$ における一次変換 $f$ は，点 $(1, 2)$ を点 $(0, 3)$ に，点 $(2, 0)$ を点 $(4, 2)$ に移す．このとき，以下の問いに答えなさい.

(a) 一次変換 $f$ を表す行列を求めなさい.

(b) 一次変換 $f$ によって，$y = x - 1$ は，どのような図形に移されるか.

(2) 次の 2 つのベクトルについて考える.

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は，一次従属か一次独立か調べなさい.

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(3) 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について考える.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値をすべて求めなさい.

(b) 固有ベクトルをすべて求めなさい.

(埼玉大 2009)　　(m20091402)

**0.172** (1) つぎの行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & 0 \\ y & 1 & 0 & y \\ z & 0 & 1 & z \\ 0 & w & w & 1 \end{vmatrix}$$

(2) つぎの行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) つぎの行列の固有値, 固有ベクトルの組をすべて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(埼玉大 2010)　　(m20101407)

**0.173** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ と，それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を一組求めよ.

(2) 固有ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ を並べて作った行列を $P = [\,\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\,]$ としたとき，$P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $A^n$ を求めよ.

(埼玉大 2012)　　(m20121404)

**0.174** 行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b & -2 \\ b & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値が $-1, 1, 3$ となる $a$ と $b$ の値を求めよ．ただし，$a > b > 0$ とする.

(2) 固有値が $-1, 1, 3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ を求めよ．ただし，$\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$ は単位ベクトルとする.

(3) 固有ベクトルからなる行列 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \boldsymbol{V}_2 & \boldsymbol{V}_3 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(埼玉大 2013)　　(m20131405)

**0.175** (1) 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め，さらに，それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 次の主張は正しいか，それとも誤りか，正しければ証明し，誤りならば反例を挙げよ.

**(主張)** 「 2 次実正方行列 $B$ が相異なる実数の固有値 $\alpha, \beta$ を持つならば，ある実正則行列 $P$ が存在し，$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる．」

(埼玉大 2014)　　(m20141406)

**0.176** 行列 $A$ が次式であたえられるものとして以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(埼玉大 2015)　　(m20151405)

**0.177** 行列 $A$ が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 $A$ は対角化可能かどうか判定せよ．可能であれば，対角化せよ.

(埼玉大 2017) (m20171405)

**0.178** 行列 $A$ が次式で与えられるものとして以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとする行列 $V = [\,\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{v}_3\,]$ の逆行列 $V^{-1}$ を求めよ.

(4) $\hat{A} = V^{-1}AV$ を求めよ.

(5) $\hat{A}^n$ を求めよ．ただし，$n$ は任意の自然数 $(1,\ 2,\ \cdots)$ とする.

(6) (5) の結果を利用して $A^n$ を求めよ.

(埼玉大 2018) (m20181405)

**0.179** 以下の値を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と，最小固有値に対する固有ベクトル.

(図書館情報大 2000) (m20001611)

**0.180** $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) 実対称行列 $X$ で，次の 2 つの条件（ア）,（イ）の両方を満たすものを求めよ.

（ア）$X^2 = A$ （イ）固有値がすべて正

(図書館情報大 2002) (m20021610)

**0.181** 行列 $A = \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ について

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $A$ の固有ベクトルの 1 次結合で表せ.

(3) 自然数 $n$ に対して，$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021706)

**0.182** 3次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ を一組求めよ．

(2) ベクトル列 $\boldsymbol{u}_n$ を $\boldsymbol{u}_n = A^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ -1+2\varepsilon \\ 2+\varepsilon \end{bmatrix}$，$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定める．ただし，$\varepsilon = 2^{-100}$ とし，$A^0$ は単位行列を表す．このとき，$\boldsymbol{u}_n$ を (1) で求めた $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次結合で表せ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，ユークリッドノルムを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．(2) で与えた $\boldsymbol{u}_n$ について，以下を調べよ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||\boldsymbol{u}_n||$　　(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{||\boldsymbol{u}_{n+1}||}{||\boldsymbol{u}_n||}$　　(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{u}_n}{||\boldsymbol{u}_n||}$

(d) $\left|\left|\boldsymbol{u}_n - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right|\right| \leq 2^{-10}$ なる $n$ の存在の有無．

(茨城大 2007)　　(m20071707)

**0.183** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対し，固有空間の 1 組の基底を求めよ．

ここで，固有値 $\lambda$ の固有空間とは，$\lambda$ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである．

(茨城大 2008)　　(m20081705)

**0.184** 実数 $\alpha$, $\beta$ に対して, 2 次実正方行列 $A$ で

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I = O$$

($I$ は 2 次単位行列, $O$ は 2 次零行列) を満たすものを考える. 但し, $A$ は $I$ の定数倍ではないとする. 以下に各問に答えよ.

(1) $A - \alpha I$ と $A - \beta I$ は, どちらも正則でないことを示せ.

(2) 実数を成分とする 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{y} = (A - \beta I)\boldsymbol{x}$ とおく. このとき任意の $\boldsymbol{x}$ に対して,

$$(A - \alpha I)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

となることを示せ. また, $\alpha$ は $A$ の固有値であることも示せ. さらに, $\boldsymbol{p}_1$ を $\alpha$ に対する固有ベクトルとするとき,

$$(A - \beta I)\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$$

を満たす列ベクトル $\boldsymbol{p}_2$ で, $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\}$ が一次独立となるものが存在することを示せ.

(3) (2) の $\boldsymbol{p}_1$ , $\boldsymbol{p}_2$ を用いて, 2 次正方行列 $P$ を

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1 , \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_2$$

であるように定める. $P^{-1}AP$ および $p^{-1}A^nP$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ を求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101706)

**0.185** $k$ を実数とし, 3 次の正方行列 $A$, 3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし, $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $f$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める. 以下の各問に答えよ.

(1) $k = 1$ のとき, $A$ の固有値, 固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $k = 1$ のとき, $f$ は全単射となることを示せ.

(3) $f$ は全単射とならないための $k$ についての条件を求めよ. また, $f$ がこの条件を満たすとき, $f$ の核 $\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,;\, f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ と $f$ の像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \,;\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ.

(茨城大 2016)　　(m20161701)

**0.186** $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $f, g$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める;

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ.

(1) $f$ が線形写像であることを示し, その表現行列 $A$ を求めよ.

(2) 上で求めた行列 $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) 上で求めた行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(4) $g$ は線形写像でないことを示せ.

(5) $g$ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2018)　　(m20181701)

**0.187** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $A$ の各固有値の固有空間を求めよ. ここで, 固有値 $\lambda$ の固有空間とは, $\lambda$ の固有ベクトル全体と零ベクトルからなるベクトル空間のことである.

(茨城大 2020)　　(m20201705)

**0.188** $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2004)　　(m20041805)

**0.189** 次の行列　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　を考える.

(1) $A$ の固有値を求めなさい.　　(2) $A$ の固有ベクトルを求めなさい.

(山梨大 2007)　　(m20071808)

**0.190** ２次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ とを考える.

ただし，$\theta$ は任意の実数とする.

(1) $A$ の固有値をすべて求めなさい.

(2) $\boldsymbol{V}$ は $A$ の一つの固有ベクトルであることを示し，固有ベクトル $\boldsymbol{V}$ に対する $A$ の固有値を求めなさい.

(山梨大 2009)　　(m20091802)

**0.191** 次の行列 $A=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(山梨大 2009)　　(m20091805)

**0.192** (1) 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルを求める際, 適当な定数を用いてもかまいません.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) 前問で求めた固有ベクトルを列として並べた行列を $P$ とします. 逆行列 $P^{-1}$ を求めなさい.

(3) 前問で求めた $P^{-1}$ を用いて, $P^{-1}AP$ を計算しなさい.

(4) 前問で求めた $P^{-1}AP$ を計算することにより, $A^N$ を求めたい. どのようにしたら求められるか方針を示し, そのあと具体的に計算しなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101806)

**0.193** 行列 $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，次の問に答えなさい.

(1) $\boldsymbol{v}$ は $A$ の固有ベクトルであることを示しなさい. また，その固有値を求めなさい.

(2) $A$ の行列式 $|A|$ を計算し，この式を因数分解した式で表しなさい.

(3) $x,y,z$ を実数とするとき，$x+y+z \geqq 0$ なら $|A| \geqq 0$ を示しなさい.

(山梨大 2011)　　(m20111801)

**0.194** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(山梨大 2011)　　(m20111803)

**0.195** 次の問に答えなさい.

(1) 次の行列 $A$ の固有値とその固有ベクトル空間を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

(2) 上の行列 $A$ は対角化可能か否かを判定し，対角化可能ならば $A$ を対角化しなさい.

(山梨大 2012)　　(m20121804)

**0.196** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．また，$A$ が対角化できるかどうか判定して，対角化できる場合は対角化しなさい.

(山梨大 2013)　　(m20131801)

**0.197** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交し，かつ大きさを 1 とする.

(山梨大 2016)　　(m20161802)

**0.198** $N$ 行 $N$ 列の単位行列を $E$ と表し，$N$ 行 $N$ 列の行列 $A$ を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と定義する．$N$ は 1 以外の自然数であるとして，次の設問に答えよ.

(1) 行列 $A^2$ および $AA^\dagger$ の成分を，$(*)$ にならって示せ．ここで，$\dagger$ は転置行列を表す.

(2) $A^n = A$ を満たす 1 以外の最小の自然数 $n$ を求めよ.

(3) $e_n$ をその第 $n$ 成分が 1，それ以外の成分は 0 である $N$ 次元空間の基本ベクトルとする $(n = 1, 2, \cdots, N)$．このとき，$Ae_n$ および $A^\dagger e_n$ を基本ベクトルを用いて表せ.

(4) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(山梨大 2016)　　(m20161806)

**0.199** $\theta$ と $\phi$ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ.

(1) 行列の積 $AB$ を計算し，その結果を行列 $A$, $B$ と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 $A$ により $xy$ 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，$\theta$ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018) (m20181802)

**0.200** $a > 0$ をパラメータとした行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさを 1 とする．さらに $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を求めよ．ここで $n$ は任意の自然数である．

(山梨大 2018) (m20181807)

**0.201** 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ が逆行列を持たないことを示せ．

(2) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(山梨大 2019) (m20191807)

**0.202** 次の行列 $A$ を考えます．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2020) (m20201801)

**0.203** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ について，(a)〜(c) に答えよ．

(a) 行列 $A$ の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 $A$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(c) 行列 $A$ を対角化する行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．ただし，導出過程も示すこと．

(山梨大 2021) (m20211803)

**0.204** 以下の式を考える．

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

ここで，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$,

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ とする．

(1) 行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ を求めよ.

(3) 上式を満たす $\mathbf{X}$ を求めよ.

(山梨大 2023) (m20231801)

**0.205** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(信州大 2005) (m20051902)

**0.206** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め, 対角化せよ. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(信州大 2006) (m20061901)

**0.207** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) $A$ の行列式を求めよ. (2) $A$ の逆行列を求めよ.

(3) $A$ の固有値とその固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2007) (m20071901)

**0.208** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値を求めよ. (2) $A$ の固有ベクトルを求めよ. (3) $A$ を対角化せよ.

(信州大 2008) (m20081902)

**0.209** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) $A$ と $B$ が可換であることを示せ.

(2) $A$ の固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し, $B\boldsymbol{v}$ も $A$ の固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) $A, B, C$ それぞれの固有値と固有ベクトルを求めよ.

(信州大 2012) (m20121902)

**0.210** 次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で, 最小の固有値に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(信州大 2013)　　(m20131904)

**0.211** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) $A$ が固有値 1 と，それとは異なる実数の固有値をもつための $a$ の条件を求めよ．

(2) 固有値 1 に属する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(信州大 2015)　　(m20151905)

**0.212** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2a & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の最大の固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(信州大 2017)　　(m20171904)

**0.213** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．ただし，$a$, $b$ は実定数で，$b > 0$ とする．

(1) $A$ の固有値がすべて正になる条件を $a$, $b$ を用いて表せ．

(2) $A$ の固有ベクトルでその成分がすべて正となるものを 1 つ求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181904)

**0.214** 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ここで $i^2 = -1$ である．

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(新潟大 2001)　　(m20012007)

**0.215** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1$ , $\lambda_2$ ( $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ) とし，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{v}_1$ , $\mathbf{v}_2$ とする．

(1) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ , $\mathbf{v}_1$ , $\mathbf{v}_2$ を求めよ．

(2) 正の実数 $a, b$ をとり，

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と定める．このとき $a, b$ の選び方によらずに極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ が定まることを示し，その値 $L$ を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022005)

**0.216** 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ とし，$n \geqq 1$ に対して，

$$\begin{cases} x_n &= \phantom{-}5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する．このとき，一般項 $x_n$ と $y_n$ を求めよ．

(新潟大 2003)　　(m20032004)

**0.217** 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ($\theta$は実数) について, 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように $\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) 曲線 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12 = 0$ の概形を描け.

(新潟大 2004)　　(m20042005)

**0.218** (1) 整数 $a$ に対して，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．また，$A$ の逆行列の成分がすべて整数であるとする．このとき，$a$ の値と $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) 実数 $b$, $c$ に対して，行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & b \\ c & 4 \end{pmatrix}$ は，異なる固有値をもつとする．さらに，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$b$ と $c$ の値および $B$ の固有値を求めよ．

(新潟大 2006)　　(m20062004)

**0.219** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2010)　　(m20102008)

**0.220** 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有方程式を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値を全て求めよ.

(3) それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122002)

**0.221** 実行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ が固有値をただ 1 つ持つための条件を求めよ．また，そのときの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122007)

**0.222** 行列 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ の固有値を $\alpha_1$, $\alpha_2$ とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\nu_1$, $\nu_2$ とする． また，行列 $T = [\nu_1 \quad \nu_2]$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ となることを示せ．ただし，ベクトル $T^{-1}$ はベクトル $T$ の逆行列である．

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ について，$\boldsymbol{c} = A\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = T\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{c} = T\boldsymbol{q}$ とするとき，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ となることを示せ.

(3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ のとき，$\alpha_1 < \alpha_2$ の値を求めよ．また，$\nu_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\nu_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ のとき，ベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の値を求め，$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$ となっていることを確かめよ.

(新潟大 2014)　　(m20142005)

**0.223**　行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．つぎに，固有ベクトルを使って $A$ を対角化せよ.

(新潟大 2015)　　(m20152003)

**0.224**　行列 $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値を求め，各固有値に対応する 2 つの固有ベクトルの交角 $\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を示せ

(新潟大 2016)　　(m20162007)

**0.225**　次のような行列 $C$ について考える．ここで $i^2 = -1$ である.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $C$ の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 $C$ の固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること.

(3) 行列 $C$ を対角化した行列を $D$ とする．行列 $D$ を求めよ.

(4) $D^n$ を計算し，$C^n$ を求めよ.

(新潟大 2018)　　(m20182007)

**0.226**　行列 $A$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値を全て求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対応する，長さが 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 $A$ を対角化せよ.

(新潟大 2019)　　(m20192004)

**0.227**　$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，$A^2 = A$ が成り立っているとき，以下の問に答えなさい.

(1) $x, y$ を求めなさい.

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(長岡技科大 2011)　　(m20112102)

**0.228** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 $P$ を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}$ を求めなさい.

(3) 自然数 $n$ について，$A^n$ を求めなさい.

(長岡技科大 2017)　　(m20172101)

**0.229** $a$ を 1 でない実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする．下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次直交行列 $P$ を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182101)

**0.230** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有多項式 $|\,tE - A|$ を求めなさい．ただし，$E$ を 3 次単位行列とする.

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(長岡技科大 2020)　　(m20202101)

**0.231** 実数 $t$ の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える．また，$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 $P$ を一つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) $P$ を前問 (2) におけるものとし，実数 $t$ の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，$(*)$ を $y_1$, $y_2$ についての連立微分方程式に書き換えなさい．また，$y_1$, $y_2$ を求めなさい.

(4) $x_1$, $x_2$ を求めなさい.

(長岡技科大 2021)　　(m20212102)

**0.232** 平面上の直線 $y = 2x$ を $\ell$ とする．任意の点 $P$ に対して，$P$ を通る傾き 1 の直線と $\ell$ との交点を $P'$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) $P(3,\ 2)$ に対する $P'$ の座標を求めなさい．

(2) $P(X,\ Y)$ に対する $P'$ の座標を $X$ と $Y$ を用いて表しなさい．

(3) $P$ を $P'$ に移す一次変換を表す行列 $A$ を求めなさい．

(4) 前問 (3) の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(長岡技科大 2022)　　(m20222101)

**0.233** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$，$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ となる直交行列 $P$ と $\alpha, \beta, \gamma$ を求めよ．

(金沢大 2000)　　(m20002203)

**0.234** $A = \begin{pmatrix} 16 & 7 & -29 \\ -12 & -4 & 22 \\ 6 & 3 & -11 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ とする．
次の問いに答えよ．

(1) $v = au_1 + bu_2 + cu_3$ をみたす定数 $a, b, c$ を求めよ．

(2) $u_1, u_2, u_3$ は $A$ の固有ベクトルであることを示し, 対応する固有値を求めよ．

(3) 自然数 $n$ に対して $A^n v$ を求めよ．

(金沢大 2004)　　(m20042203)

**0.235** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ -a & 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ が固有値 1 をもつときの $a$ 値を求めよ．

(2) (1) で求めた $a$ について, 行列 $A$ の固有値 1 に対する固有ベクトルを求めよ．

(金沢大 2005)　　(m20052201)

**0.236** 行列 $L$ を

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します. 行列 $L$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(金沢大 2005)　　(m20052209)

**0.237** $A$ を任意ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ を満たす $3 \times\ 3$ 行列とする．

(1) $A$ を求めよ.　　　　　(2) $A^3$ を求めよ.

(3) $A$ の 3 つの固有値及び各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(金沢大 2007)　　(m20072201)

**0.238** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ とする．次に答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $n \to \infty$ のとき，$3^{-n}A^n$ はどのような行列に近づくか.

(金沢大 2007)　　(m20072204)

**0.239** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ に対応する固有ベクトルで，その第 1 成分を 1 としたものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2 + c\boldsymbol{u}_3$ を満たす定数 $a, b, c$ を求めよ.

(3) 自然数 $n$ に対して，$A^n\boldsymbol{u}_1$ および $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(金沢大 2008)　　(m20082201)

**0.240** 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $A$ のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ をひとつ求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092204)

**0.241** 任意の $x, y, z$ について, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる $3\times\ 3$ 行列 $A$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) $A$ を求めよ.

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 $P$ を求めよ. ただし, ${}^tP$ は $P$ の転置行列である.

(金沢大 2010)　　(m20102201)

**0.242** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(金沢大 2010)　　(m20102213)

**0.243** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ $(\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) ${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 9 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ をみたす直交行列 $P$ を 1 つ求めよ．ただし，${}^tP$ は $P$ の転置行列である．

(3) ${}^tP \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．また自然数 $n$ に対して，$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112201)

**0.244** 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問い (1)〜(3) に答えよ．

(1) $A$ が固有値 3 と 1 をもつことを確かめ，固有値 3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と固有値 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を 1 つずつ求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{y}$ に対して，$\boldsymbol{z} - A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{z}$ を 1 つ求めよ．

(3) (1), (2) の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ を用いて行列 $P = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ をつくるとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132201)

**0.245** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) $\det A = 0$ とする．

(a) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ を求めよ．

(b) $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ とする．$\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$ を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132206)

**0.246** 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．$i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ に対応する固有ベクトルでその第 1 成分が 1 のものを $\boldsymbol{u}_i$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $i = 1, 2, 3$ に対して，$\lambda_i$ および $\boldsymbol{u}_i$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ とし，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n\boldsymbol{v}$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{z_n}$ を求めよ．

(金沢大 2014)　　(m20142201)

**0.247** 任意の $x, y, z$ について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+y+4z \\ -4x+3y+2z \\ -x+y+z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 $A$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) $A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $p_1, p_2, p_3$ を求めよ．

(3) $B$ を $A$ の逆行列，$n$ を自然数とするとき，$B^n$ の固有値を $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$, $\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

**0.248** 行列 $A$ を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 $P$ を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．$P$ と $A'$ を求めなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152211)

**0.249** $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で，$(x, y)$ 平面に図示せよ．

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 $A$ を用いて，$(x\quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る．$A$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），$v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a > 0$, $c > 0$ と選ぶ．

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ．

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき，$(x, y)$ 平面上の図形は，反時計回りに $q$ ラジアン回転すると $(X, Y)$ 平面上の図形に移る．$q$ を求めよ．また，上記の図形を $(X, Y)$ 平面上で図示せよ．

(5) $(*)$ を $(x, y)$ 平面上で図示せよ．

(金沢大 2016)　　(m20162234)

**0.250** 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の各小問に答えよ．

(1) $P$ の固有値をすべて求めよ．またそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．ただし固有ベクトルの成分は整数値に選べ．

(2) $\boldsymbol{v}$ を (1) で求めた固有ベクトルの線形結合として表せ．

(3) $P^n\boldsymbol{v}$ を求めよ．さらに極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n+1}\boldsymbol{v}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{2n}\boldsymbol{v}$ を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162237)

**0.251** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $I$ を 3 次の単位行列とするとき，$A$ の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ を求めよ．

(3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ．

(金沢大 2017)　　(m20172206)

**0.252** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $A$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) ある行列 $V$ を用いて，行列 $A' = V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる．$V$ と $A'$ を求めなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172212)

**0.253** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，$I$ は 3 次の単位行列，$O$ は 3 次の零行列である．

(1) $A$ の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2) $A$ の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 $a, b, c$ を求めよ．

(4) 行列 $A^{2018}$ を計算せよ．

(金沢大 2018)　　(m20182206)

**0.254** (a) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(b) 関数 $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$ は任意の実数 $x, y$ に対して $f(x, y) \geq 0$ を満たすことを示しなさい．

(金沢大 2021)　　(m20212214)

**0.255** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(2) $\lambda_1, \lambda_2$ に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ．

(4)　$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 $k_1, k_2$ を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

**0.256**　$2\times\ 2$ 行列 $\sigma_1$ が $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\sigma_1$ の固有値と大きさが 1 の直交固有ベクトルを求めよ．

(2)　$\sigma_1$ を対角化する変換行列 $P$ を求め，$\sigma_1$ を対角化せよ．

(3)　対角化した行列を $\sigma_3$ とするとき，$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = 2i\sigma_3$ および $\sigma_2\sigma_2 = I$ を満たす行列 $\sigma_2$ を求めよ．ここで，$i$ は虚数単位，$I$ は $2\times\ 2$ の単位行列である．

(富山大 2003)　　(m20032306)

**0.257**　行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1)　行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)　行列 $A$ は対角化可能か.

(3)　行列 $A^3$ は直交行列を用いて対角化可能か.

(富山大 2003)　　(m20032307)

**0.258**　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1)　行列 $A$ の行列式を求めよ.

(2)　行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042311)

**0.259**　行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052308)

**0.260**　$\theta$ を任意の実数，$I$ を単位行列，$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ として，行列 $A$ が $A = (\cos\theta)I + (i\sin\theta)\sigma_1$ で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ここで $i$ は虚数単位とする.

(1)　${\sigma_1}^2$ を計算せよ.

(2)　$A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(3)　$\sigma_2$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\nu$ を求めよ.

(4) $A\sigma_2 A^{-1}$ を計算して $\sigma_2$ を対角化するように $\theta$ を決定せよ．ただし，$\theta$ の範囲を $0 < \theta < \pi/2$ とする．また，このときの $\theta$ の値を用いた行列 $A$ により，$\sigma_2$ の固有ベクトル $\nu$ を変換したベクトル $u = A\nu$ を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082303)

**0.261** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A^2$ を求めよ．

(2) $A$ の行列式を求めよ．

(3) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(4) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(富山大 2009)　　(m20092303)

**0.262** (1) 正方行列 $A, P, D$ の間に $P^{-1}AP = D$ の関係があるとき，$A^n$（$n$ は自然数）を $P$, $P^{-1}$, $D$, $n$ を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち, 大きさが 1 の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする. ただし，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で，$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする. このとき，$Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ.

(3) (1), (2) の結果をもとに, $B^{10}$ を求めよ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする. なお, 必要ならば $2^{10} = 1024$, $3^{10} = 59049$, $5^{10} = 9765625$ の値を用いよ.

(富山大 2010)　　(m20102304)

**0.263** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする．このとき

(1) $A$ の行列式を求めよ．

(2) $A$ のゼロではない固有値及びゼロではない固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた 2 つの固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列 $P$ の逆行列 $P^{-1}$，及び $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(富山大 2012)　　(m20122304)

**0.264** 次の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ は 2 行 2 列の実数行列，$\boldsymbol{X}$ は 2 行 1 列の実数行列とする．また，${}^t\boldsymbol{X}$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の転置行列を意味する．

(1) $|\boldsymbol{A}| < 0$ のとき，$\boldsymbol{A}$ の固有値が異符号の実数であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{B}$ の成分がいずれも正であるとする．このとき，$\boldsymbol{B}$ の固有値が実数であるとしても正とは限らないことを例を挙げて示せ．

(3) $\boldsymbol{C}$ が対角行列で対角成分がいずれも正であるとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ．

(4) $\boldsymbol{D}$ が 2 つの異なる正の固有値をもち，それらの固有値に対応する固有ベクトルが直交しているとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ．必要ならば，直交行列の逆行列と転置行列が等しくなる性質を利用せよ．なお，直交行列とは，互いに直交する大きさが 1 の列ベクトルからなる正方行列である．

(富山大 2017)　　(m20172304)

**0.265** (1) 正方行列 $A, P, D$ の間に $AP = PD$ の関係があるとき，$A^n$ を $P$, $P^{-1}$, $D$ および $n$ を用いて表せ．ただし $n$ は自然数である．また，$P$ は正則行列であるとする．

(2) 次の行列 $B$ は相異なる 3 つの実数の固有値を持つ．これらの固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) (2) の行列 $B$ において，固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ の各々に対応する任意の固有ベクトルを

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} q_{1,1} \\ q_{2,1} \\ q_{3,1} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} q_{1,2} \\ q_{2,2} \\ q_{3,2} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} q_{1,3} \\ q_{2,3} \\ q_{3,3} \end{pmatrix}$$

とし，行列 $Q$ を

$$Q = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,1} & q_{3,2} & q_{3,3} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる．この性質を利用し，(1), (2) の結果をもとに $B^n$ を求めよ．

(富山大 2019)　　(m20192304)

**0.266** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ がある．

(1) 行列 $A$ の固有値を $\lambda$ とすると，$\lambda$ は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ を満たさなければならないことを示しなさい．

(2) 前問の行列 $A$ の固有値を求めなさい．

(3) その行列 $A$ の固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002416)

**0.267** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(福井大 2001)　　(m20012419)

**0.268** 次の行列について以下のことを答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) ベクトル $v = (1, 2)$ としたときの，$Av$ を求めなさい．

(2) $A$ の行列式 $|A|$ を計算しなさい．

(3) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(4) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2001) (m20012420)

**0.269** 次の 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ からなる行列 $A$ がある.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ のランク（階数）はいくらか.

(2) 次のベクトルと行列の積を計算しなさい.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $A$ から得られる 2 つの固有ベクトルを求めなさい.

(4) 正規化された固有ベクトルを書きなさい.

(5) 正規化された 2 つの固有ベクトル（列ベクトル）からなる 2 行 2 列の正方行列 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい.

(6) 列ベクトルを $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とする. ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb})$ を計算しなさい. ただし, ${}^t(\boldsymbol{Pb})$ は $\boldsymbol{Pb}$ の転置を意味している.

(7) ${}^t(\boldsymbol{Pb})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Pb}) = \dfrac{3}{2}$ が表す図形を図 $B$ に描きなさい. そして, その図形がどのような形状か詳しく説明しなさい.

(福井大 2004) (m20042419)

**0.270** 次の行列に対応する固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2005) (m20052408)

**0.271** 行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する設問である.

(1) $A$, $\lambda$, $\boldsymbol{x}$ の間に成り立つ関係を示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(3) (2) の解に対応する固有ベクトルを一つ示せ.

(福井大 2006) (m20062422)

**0.272** 次の行列 $\boldsymbol{B}$ がある. 以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}^3$ を計算せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{B}$ の絶対値の小さい方の固有値に対応する固有ベクトルとする時, $\boldsymbol{B}^{10}\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(福井大 2008) (m20082405)

**0.273** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を $\lambda$, 固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする時, 以下の問いに答えよ.

(1) $A, \lambda, \boldsymbol{x}$ の間に成立する関係を示せ.

(2) 固有値を求めよ.

(3) 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2008) (m20082420)

**0.274** 次の行列 $C$ の固有値を求めよ．また，固有値の中で負の値をもつ固有値に対する固有ベクトルも求めよ.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(福井大 2009) (m20092413)

**0.275** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $A$ は対角化可能か．可能ならば対角化せよ.

(福井大 2009) (m20092415)

**0.276** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ がある.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．$n$ は整数とし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外の $\boldsymbol{x}$ を求めること.

(福井大 2010) (m20102409)

**0.277** $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

次に, 得られた固有値の中で負の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2010) (m20102414)

**0.278** 座標変換によって，曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) ２つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} \end{pmatrix}$ を表せ.

(例：列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ という行列を表せる.)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である.

(5) $\boldsymbol{x}$ を$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である.

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^2 + xy + y^2 = 1$ を $\alpha X^2 + \beta Y^2 = 1$ の形に変換せよ．ここで，$\alpha$ と $\beta$ は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である.

(福井大 2011)　　(m20112407)

**0.279** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，中間の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2011)　　(m20112420)

**0.280** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最大の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2012)　　(m20122421)

**0.281** 次の行列の固有値を求め，最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(福井大 2013)　　(m20132424)

**0.282** 次の 3 つの列ベクトルがある.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ある行列 $\boldsymbol{A}$ は 3 次正方行列である．この行列 $\boldsymbol{A}$ と前述のベクトルは，次の関係を満たすものとする.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = 2\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = 2\boldsymbol{x}_2 + 2\boldsymbol{x}_3$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 + 3\boldsymbol{x}_3$$

ベクトル $\boldsymbol{y}$ が実数 $s$ と $t$ によって次のように $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ の一次結合で表される.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + s\boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{x}_3$$

また，行列 $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ からなり $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ である

以下の問に答えよ．最終の答えだけでなく途中経過も記述せよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ．

(2) そのベクトル $\boldsymbol{y}$ が行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルとなるとき，実数 $s$ と $t$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対応する固有値を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{AB}$ を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142410)

**0.283** 以下の問いに答えよ．

(1) 下記に示す行列の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有ベクトルが一次独立であることを示せ．

(3) (1) で与えられた行列を対角化せよ．（導出過程を示すこと）

(福井大 2014)　　(m20142414)

**0.284** 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142418)

**0.285** 以下の与える行列 $A$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について， 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $A$ の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする．行列 $A$ を対角化する行列 $U$ を求めよ．

(3) 行列 $U$ を用いて対角化した行列 $A$ の対角行列 $\Sigma$ を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142427)

**0.286** 次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$ ……①

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる．

ここで，$a_{11}$, $a_{22}$, $S$ は定数である．

$$1 = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を $X$ と $Y$ の方程式に変換せよ．

(福井大 2015)　　(m20152409)

**0.287** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2015)　　(m20152422)

**0.288** 次の行列について，以下の問いに答えよ．

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ

(2) 大きさが 1 となるように正規化した固有ベクトルを求めよ．

(3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて対角化せよ．

(福井大 2016)　　(m20162406)

**0.289** 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162417)

**0.290** 次式に与えられる行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を $\lambda$ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の形に表せ．

(2) $A$ の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．固有値 $\lambda_n$ に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\, \boldsymbol{u}_2\, \boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，$P$ が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは $A$ が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) $P^{-1}$ を求めよ.

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ.

(福井大 2016)　　(m20162419)

**0.291** 以下の行列 $A$ に関して，次の問いに答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式を計算しなさい.

(2) 逆行列を求めなさい.

(3) 固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(福井大 2016)　　(m20162420)

**0.292** (1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

は 3 個の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を持つ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ をそれぞれ 1 列目，2 列目，3 列目に持つ行列を $P$ とする. $P$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めよ.

(福井大 2018)　　(m20182422)

**0.293** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182432)

**0.294** 行列 $\boldsymbol{A}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関して以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 及び対応する固有ベクトル $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}_3$ を求めよ．固有値は $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ とし，固有ベクトルは大きさを 1 にせよ.

(2) $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルの線形結合で表せ.

(3) $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{b}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ を求めよ.

(福井大 2020)　　(m20202408)

**0.295** 以下の行列 $B$ を考える．$B$ の固有値の 1 つは 3 である．この固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．ただし，固有ベクトルを規格化する必要はない．考え方と計算過程を明記すること.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202420)

**0.296** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2020) (m20202429)

**0.297** 正方行列 $A$ がある．ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ が行列 $A$ の固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトルである ($A\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}$) とき，以下の問いに答えよ．ただし，$I$ は $A$ と同じ次数の単位行列とする.

(1) ベクトル $-\boldsymbol{\varphi}$ も行列 $A$ の固有値 $\lambda$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A+I$ の固有値 $\lambda+1$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ は行列 $A^2$ の固有値 $\lambda^2$ に属する固有ベクトルであることを示せ.

(福井大 2021) (m20212413)

**0.298** 以下の行列 $A$，およびベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を考える．$a$ を実数とし，以下に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{u}$ を計算することにより，$\boldsymbol{u}$ は $a$ の値によらず $A$ の固有ベクトルであることを示せ．また 固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対する固有値を求めよ.
（注）固有方程式を使う必要はない.

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}$ が $A$ の固有ベクトルとなるように，$a$ の値を定めよ．また，そのときの固有値（固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対する固有値）を求めよ.
（注）固有方程式を使う必要はない.

(3) $a=0$ のとき，$A$ の固有値を全て求めよ.

(福井大 2021) (m20212416)

**0.299** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(福井大 2021) (m20212425)

**0.300** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値の中で，最小の値を持つ固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

( 福井大 2022) (m20222408)

**0.301** 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{0}$ は $n$ 次元ゼロベクトルを表し，$\boldsymbol{v}^{\top}$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す.

(1) 次の行列 $A_1$, $A_2$ の行列式をそれぞれ求めよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 問 (1) の $A_1$ を係数行列とする以下の連立一次方程式の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，$x_1$, $x_2$, $x_3$ は実数とする．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす $n$ 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}$，および $n$ 次の実対称行列 $A_3$ を用いて

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^\top A_3 \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}}$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u})$ の最大値は $A_3$ の最大固有値に一致し，そのときの $\boldsymbol{u}$ は $A_3$ の最大固有値に対応する固有ベクトルであることが知られている．$A_3$ が次の行列であるとき，この事実を使って $f(\boldsymbol{u})$ の最大値，および対応する $\boldsymbol{u}$ をひとつ求めよ．

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ を満たす $n$ 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対し，行列 $A_4$ を次のように定める．

$$A_4 = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^\top$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ は $A_4$ の固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{c}$ に対応する固有値を求めよ．

(福井大 2022) (m20222425)

**0.302** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．また，直交行列を用いて $A$ を対角化せよ．

(静岡大 2004) (m20042506)

**0.303** (1) ベクトルの組 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ．

(2) 次のベクトルの中から 1 次独立なベクトルの組を選び, 残りをそれらの 1 次結合で表せ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2005) (m20052503)

**0.304** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ を直交行列で対角化せよ.

(3) $n$ を自然数とするとき, $A^n$ を求めよ.

(静岡大 2010) (m20102504)

**0.305** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) の行列 $A$ を直交行列を用いて対角化せよ．このとき，用いた直交行列も明記せよ.

(3) 2 次曲面の方程式 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 1$ を標準形に変えよ.

(静岡大 2013) (m20132502)

**0.306** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えなさい.

(1) ランク（階数）を求めなさい.

(2) 固有値をすべて求めなさい．また，そのうち 0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(静岡大 2013) (m20132510)

**0.307** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2015) (m20152504)

**0.308** 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式の値，固有値および固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2001) (m20012611)

**0.309** 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 1$ によって表される $R^2$ 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

(1) 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = (x_1, x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 $A$ を求めよ.

(2) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) ２次の直交行列 $P$ を使って，$PAP^T$ が対角行列（$\Lambda$ とする）となるようにしたい．ただし，$^T$ は, 転置行列を表す．直交行列 $P$ とこの対角行列 $\Lambda$ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない，$(y_1, y_2)$ 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい.

(5) (4) の図形の中に，$(x_1, x_2)$ 座標の座標軸を書き入れなさい.

(岐阜大 2005) (m20052613)

**0.310** 次の 3 つの行列について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $\det A,\ \det B,\ \det C$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ のすべての固有値，および，各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $C$ の階数 (rank $C$) を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062613)

**0.311** 行列 $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして表記せよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072610)

**0.312** 次の行列 $A$ に対して以下の問いに答えよ.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の二つの固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ を対角化する行列 $P$，つまり，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような $P$ を求めよ.

(3) 次の連立微分方程式を解け.　$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ,　　$x_1(0) = 1$ , $x_2(0) = 2$

(岐阜大 2007)　　(m20072612)

**0.313** 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.　$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(岐阜大 2007)　　(m20072622)

**0.314** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2007)　　(m20072625)

**0.315** 次の 2 行 2 列の行列 $A$　　$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　　について，次の問いに答えよ.

(1) この行列 $A$ の固有値 $\lambda$ を求めよ.

(2) 上記 (1) の固有値 $\lambda$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{X}$ を求めよ.

(岐阜大 2008)　　(m20082601)

**0.316** 次の 3 次行列 $A$ について (1)〜(3) に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めなさい.

(2) $A$ の各固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(3) $A$ を対角化する正則行列 $P$ と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(岐阜大 2008)　　(m20082607)

**0.317** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ がある.

(1) $|A|$ の値を求めよ.　　(2) $A$ の逆行列を求めよ.

(3) $A$ の固有値を求めよ.　　(4) $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(岐阜大 2008)　　(m20082610)

**0.318** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2008)　　(m20082617)

**0.319** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $B = A^2 - 4A - 4E$ とするとき, 行列の積 $BA$ が零行列になることを示せ. ただし, $E$ は 3 次の単位行列とする.

(3) $xyz$ 空間の点 $P = (x, y, z)$ から, $XYZ$ 空間の点 $Q = (X, Y, Z)$ への一次変換 $T$ を行列 $A$ を用いて次のように定める.

$$T\ :\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$xyz$ 空間上の任意の点 $P$ は, 変換 $T$ によって $XYZ$ 空間内の同一の平面 $H$ 上の点 $Q$ にうつる. その平面 $H$ の方程式を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102603)

**0.320** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ およびベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) $\boldsymbol{b}$ を $A$ の固有ベクトルの線形結合で表せ.

(3) $A^5\boldsymbol{b}$ を求めよ.

(岐阜大 2011)　　(m20112604)

**0.321** 次の行列 $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(岐阜大 2012)　　(m20122604)

**0.322** (1) 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 $P$ を 1 つ求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$,

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \qquad (n \geqq 1)$$

で定義する．このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列 $B$ を求めよ．

(4) 一般項 $a_n$ を求めよ．

(岐阜大 2014) (m20142602)

**0.323**

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a+b & 1+a-b & b \\ b & -b & 1+b \end{pmatrix}$$

とする．ただし，$a$, $b$ は実数とする．

(1) $\det A$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は．$A$ の固有ベクトルであることを示せ．

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(4) $A$ が対角化可能となる $a$, $b$ の値をすべて求めよ．

(岐阜大 2022) (m20222601)

**0.324** 式（イ）,（ロ）,（ハ）に関して各問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の $A$ の行列式を求めよ．

(2) 式（ロ）の固有値 $\lambda$ を求めよ．

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) $x, y, z$ で表される 2 次曲面（ハ）を $x, y, z$ に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す．

(豊橋技科大 1999) (m19992708)

**0.325** 次の対称行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，$A$ を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

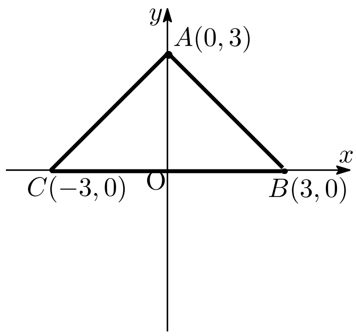
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000) (m20002708)

**0.326** 行列 $F$ によって点 $(x, y)$ を点 $(x', y')$ に移す次の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この 1 次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.




(1) 行列 $F$ を求めよ.

(2) 行列 $F$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) 下図の点 $A, B, C$ に対して, 行列 $F$ による 1 次変換を $n$ 回行って移る点をそれぞれ $A_n, B_n, C_n$ とする. $n = 1$ および $n = 2$ のとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.

(4) 三角形 $A_nB_nC_n$ の面積を $S_n$ とするとき, $S_n$ を $n$ を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042707)

**0.327** 次の行列について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & a \\ 0 & a & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A| = 6$ のとき, $a$ の値を求めよ.

(2) $a = 1$ のとき, $A$ の転置行列 ${}^tA$ と $B$ の積 ${}^tA \cdot B$ を求めよ.

(3) $B$ の逆行列 $B^{-1}$ を求めよ.

(4) $B$ の固有値をすべて求めよ.

(5) (4) で求めた固有値のうち最大のものに対する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは単位ベクトルとする.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072701)

**0.328** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ, ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ.

(2) 各固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき, $a$ と $b$ を求めよ.

(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて, 行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する. このとき, $\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ.

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ.

(5) 自然数 $n$ に対して, $\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(豊橋技科大 2008)　　(m20082702)

**0.329** 行列要素がすべて実数である正方行列 $A$ に，0 ではない実数である一つの固有値 $\mu$ があるとする．一つの固有値には少なくとも一つの固有ベクトルがある．そこで，ベクトル $\boldsymbol{y}$ を固有値 $\mu$ に対応する固有ベクトルとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ において，ベクトルの各成分をそれに共役な複素数に置き換えて得られるベクトルを $\boldsymbol{x}^*$ と表すことにする．ベクトル $\boldsymbol{y}^*$ は固有値 $\mu$ に対応する固有ベクトルであることを示せ．さらに，固有値 $\mu$ に対応する固有ベクトルで，ベクトルの成分がすべて実数であるベクトルが少なくとも一つはあることを示せ．

(豊橋技科大 2012)　　(m20122703)

**0.330** 次の行列 $A, B$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の逆行列を求めよ．

(2) 行列 $B$ の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 $B^2$ の固有値をすべて求めよ．

(4) 行列 $B^5$ の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152702)

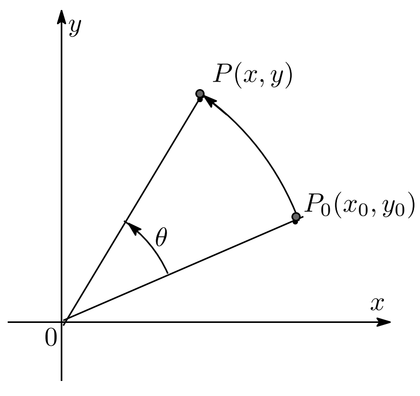
**0.331** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ．

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ．また，最も小さい固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182703)

**0.332** 図のように，$xy$ 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 $O$ のまわりに $\theta$ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $xy$ 平面上の点を $x$ 軸方向に $a$ 倍，$y$ 軸方向に $b$ 倍する変換行列 $B$ を $a$ と $b$ を用いて表せ．

(2) $xy$ 平面上の点を原点 $O$ のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 $x$ 軸方向に $a$ 倍，$y$ 軸方向に $b$ 倍し，最後に原点 $O$ のまわりに $\theta$ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 $C$ を $a$, $b$, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 $D$ の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 $C$ が変換行列 $D$ に等しいとき，$a$, $b$ および $\theta$ の値を求めよ．ただし，$\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

**0.333** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 $A$ の固有ベクトルであるであることを示せ．また，$\boldsymbol{v}$ に対応する $A$ の固有値を求めよ．

(2) 3 次元空間内のある平面 $\alpha$ を考え，その上の任意の点 $P$ を $(x, y, z)$ とする．この $\alpha$ がベクトル $\boldsymbol{v}$ に垂直で，かつ 3 次元空間の原点を通るとき，この平面 $\alpha$ を表す式を，$x, y, z$ を用いて求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して，線形変換 $f$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与える．このとき，(2) で求めた平面 $\alpha$ 上の任意の点 $Q$ を $f$ によって移動した点 $Q'$ も平面 $\alpha$ 上の点となることを示せ．

(豊橋技科大 2022)　　(m20222701)

**0.334** 未知関数 $x(t)$，$y(t)$ に関する次の連立微分方程式 (E) を考える．

$$(E) \qquad \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) 連立微分方程式 (E) を解け．

(名古屋大 1999)　　(m19992803)

**0.335** 3 次元空間内の原点を $O$，点 $A$ の位置ベクトルを $a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ で表す．

点 $A$ を通り，方向ベクトルが $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$ $(\neq 0)$ である直線 $l$ が与えられている．

(1) 直線 $l$ を表す方程式を書け.

(2) 空間内に位置ベクトル $p=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ である点 $P$ が任意に与えられたとき，点 $P$ に最も近い直線 $l$ 上の点を $Q$ とする．点 $Q$ の位置ベクトル $q=\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ を，$q=Lp+b$ の形で表せ.

ただし，$L,b$ は直線 $l$ だけで定まり，$p,q$ には無関係な行列およびベクトルをそれぞれ表す.

(3) 行列 $L$ の階数を求めよ.

(4) 行列 $L$ のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(名古屋大 2002)　　(m20022802)

**0.336** 行列　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1) $A$ の逆行列を求めよ.

(2) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化したもの（大きさが 1 のもの）を示せ.

(3) $A$ を対称行列と交代行列の和で表せ．なお，行列 $X$ の転置行列を $X^t$ としたとき，$X^t=X$ を満たすものを対称行列，$X^t=-X$ を満たすものを交代行列という.

(名古屋大 2004)　　(m20042803)

**0.337** 行列 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の 3 つの固有値 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052801)

**0.338** $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする.

(1) $A$ の 2 つの固有値 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha>\beta)$ を求めよ.

また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ の形で求めよ（$z$ の値のみで良い）.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 $P$ を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ.

(3) $\gamma_n=\alpha^n-\beta^n$ とする．$A^n$ を $\gamma_{n-1}$, $\gamma_n$, $\gamma_{n+1}$ で表せ.

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

**0.339** 赤, 黄, 青のランプがあり，各時刻において，いずれか一つのランプが点灯する．時刻 $t$ に，赤のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，赤が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する. 時刻 $t$ に，黄のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，黄が 0.5，赤が 0.25，青が 0.25 の確率で点灯する．時刻 $t$ に，青のランプが点灯しているとき，時刻 $t+1$ には，青が 0.75，黄が 0.25 の確率で点灯する．時

刻 $t$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ で表し，時刻 $t+1$ に赤, 黄, 青のランプが点灯している確率を，それぞれ $X_1(t+1)$, $X_2(t+1)$, $X_3(t+1)$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ と表したときの行列 $A$ を示せ.

(2) 行列 $A$ の行列式を求めよ.

(3) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(名古屋大 2007)　　(m20072801)

**0.340** 水 $1\ell$ を 2 つの瓶 $A, B$ に適当に分け，瓶 $A$, 瓶 $B$ に入っている水の量をそれぞれ $x_0$, $y_0$ とする.

「瓶 $A$ 中の水の 1 割と，瓶 $B$ 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 $C, D$ へ抜き取り，小瓶 $C$ の水を瓶 $B$ に，小瓶 $D$ の水を瓶 $A$ へ入れる」という手続きを $n$ 回繰り返した後，瓶 $A$, 瓶 $B$ に入っている水の量をそれぞれ $x_n$, $y_n$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $x_n$, $y_n$ を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 $T$ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 $T$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $x_n$, $y_n$ を，$x_0$, $y_0$ および $n$ を用いて表せ.

(4) $n \to \infty$ としたときの，$x_n/y_n$ の値を求めよ.

(名古屋大 2008)　　(m20082801)

**0.341** 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A^5$ を求めよ.

(名古屋大 2011)　　(m20112802)

**0.342** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(名古屋大 2014)　　(m20142802)

**0.343** 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ.

(1) $A$ の固有値 $\lambda$ と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^m$（$m$ は自然数）を求めよ．

(名古屋大 2015)　　(m20152801)

**0.344** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に関して，以下の設問に答えよ．

(1) 行列 $A$ が 2 個の固有値を持つような $a$ を全て求めよ．またそのときの固有値を求めよ．

(2) 行列 $A$ が 3 個の固有値を持つような $a$ の場合について，

(a) 全ての固有値と固有ベクトルを $a$ を用いて記せ．

(b) 行列 $A$ は，ある正則行列 $P$ によって $D = P^{-1}AP$ と対角化可能である． $P$ を一つ示し，その $P$ に対応する，$P^{-1}$，$D$ をそれぞれ求めよ．

(名古屋大 2016)　　(m20162801)

**0.345** 定数 $a$ を含む行列 $A$ と未知変数 $x, y, z$ に関する次の方程式を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

以下の設問に計算手順を示し解答せよ．

(1) 方程式がただひとつの解をもつための，定数 $a$ が満たすべき条件を示せ．

(2) $a = 0$ とする．方程式の解を求めよ．

(3) $a = 4$ とする．このとき，$A$ の固有値のひとつは 2 である．

(a) 固有値 2 に属する $A$ の固有ベクトルをひとつ求めよ．なお固有ベクトルの大きさ（ノルム）は 1 とする．

(b) 残りの $A$ の固有値をすべて求めよ．

(名古屋大 2017)　　(m20172801)

**0.346** 次の行列 $A$ を考える．

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．なお固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 定数 $a$, $b$, $c$, $d$ に対して，$aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA$ は単位行列となった．$a$, $b$, $c$, $d$ を一組求めよ．

(3) 大きさが 1 のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ に $A^k$ を乗じた $A^k\boldsymbol{v}$ を考える．ここで $k$ は正の整数である．

(i) $A^k\boldsymbol{v}$ を $v_1$, $v_2$ を用いて表せ．

(ii) $k \to \infty$ としたとき，$A^k\boldsymbol{v}$ の大きさの最大値を示し，それを与える $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ．

(名古屋大 2018)　　(m20182805)

**0.347** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値のうち，実数となる固有値およびその固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^3 - 8E$ を求めよ．ただし，$E$ は 3 次の単位行列である．

(3) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(名古屋大 2022)　　(m20222801)

**0.348** (1) 次の行列 $A$ の固有多項式 $|\,xE - A\,|$ を計算して，$A$ の固有値を求めよ．但し，$E$ は単位行列を表す．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 上で得られた固有値の固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972903)

**0.349** 次の $2 \times 2$ の行列 $A$ について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは 2 次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 $E$ と $B$ を適当に定め，行列 $A$ を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，$E^{-1}$ は $E$ の逆行列で $B$ は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた $E$ と $B$ を用いて，$A^n$ はどのように表すことができるか．ここで，$A^n$ は $n$ 個の $A$ を掛け合わせたものである．
（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて $A^2$ がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を $V$ と書く．$V$ の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．
$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 $A$ を用いて，
$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつくったとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた $A^n$ の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　　(m19972904)

**0.350** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の各問に答えよ．ただし，$a \geq 0$ である．

(1) $A$ の二つの固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ を求めよ．

(2) $\lambda_1$，$\lambda_2$ にそれぞれ対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}$ のどちらにも直交するベクトルは 0 ベクトルのみであることを示せ．

(3) 上の問 (2) における固有ベクトル $\mathbf{x}$ , $\mathbf{y}$ が互いに直交するときの $a$ の値を求めよ.

(名古屋工業大 1998)　(m19982907)

**0.351** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ.

(3) 二つの関数 $x(t)$ , $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時, $P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか.

(4) (3) の $X(t)$ , $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998)　(m19982908)

**0.352** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して次を求めよ.

(1) $|A|$ および $A^{-1}$

(2) $A$ の固有値

(3) 上の (2) で求めた各固有値に対する固有ベクトル

(名古屋工業大 1999)　(m19992906)

**0.353** 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{9}{8} & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ.

(1) $A$ の二つの固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ と, それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{p}_1$ , $\mathbf{p}_2$ を求めよ.

(2) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ は, $\mathbf{p}_1$ , $\mathbf{p}_2$ を用いて

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$$

と書ける. このことを用いると, $A^n\mathbf{x}$ は, $\lambda_1$ , $\lambda_2$ $\mathbf{p}_1$ , $\mathbf{p}_2$ を用いてどのように表すことができるか. $\alpha$ , $\beta$ は, 実数である.

(3) 一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して,

$$A\mathbf{x}\ ,\ A^2\mathbf{x}\ ,\ \cdots\ ,\ A^n\mathbf{x}\ ,\ \cdots$$

なるベクトルの列は, 二次元平面上の点列を表すが, この点列の挙動は, $\mathbf{x}$ の取り方によって異なるものになる. このことを, (1) と (2) で求めたことを用いて論じよ.

(名古屋工業大 1999)　(m19992907)

**0.354** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. 更に, 行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 $T$ を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　(m20002905)

**0.355** 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A = PBP^{-1}$ となるように行列 $P,\ B$ を定めよ．ここで，行列 $B$ はある実数 $a, b$ について $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ の形となるように定めよ．

(3) $A^n$ を求めよ．

(名古屋工業大 2000)　　(m20002906)

**0.356** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ．また，$A$ の最大固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(名古屋工業大 2016)　　(m20162904)

**0.357** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018)　　(m20182906)

**0.358** $k$ は定数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2k \\ -1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $A$ が対角化可能であるような $k$ の値をすべて求めよ．

(名古屋工業大 2021)　　(m20212905)

**0.359** ベクトル $(1, 2)$ に行列を掛けると

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

のように（一般には）向きと大きさが異なるベクトル $(-3, -3)$ が得られるが，他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル $(x, y)$ が存在することもある．後者のようなベクトルは，この行列の**固有ベクトル**と呼ばれ，その長さが何倍となったか（$a$ の値）は**固有値**と呼ばれる．このような方向をもったベクトル $(x, y)$ を求めよ．また，ベクトルの長さは何倍になっているか．

(三重大 2002)　　(m20023117)

**0.360** 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ の値を求めなさい.

(2) 行列 $A$ のすべての固有値と, 各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 正則行列 $P$ によって行列 $A$ を対角化したい. このような正則行列 $P$ と, その逆行列 $P^{-1}$, および対角化された行列 $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(4) 行列 $P^{-1}A^nP$ を求めなさい. ただし, $n$ は自然数とする.

(三重大 2005)　　(m20053107)

**0.361** (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を求めよ.
ここで, $a$ , $b$ , $c$ , $d$ は実数であり ( ただし, $c \neq 0$ ) , $i^2 = -1$ である.

(2) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ , $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}{}^{*} x_{2j}$ を計算せよ. ただし, $x_{ij}$ は $\boldsymbol{x}_i$ の $j$ 成分であり $(i, j = 1, 2)$, $\alpha^*$ は $\alpha$ の複素共役を表す.

(三重大 2005)　　(m20053110)

**0.362** 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(三重大 2006)　　(m20063113)

**0.363** (1) 複素行列 $\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ を求めよ. ここで, $a, b, c, d$ は実数であり（ただし, $c \neq 0$）, $i^2 = -1$ である.

(2) $\lambda_1$ , $\lambda_2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ , $\boldsymbol{x}_2$ を求め, エルミート内積 $(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} x_{1j}^{*}\, x_{2j}$ を計算せよ. ただし, $x_{ij}$ は $\boldsymbol{x}_i$ の $j$ 成分であり $(i, j = 1, 2)$, $\alpha^*$ は $\alpha$ の複素共役を表す.

(三重大 2006)　　(m20063118)

**0.364** 次の行列 $A$ に対して

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値方程式をたて, 固有値をすべて求めよ. ただし, 固有値はすべて整数値とする.

(2) 固有ベクトルをすべて求め, それを用いてこの行列を対角化（$P^tAP = E$ : $E$ は単位行列）する行列 $P$ を求めよ. ただし, $P$ は直交行列である.

(三重大 2008)　　(m20083101)

**0.365** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いについて答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ を対角化せよ.

(3) $A^{23}$ を求めよ.

(三重大 2009)　　(m20093107)

**0.366** (1) 次の対称行列 $A$ の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 一般の実対称行列 $B$ について，その固有値はすべて実数で，異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(三重大 2009) (m20093110)

**0.367** 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を対角化することにより，$A^{17}$ を求めよ．

(3) 正則行列の持つ性質について列挙せよ．

(三重大 2011) (m20113109)

**0.368** 以下の問に答えなさい．

(1) 次の行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ をひとつ求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 問 (1) で求めた固有ベクトルからなる行列 $P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) $n$ が正の整数のとき，問 (2) の結果を利用して，$A^n$ を求めなさい．

(三重大 2011) (m20113115)

**0.369** 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問について答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を対角化せよ．

(3) $A^n$ を求めよ．

(三重大 2012) (m20123101)

**0.370** (1) 次の交代行列 $\boldsymbol{A}$（$i$ 行 $j$ 列成分 $a_{ij}$ と $j$ 行 $i$ 列成分 $a_{ji}$ が $a_{ij} = -a_{ji}$ を満たす行列）の行列式，固有値および固有ベクトルを求めよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の交代行列 $\boldsymbol{B}$ の行列式は $|\boldsymbol{B}| = p^2$ とかける．$p$ を求めよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $n$ 行 $n$ 列の正方行列 $\boldsymbol{C}$ が交代行列であり $n$ が奇数のとき，行列式 $|\boldsymbol{C}|$ は 0 となることを示せ．

(三重大 2012) (m20123108)

**0.371** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値および，固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(三重大 2012)　　(m20123120)

**0.372** 2× 2 行列 $A$ が次の 2 つの条件 $(a)$, $(b)$ を満たしている．

$(a)$ $A^2 - 3A + 2E = O$　　$(b)$ $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

ただし，$E$ は単位行列，$O$ は零行列を表す，以下の問いに答えよ．

(1) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(2) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(3) $A$ を求めよ．

(4) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133105)

**0.373** 二つの実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が，$a_{n+1} = a_n + 2b_n \quad b_{n+1} = -a_n + 4b_n$ を満たす．ただし，$a_0 = 1$, $b_0 = -1$ である．以下の問いに答えなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 $A$ を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ とそれぞれの固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めなさい．

(3) 問 (2) で求めた固有ベクトルから行列 $P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ を用いて，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4) 問 (3) の結果を利用して，$A^n$ を求めなさい．

(5) 実数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい．

(三重大 2013)　　(m20133109)

**0.374** (1) $A$ を $N$ 行 $N$ 列の実対称行列，すなわち，${}^tA = A$（${}^tA$ は $A$ の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき，$A$ の固有値 $a_i\,(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ と各 $a_i$ に対する固有ベクトル $\vec{v}_i$ について以下のことを示せ．

(a) 固有値はすべて実数である．

(b) $a_i \neq a_j$ ならば，$\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ は直交する．すなわち，内積 $(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$．[ただし，$\vec{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 $B$ を

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(a) 固有値の和と積を求めよ．

(b) $B$ を対角化する行列，すなわち，$UBU^{-1}$ が対角行列になるような行列 $U$ を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133117)

**0.375** 2 次の正方行列 $A$ を用いると，点 $(2, 1)$, $(-1, 5)$ をそれぞれ点 $(4, 14)$, $(-13, 37)$ に移す 1 次変換を行うことができる．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) この 1 次変換のための行列 $A$ を求めなさい．

(2) この行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2014)　　(m20143104)

**0.376** 次の行列 $A$ の固有値, 固有ベクトルおよび固有ベクトル間の角度を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(三重大 2015)　　(m20153103)

**0.377** 点 $(1,\ -1)$, $(-3,\ 7)$ をそれぞれ $(5,\ -5)$, $(-11,\ 23)$ に移す 1 次変換を行うことができる 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ を求めなさい.

(2) 行列 $A$ は $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = 0$ を満たす, このとき $A^4$ を求めなさい. ただし, $E$ は単位行列である.

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(三重大 2016)　　(m20163101)

**0.378** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ.

(1) $A^5$ の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ.

(2) $A$ の固有値および互いに直交する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ.

(3) $A$ を変換 $P^TAP$ によって対角化する直交行列 $P$ を構成し, 対角化を実行せよ. ただし, $P^T$ は $P$ の転置行列である.

(三重大 2016)　　(m20163117)

**0.379** ある 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) この行列 $A$ の固有値を求めなさい.

(2) この行列 $A$ の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $A^n$ の値を求めなさい

(三重大 2017)　　(m20173101)

**0.380** $x, y$ に関する実数値関数 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 $A$ を求めなさい.

(2) $A$ の全ての固有値と, それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 $T$ を求めなさい. さらに, $T^{-1}AT$ を求めなさい.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで, $f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい. また, $g(u,v) = 4$ の概形を $u$-$v$ 平面上に描きなさい.

(三重大 2017)　　(m20173108)

**0.381** (1) 次の行列 $A$ とベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を求めよ．またベクトル $\overrightarrow{v}$ と $A\overrightarrow{v}$ の内積 $\overrightarrow{v}\cdot A\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，$a, b, c, x, y$ は実数とする．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 $A$ の行列式 $|A|$ と，2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) (1) の $\overrightarrow{v}$ が $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} > 0$ を満たし，(2) の行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき，(1) の内積が $\overrightarrow{v}\cdot A\overrightarrow{v} > 0$ となる十分条件は，$a > 0$，$c > 0$ かつ $|A| > 0$ であることを証明せよ．

(三重大 2017)　　(m20173115)

**0.382** (1) 次の行列 $A$ の行列式 $|A|$ を求めよ．また行列 $A$ と次のベクトル $\overrightarrow{v}$ の積 $A\overrightarrow{v}$ を計算し，$A\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$ となることを示せ． ただし $\theta$, $\phi$ は実数，$i$ は虚数単位とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(2) (1) の行列 $A$ について，$\phi = 0$ としたときの 2 つの固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とせよ．

(3) 次の行列 $B$ の 2 つの固有値を求めよ．ただし $k$ は実数とする．また $|k| \leq 1$ として，大きさ 1 とした 2 つの固有ベクトルを求めよ．また 2 つの固有値を $k$ の関数として，$|k| \leq 1$ の範囲でグラフに描け．

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$$

(三重大 2018)　　(m20183112)

**0.383** 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A$ の行列式を求めなさい．

(2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい．

(3) 行列 $A$ について，1 次独立な固有ベクトルをすべて求めなさい．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 としなさい．

(4) (3) で求めた固有ベクトルが互いになす角度をすべて求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203107)

**0.384** 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $P$ の固有値 $\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ と対応する単位固有ベクトル $v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めなさい．
ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする．

(2) $VV^T$ を求めなさい．ただし，

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である．

(3) 行列 $P$ は固有値・固有ベクトルに対して，$PV = VA$ が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である．このとき，$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 $P_1$，$P_2$，$P_3$ が存在することが知られている．行列 $P_1$，$P_2$，$P_3$ を求めなさい．

(4) 0 以上の整数 $n$ に対して $P^n$ を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203111)

**0.385** 2 次曲線 $C$： $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 $C$ は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，$xy$ 平面上の 2 次曲線 $C$ は，$XY$ 平面上で 2 次曲線 $C'$ に変換される．2 次曲線 $C'$ の式を $X$, $Y$ を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

**0.386** $n$ 行 $n$ 列の正方行列 $A$ の転置をとり，さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 $A$ のエルミート共役といい，$A^\dagger$ と書く．つまり，

$$(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

また，$A^\dagger = A$ であるとき，行列 $A$ をエルミート行列と言う．エルミート行列に関して以下の問いに答えよ．

(1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ．

(2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ．

(3) 下に示す行列 $A$ はエルミート行列である．行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求め，上記 (1)，(2) が成り立つことを確かめよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001)　　(m20013212)

**0.387** 次の行列について以下の問いに答えよ．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 固有値を求めよ．

(2) 得られた各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2002)　　(m20023209)

**0.388** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．ただし，$\varepsilon$ は実数で，$\varepsilon \neq \pm 1$, $\varepsilon \neq 0$ であるとする．

(1) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(3) 各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2003) (m20033209)

**0.389** 次の行列の全ての固有値とそれに属する規格化された固有ベクトルを求めよ. $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2007) (m20073205)

**0.390** 次の行列の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ. $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(奈良女子大 2008) (m20083205)

**0.391** 次の実対称行列 $A$ について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有ベクトルをすべて求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること.

(4) 行列 $A$ は，直交行列 $V$ とその転置行列 $V^T$ を以下のように左右からかけることにより，対角行列 $B$ に変換することができる.

$$B = V^T AV$$

行列 $V$ と $B$ を求めよ.

(奈良女子大 2012) (m20123205)

**0.392** 次の行列 $A$ に関する以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし，$a$ および $b$ は実数であり，$b \neq 0$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値を求めよ,

(3) 前問で得られた固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること.

(4) 適切な直交行列を使って，行列 $A$ を対角化せよ.

(奈良女子大 2015) (m20153205)

**0.393** $xy$ 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える.

(1) この式は実数の定数 $a, b, c$ を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる．行列 $A$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする)．$\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ．

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする．$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ．

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく $XY$ 座標を定義する．問題で与えた多項式を $XY$ 座標で表し，もとの $xy$ 座標で曲線のグラフをかけ．

(奈良女子大 2016) (m20163208)

**0.394** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式を求めよ．

(2) 固有値を全て求めよ．

(3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ．ここで固有ベクトルの長さは任意でよく，また必ずしも互いに直交せずともかまわない．

(奈良女子大 2018) (m20183207)

**0.395** $a, b, c$ を定数とし，3 次正方行列 $A$ を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．さらに $A$ の固有値の異なる値の個数が 2 個になるための $a, b, c$ の条件を求めよ．

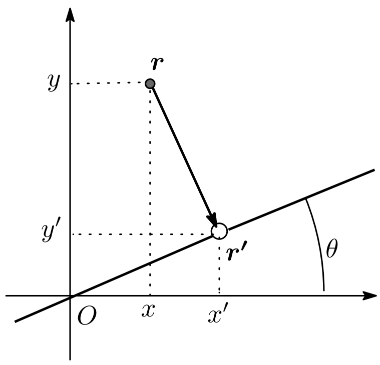
(2) $A$ の一次独立な 3 つの固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019) (m20193201)

**0.396** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(奈良女子大 2019) (m20193210)

**0.397** 下図のように $xy$ 平面上の任意の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を，$x$ 軸から角度 $\theta$ 傾いた直線に垂直に射影した点 $\boldsymbol{r}' = (x', y')$ を求める変換を考える．以下の問いに答えよ．



(1) ベクトル $\boldsymbol{r}$ と単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, \sin\theta)$ を使って，ベクトル $\boldsymbol{r}'$ を表せ.

(2) $(x, y)$ と $(x', y')$ の関係は $2 \times 2$ 行列 $A$ を使って一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

として表すことができる．行列 $A$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の 2 つの固有値を計算し，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向を求めよ.

(奈良女子大 2022)　　(m20223209)

**0.398** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な $P$ を選べ.

(京都大 1995）　　(m19953304)

**0.399** 行列 $A$ が次のように定義されている．以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求めよ.

(京都大 1998)　　(m19983304)

**0.400** (1) 行列 $A$，固有値 $\lambda$，それに対応する固有ベクトル $x$ の間の関係式を書け.

(2) 行列 $A$，固有値 $\lambda$ が満たすべき方程式を固有方程式という．固有方程式を書け.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$A$ の固有値を求めよ.

(4) (3) の固有値に対する固有ベクトルの中で，互いに直交な単位ベクトルを求めよ.

(京都大 2000)　　(m20003302)

**0.401** 次の行列 $A$ に対して，(1)～(3) に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ただし，$I$ は 3 次の単位行列，$\mathbf{0}$ は 3 次元の零ベクトルを表す.

(1) 行列 $A$ の固有値とその固有ベクトルの組 $(\lambda, \boldsymbol{p})$ の中で

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$$

が成立するベクトル $\boldsymbol{q}$ が存在するような組を 1 つ求めよ.

(2) (1) の結果を用いて，$AP = PB$ が成立するような上三角行列 $B$ と正則行列 $P$ を求めよ.

(3)　(2) の結果を用いて，$A^n$ の各成分を $n$ の式で表せ．

(京都大 2008)　　(m20083304)

**0.402**　実数のパラメータ $\theta$ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1)　$A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2)　$\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3)　$\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4)　$\displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0 \leq \theta \leq \pi/2} \Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる $\theta_0$ があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015)　　(m20153305)

**0.403**　$e_1,\ e_2$ を，$n$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトルとし，両者がなす角 $\theta$ は $0 < \theta < \pi/2$ をみたすものとする．$e_1$ によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を $L_1$，$e_2$ によって張られる $\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間を $L_2$ とし，$\mathbb{R}^n$ から $L_1,\ L_2$ への正射影をあらわす線形変換をそれぞれ $P_1,\ P_2$ とする．問 1 〜問 4 に答えよ．

問 1　$P_1$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 2　$P_1 + P_2$ の固有値を，重複度を含めてすべて答えよ．また，0 でない固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

問 3　$P_1 - P_2$ は，$\pm\sin\theta$ を固有値としてもつことを示せ．

問 4　$P_1 - P_2$ の固有値 $\sin\theta$ に対応する固有ベクトルを，$e_1$ とのなす角 $\alpha$ が $\pi/2$ より小さくなるようにとったとき，$\alpha = \pi/4 - \theta/2$ であることを示せ．

(京都大 2018)　　(m20183303)

**0.404**　行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a^2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を持つような $a$ の値を求めよ．また，このとき行列 $A$ のすべての固有値及びの行列式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013410)

**0.405** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ．ただし，$a$ は定数である．

(1) $A$ の行列式の値が $-2$ となるように定数 $a$ を定めよ．

(2) (1) で得られた定数 $a$ の値に対して，$A$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2002) (m20023410)

**0.406** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2 & b \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$ が固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ をもつとする．

(1) 成分 $a, b$ の値を求めよ． (2) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2003) (m20033410)

**0.407** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2004) (m20043405)

**0.408** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

さらに，$A^n$($n$ は自然数) の行列式の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2006) (m20063411)

**0.409** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 行列 $xE - A$ の行列式を求めよ．ただし，$x$ はスカラー，$E$ は 4 次の単位行列を表す．

(2) $A$ の固有値とその固有ベクトルをすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2007) (m20073401)

**0.410** 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の固有方程式の重解を $\lambda_0$ とする．固有値 $\lambda_0$ に対応する 2 つの固有ベクトルで，正規直交系をなすものを 1 組求めよ．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083401)

**0.411** $E$ を 3 次の単位行列とし，$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の実固有値のうちで最小のものを $\lambda$ とする．$\lambda$ に対する固有ベクトル $\vec{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を 1 つ求めよ．

(3) $B=A^7+5A^4+E$ とおく．(2) で求めたベクトル $\vec{v}$ が $B$ の固有ベクトルになることを示し，$\vec{v}$ に対する $B$ の固有値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123401)

**0.412** (1) 3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $n$ を自然数とする．3 次正方行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B^n$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153401)

**0.413** $a,b$ を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ は固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．

(1) $a,b$ を求めよ．

(2) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193401)

**0.414** $a$ を実数とする．3 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．$E$ は 3 次の単位行列を表す．

(1) 行列 $aE+A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 行列 $aE+A$ の階数を求めよ．

(3) 3 次正則行列 $P$ で

$$P^{-1}(aE+A)P=aE+A^2$$

を満たすものは存在しないことを示せ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203401)

**0.415** 4 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の固有ベクトルのみから成る $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(京都工芸繊維大 2021)　　(m20213401)

**0.416** $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ について以下の各問いに答えよ．

(1) ２次形式 $F$ の表現行列 $\mathbf{A}$ を求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ の固有値 $\alpha, \beta$ およびそれに対応する単位固有ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ を求めよ．

(3) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が直交することを示せ．

(4) 一般に相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ．

(5) $\mathbf{P} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ とした時，$\mathbf{P}$ は直交行列であることを示せ．

(6) $\mathbf{A}$ を対角化せよ．

(7) $F$ の標準形を求めよ．

(大阪大 1995)　　(m19953506)

**0.417** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値と単位固有ベクトルを求めよ．

(2) 対角化するための直交行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(3) $B = A^9 + 3A$ を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973505)

**0.418** ２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．以下の問に順次答えよ．

(1) ２次形式 $F = 2x^2 - 4xy + 5y^2$ の行列 $A$ を求めよ．

(2) 対称行列 $A$ の固有値 $\alpha$ , $\beta$ を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$ , $\mathbf{v}$ より２次の正方行列 $P = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ を作成した場合，$P$ が直交行列となっていることを示せ．

(4) $P$ を用いて，行列 $A$ を対角化せよ．

(5) (3) で求めた $P$ を用いて，次式のようにもとの $(x, y)$ 座標系から $(x', y')$ 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) ２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 $(x', y')$ で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた２次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け．

(大阪大 1999）　　(m19993503)

**0.419** 行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする．

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 $C$，および，そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ．

(3) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数である．

(大阪大 2001)　　(m20013505)

**0.420** 次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2)

$$(A^8 + 3A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

を満足する点 $(x, y, z)$ の集合はどのような図形となるか．図形の方程式を導出せよ．ただし，$I$ は 3 次の単位行列である．

（大阪大 2004）　(m20043507)

**0.421** 行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし $a$, $b$ は実数である.

(1) 行列 $A$ の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための $a$ と $b$ に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 $A$ の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ． また, 2 つの固有ベクトルが直交するための $a$ と $b$ に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 $A$ の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 $P$, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ． また, $A^n$ を求めよ． ただし $n$ は正の整数である.

(4) 行列 $A$ の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル $x$ に対して

$${}^t x A x > 0$$

を満たすための $a$ と $b$ に関する必要十分条件を示せ. ここで ${}^t x$ は $x$ の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005)　(m20053506)

**0.422** 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -16 \\ -6 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値，単位固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) 行列 $A$ の表す 1 次変換によって，直線 $x = 3y = 3z$ が写される直線を示せ．

(3) 行列 $A$ の表す 1 次変換によって自分自身に写される直線の中で，どの 2 組も平行でないものを 3 つ求めよ．

(大阪大 2006)　(m20063501)

**0.423** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 適当な変換行列（対角化するための正則行列）$P$ を求め, 行列 $A$ を対角化せよ.

(3) 行列 $A$ の $n$ 乗を求めよ.

(大阪大 2007)　(m20073503)

**0.424** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) $A$ の行列式の値を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が 1 次独立となるときの $a$ の条件を求めよ．

(3) $A$ の固有値の一つが 0 であるとき，$a$ の値を求めよ．
また，その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $A$ の固有値の一つが 1 であるとき，$A^n$ を求めよ．ただし，$a < 0$ とする．

(大阪大 2007)　　(m20073507)

**0.425** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，$a$ は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，$a$ が満たすべき条件を示せ．

(2) $x_1, x_2, b_1, b_2$ を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，$a, b_1, b_2$ が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めて，$A$ を対角化せよ．

(4) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための $a$ の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n\boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008)　　(m20083502)

**0.426** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$a$，$b$ および $c$ は実数であり，また，$b \neq 0$ である．

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ．

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(3) 行列 $A$ は対称行列であるので，適当な直交行列 $U$ によって対角化される．この直交行列 $U$ を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，$\lambda_1$ および $\lambda_2$ は行列 $A$ の相異なる固有値である．

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの $\lambda_1$ および $\lambda_2$ を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083508)

**0.427** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える．ただし，$a$ は実数とする．

(1) 行列 $A$ の固有値の一つが 0 である場合，$a$ の値を求めよ．

(2) $a = -1$ の場合について，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めて，$A$ を対角化せよ．

(3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする．ベクトル $\boldsymbol{y}$ を，$\boldsymbol{x}$ の $A$ による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする．
$a = -1$ の場合について，$\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ．また，そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ．

(大阪大 2011)　　(m20113506)

**0.428** 以下の設問に答えよ．

(1) 実数を要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ．また，そのとき，異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ．

(2) 2 次曲線 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$ の概形を描け．

(3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき，関数 $f(x, y) = 2x^2 + dxy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．ただし，$d$ は実数の定数とする．

(大阪大 2012)　　(m20123506)

**0.429** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．

ただし，$a, b, c$ は実数である．

(2) 行列 $A$ を対角化する直交行列の中で，対称行列となる $P$ を一つ求めよ．

(3) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数を表す．

(4) (2) で求めた $P$ を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と 1 次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$ と表せることを示せ．また，定数 $\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$ の値を求めよ．

(大阪大 2013)　　(m20133503)

**0.430** 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) すべての固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさは 1 とする．

(2) 関数 $f(x, y, z)$ の $x, y, z$ についての偏導関数をそれぞれ $f_x(x, y, z)$，$f_y(x, y, z)$，$f_z(x, y, z)$，関数 $g(x, y, z)$ の $x, y, z$ についての偏導関数をそれぞれ $g_x(x, y, z)$，$g_y(x, y, z)$，$g_z(x, y, z)$ とする．関数 $f(x, y, z)$ が条件 $g(x, y, z) = 0$ のもとで点 $(a, b, c)$ において極値をとり，$g_x(a, b, c) \neq 0$ または $g_y(a, b, c) \neq 0$ または $g_z(a, b, c) \neq 0$ ならば，次の式を満たす実数 $\lambda$ が存在する．

$$f_x(a, b, c) - \lambda g_x(a, b, c) = 0$$

$$f_y(a, b, c) - \lambda g_y(a, b, c) = 0$$

$$f_z(a, b, c) - \lambda g_z(a, b, c) = 0$$

条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，次の関数 $f(x, y, z)$ が最小値をとる $(x, y, z)$ を求めよ．

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(大阪大 2017)　　(m20173503)

**0.431**　行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$c$ は実定数である．

(1) 行列 $A$ の固有多項式 $f(\lambda) = |\,\lambda I - A\,|$ を変数 $\lambda$ の関数とみなし，その極値を求めよ．ただし，$I$ は単位行列を表すものとする．さらに，$c = 0$ のときの $f$ のグラフの概形を図示せよ．

(2) 行列 $A$ のすべての固有値が実数となる，$c$ に関する必要十分条件を示せ．

(3) $c = 0$ のときの行列 $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2018)　　(m20183501)

**0.432**　次式で表される $xyz$ 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 $A$ を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ．

(2) $A$ のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと．

(3) $A$ を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ．

(4) $xyz$ 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に $X$ 軸，$Y$ 軸，$Z$ 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること．

(大阪大 2019)　　(m20193503)

**0.433**　$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & + & 3y & - & z \\ 2x & + & y & + & 3z \\ 3x & + & 2y & + & 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，${}^t$ は行列の転置を表すとする．

(1) ある行列 $A$ を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 $A$ を求めよ．

(2) $k$ を実数とし，$\boldsymbol{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ が解を持つための，$k$ についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ．

(3) $\boldsymbol{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(4) $E$ を 3 次の単位行列とし，行列 $B$ を $B = A - E$ で定める．行列 $B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193506)

**0.434**　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，$a, b$ は実数とする．

(1) $A$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求め，すべての固有値と固有ベクトルが実数であるための条件を述べよ．

(2) $A$ の逆行列が存在するための条件を述べ，逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(3) 問い (2) の結果を用い，逆行列 $A^{-1}$ が存在するときの連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(4) $A$ を対角化する行列 $P$ を一つ示し，$A$ を対角化せよ．

(5) $A^n$ を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき $A^n$ のすべての要素が実数を持ち，かつ発散しないための $a, b$ の範囲を示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203501)

**0.435** 3 次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 $A$ の 3 つの固有値を，それぞれ $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ とする．このとき，
$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$　　が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする 3 次の正方行列 $B$, $C$ に対して，　$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$　が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする 3 次の正方行列 $D$ は，互いに異なる実数の固有値 $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ を持つとする．このとき，　$\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$　が成り立つことを示せ．

(大阪大 2020)　　(m20203506)

**0.436** (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ．

(a) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(b) $A$ を直交行列によって対角化せよ．

(2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 $B$ が，3 つの相異なる固有値を持つとする．$B$ の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

( 大阪大 2021)　　(m20213507)

**0.437** 次の行列 $A$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ を対角化する行列 $P$ を求めよ．

（大阪府立大 2001）　　(m20013604)

**0.438** 次のような行列 $A$ について, 以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $(aI - A)$ が正則でないための必要条件を求めよ. ここで, $a$ はスカラー数, $I$ は $3\times\ 3$ の単位行列とする.

(大阪府立大 2005)　　(m20053601)

**0.439** 行列 $A$ をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 $A$ の長さ 1 の固有ベクトルを, それぞれ求めよ.

(3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って, 行列 $A$ を対角化せよ.

(4) 行列 $A$ の $n$ 乗, $A^n$ を求めよ. ただし $n$ は自然数とする.

(大阪府立大 2010 )　　(m20103604)

**0.440** 次の問いに答えよ.

(1) ある実対称行列は異なる固有値をもつとする. このとき, 異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ.

(2) 行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする. このとき, $A$ の固有値, 固有ベクトルを求め, $A$ を対角化せよ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113606)

**0.441** 3 行 3 列の行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -8 & 0 & -10 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

に関して以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $A$ に関する方程式

$A^3 + aA^2 + bA + cE = O$

の係数 $a, b, c$ を求めなさい. ただし, $E$ は 3 行 3 列の単位行列, $O$ は零行列である.

(3) (2) の結果を用いて, 下記の式で表される行列

$A^5 - 5A^4 + 6A^3 - A^2 + 8A - 8E$

を計算しなさい.

(大阪府立大 2013)　　(m20133603)

**0.442**　2× 2 の行列 $A$ をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，つぎの各問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 $A$ の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) 問い (1) で求めた固有値を $\lambda$，対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く．次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ．

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$$

ただし $E$ は 2× 2 の単位行列であるとする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2× 2 の行列 $B$ を次のように定義する：

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす 2× 2 の行列 $C$ を求めよ：

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133604)

**0.443**　4 次の正方行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ により定める．

(1) 行列 $A$ の階数を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．さらに，そのうちで絶対値が最小の固有値に対する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163603)

**0.444**　行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を直交行列を用いて対角化せよ．

(大阪府立大 2016)　　(m20163605)

**0.445** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

(神戸大 1996） (m19963806)

**0.446** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(1) $P$ は正則であることを示し，$P^{-1}$ を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ を計算せよ．

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを計算せよ．

(神戸大 1996) (m19963807)

**0.447** 次の行列 $A$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(神戸大 1997） (m19973811)

**0.448** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 $T$ は存在するか．存在するならそれを求め，存在しないならその理由を述べよ．

(神戸大 2000) (m20003804)

**0.449** 行列 $A$ を次のようにするとき，次の各問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^n$ $(n \geq 2)$ を求めよ．

（神戸大 2001） (m20013811)

**0.450** $A, B$ を $AB = BA$ を満たす $n$ 行 $n$ 列の行列とする．$\overrightarrow{u}$ を行列 $A$ の固有ベクトルとするとき，$B\overrightarrow{u}$ が $0$ ベクトルでなければ $B\overrightarrow{u}$ も行列 $A$ の固有ベクトルであることを示せ．

（神戸大 2001） (m20013812)

**0.451** 行列 $A$ を次のように定めるとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

(神戸大 2003)　　(m20033810)

**0.452**　2次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ となるような正則行列 $P$ と対角行列 $B$ を1組求めよ．

(4) 自然数 $n$ に対して，$A^n$ を求めよ．

(神戸大 2007)　　(m20073811)

**0.453**　$a,\ b$ を実数，$a \neq 0$ とする．行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} a-b & a & a \\ a & a-b & a \\ a & a & a-b \end{pmatrix}$ と定める．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を対角化する直交行列 $P$ を求めて $A$ を対角化せよ．

(3) $A^{20} = E_3$ を満たす $a,\ b$ の値を求めよ．ただし，$E_3$ は3次の単位行列とする．

(神戸大 2009)　　(m20093802)

**0.454**　行列 $A = \begin{pmatrix} u & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ は正則でないという．以下の問いに答えよ．

(1) $u$ の値を求めよ．

(2) 行列 $A+E$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ を求めよ．

(3) $B\boldsymbol{x}_1 = \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{x}_1,\ B\boldsymbol{x}_2 = \sqrt{\lambda_2}\boldsymbol{x}_2,\ B\boldsymbol{x}_3 = \sqrt{\lambda_3}\boldsymbol{x}_3$ を満たす行列 $B$ を求めよ．

(神戸大 2013)　　(m20133801)

**0.455**　行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対し，$R^2$ でのベクトルを考えるとき，以下の問に答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $A$ は対角化可能かどうかを答えよ．またその理由も述べよ．

(3) $A$ の固有ベクトルのうち長さが1のものの1つ $\boldsymbol{u}$ を求め，$\boldsymbol{u}$ と直交する長さ1のベクトルのうちの1つ $\boldsymbol{v}$ を求めよ．これらのベクトル $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$ に対し，$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]^{-1}A[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]$ を求めよ．

(4) 任意の自然数 $n$ に対する $A^n$ を求めよ．

(神戸大 2014)　　(m20143802)

**0.456**　行列 $\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$　$(a, b, c \in \mathbb{C})$ に対して，次の問に答えよ．

以下，$I$ は3次の単位行列を表し，$\omega$ は1の3乗根 $\omega = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ を表す．

(1) $\Lambda$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ が $A = aI + b\Lambda + c\Lambda^2$ と表されることを用いて，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 等式　$\det(A) = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$　を示せ．

(神戸大 2017)　　(m20173801)

**0.457** $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が $A$ である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を $T$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^n$ を求めよ．

(3) $T$ の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと．

(4) $n$ を自然数とするとき，$T$ の $n$ 回の合成を $T^n$ で表す． $T^n(\boldsymbol{a}_1),\ T^n(\boldsymbol{a}_2),\ T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173808)

**0.458** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ．

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 $P$ と対角行列 $B$ の組を一つ求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183801)

**0.459** 行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}$ は $A$ の固有ベクトルであることを示せ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 $P$ を 1 つ求めよ．

(3) 上記の $P$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(神戸大 2023)　　(m20233801)

**0.460** 次の行列 $A$ に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ． $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルは第一成分（$x$ 成分）が 1 のものを求めよ．

(2) 行列 $A$ を用いて, 2 変数関数 $f(x,y)$ を以下の式で定義する．

$$f(x,y) = (x \ \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して　$f(x,y) = a(x+y)^2 + b(x-y)^2$　となるように $a, b$ を求めよ．

(鳥取大 2006)　　(m20063914)

**0.461** 以下に示す行列 $A$ の固有値 $\lambda$ と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ．但し，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $A$ を掛けたときに定数 $\lambda$ を比例係数として元の $\boldsymbol{x}$ に比例するような（すなわち，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となるような）$A$ に固有のベクトルである．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2007)　　(m20073909)

**0.462** 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．　$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(鳥取大 2007)　　(m20073911)

**0.463** 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値およびその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(鳥取大 2007)　　(m20073920)

**0.464** 行列 $\boldsymbol{B}$ について以下の問いに答えよ．　$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(1) 行列 $\boldsymbol{B}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 固有ベクトルを利用して行列 $\boldsymbol{B}$ を対角化せよ．

(鳥取大 2008)　　(m20083906)

**0.465** ５つ行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられる行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化すること．

(鳥取大 2009)　　(m20093904)

**0.466** 次を証明せよ．

(1) 対称行列 $A$ の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ．ただし，$A$ が対称行列とは $A$ が実正方行列であって $A^T = A$ が成立することをいう．

(2) 直交行列 $A$ を係数行列としてもつ１次変換（直交変換）$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ はベクトルの内積を不変に保つことを証明せよ．ただし，$A$ が直交行列とは $A$ が実正方行列であって $A^T = A^{-1}$ が成立することをいう．

(鳥取大 2009)　　(m20093905)

**0.467** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 固有値を求めよ．

(2) 固有ベクトルを用いて，行列 $A$ を対角化せよ．

(3) $A$ のべき乗 $A^n$（$n$ は正の整数）を求めよ．

(鳥取大 2013)　　(m20133902)

**0.468** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) 一次方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

が解をもつのは，$a, b, c$ の間にどのような関係が成り立つときか答えよ．

(岡山大 2006)　　(m20064001)

**0.469** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，すべての成分 $a, b, c, d$ が正数のとき，次の問いに答えよ.

(1) $A$ は異なる実数の固有値を持つことを示せ.

(2) 固有ベクトルとして少なくとも一つは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x > 0,\ y > 0)$ となるベクトルがとれることを示せ.

(岡山大 2011)　　(m20114003)

**0.470** (1) 3 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

のすべての固有値および各固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(2) $x,\ y,\ z$ を変数とする連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & 2z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ & & 3y & + & 5z & = & c \end{array} \right.$$

が解をもつための $a,\ b,\ c$ の条件を答えよ．また，その一般解を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174004)

**0.471** $A$ を 3 次正方行列でその成分はすべて実数であり，$A^3 = I, A \neq I$ を満たすものとする．ただし，$I$ は 3 次単位行列を表す．次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A^2 + A + I$ は逆行列を持たないことを示せ．

(2) $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ を $A^2 + A + I$ の固有値 0 に対する固有ベクトルとする．ベクトルの組 $\mathbf{v}, A\mathbf{v}$ は 1 次独立であることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014111)

**0.472** 行列 $A$ を　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　と定める．次に答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ を正則行列で対角化せよ．

(広島大 2003)　　(m20034108)

**0.473** 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 $P$ を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が $A$ の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005) (m20054105)

**0.474** $\mathbb{R}^n$ に属する $m$ 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$「 $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ.

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) $A$ は相異なる実数の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\boldsymbol{e}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は $\lambda_j$ に対応する固有ベクトルとする．このとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(広島大 2006) (m20064102)

**0.475** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．ただし，$a$ は実数とする.

(1) 行列 $A$ の階数を求めよ.

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ.

(3) $a = -5$ のとき，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(広島大 2006) (m20064104)

**0.476** 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を $V$ とする．また，行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f : V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する.

(1) 線形写像 $f$ に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 $f$ に関して，$X$ が固有値 $k$ を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 $f$ に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084105)

**0.477** 複素ベクトル空間 $V$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と $V$ 上の線形変換 $f$ を考える． ただし，$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする．以下のそれぞれの命題について，正しければ証明を与え，誤りであるならば反例をあげよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば，$\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である．

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1),\ f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である．

(3) $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が $f$ の相異なる固有値であり，$\boldsymbol{a}_i$ が $\lambda_i$ に対する固有ベクトルであるならば，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である．

(広島大 2010)　　(m20104104)

**0.478** $2\times\ 2$ 行列 $A$ は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と 固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．また，$2\times\ 2$ 行列 $B$ を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $2\times\ 2$ 行列 $P$ で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ．（答だけで良い．）

(2) 行列 $A$ を求めよ．

(3) $2\times\ 2$ 行列 $X$ で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ．

(4) $2\times\ 2$ 行列 $Y$ で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか．また，そのような $Y$ をひとつ見つけよ．

(5) $2\times\ 2$ 行列 $Z$ で $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154101)

**0.479** 実行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の階数を求めよ．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 $S$ を考える．

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す．$S$ の概形を図示せよ．

(4) $S$ の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164101)

**0.480** 実行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $A^{-1}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．$W$ が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016) (m20164105)

**0.481** 行列 $A$, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の階数を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

(3) $A$ の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ．

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2017) (m20174103)

**0.482** $A, B$ を $n$ 次正方複素行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ i & -1 & i \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし $i$ は虚数単位である．

(2) ある $n$ 次正則行列 $P$ が存在して $P^{-1}AP = B$ が成り立つとき，$A$ と $B$ の固有値の集合は一致することを示せ．

(3) $A$ が正則であるとき，$AB$ と $BA$ の固有値の集合は一致することを示せ．

(4) $AB = BA$ が成り立つとき，$A$ と $B$ は少なくとも 1 つの共通の固有ベクトルを持つことを示せ．

(広島大 2018) (m20184105)

**0.483** 3 次正方行列 $A$ を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $A$ が正則行列であることを示し，$A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(2) $A$ のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(3) 3 次正則行列 $P$ で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め，さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく．$B$ のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

(広島大 2021)　　(m20214102)

**0.484** 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す．$E_2$ を 2 次の単位行列とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し，$A$ の随伴行列 $A^*$ を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，複素数 $z$ に対し $\overline{z}$ は $z$ の複素共役を表す．また

$$H(2) = \{A \in M(2, \mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \left\{A \in M(2, \mathbb{C}) \;\middle|\; P \text{ は正則で} \quad P^{-1} = P^*\right\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A \in H(2)$ とする．$A$ の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A \in H(2)$ とする．$A$ がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 $\lambda$ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ．

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，( , ) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A \in H(2)$ に対し，ある $P \in U(2)$ が存在して $P^*AP$ が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

**0.485** 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & b \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$ の固有ベクトルの一つは $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

(1) 実数 $a, b$ の値を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^4 - 3\boldsymbol{A}^3 + 4\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}$ とする．$\boldsymbol{A}$ の対角化を利用して，$\boldsymbol{B}$ の行列式の値を求めよ．ただし，$\boldsymbol{E}$ は単位行列である．

(広島大 2022)　　(m20224105)

**0.486** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値を求めよ．

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ を対角化する行列 $P$ を求め，対角化を利用して $A^3$ を計算せよ．

(広島大 2023)　　(m20234104)

**0.487**　次の行列 $A$ について，以下の問い答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & x \\ -5 & a & -2 \\ x & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1)　行列式 $|A|$ を求めよ．

(2)　すべての実数 $x$ に対して，$A$ が正則であるための実数 $a$ の範囲を求めよ．

(3)　$a = 3,\ x = -2$ のときの $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(広島市立大 2001)　　(m20014205)

**0.488**　次の行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & a \\ 3 & 3 & a \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(1)　$A$ の固有値の 1 つが 3 であるとき，$a$ を求めよ．

(2)　(1) で求めた $a$ に対し，$A$ の固有値をすべて求めよ．

(3)　(2) で求めた $A$ のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(広島市立大 2002)　　(m20024207)

**0.489**　次の対称行列について以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)　$A$ の固有値をすべて求めよ.

(2)　(1) で求めた各固有値に対する $A$ の正規化された固有ベクトルを求めよ.

(3)　${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求め対角化せよ.（ ${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す ）

(広島市立大 2005)　　(m20054203)

**0.490**　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ．

(1)　固有値，固有ベクトルの組を求めよ．

(2)　(1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ とおく．列ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を並べてできる行列 $P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ が直交行列であることを示せ．

(3)　(2) の $P$ に対して，$P^tAP$ が対角行列であることを示せ.（ただし，$P^t$ は $P$ の転置行列を表すものとする.）

(広島市立大 2006)　　(m20064205)

**0.491**　次の行列 $A$ に対し，以下の問いに答えよ.　　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(1)　固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2)　正則行列 $P$ で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めよ．なお，$P^{-1}$ も求めること.

(3) $n$ を正の整数とするとき，$A^n$ を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074205)

**0.492** 次の行列 $A$ に対して，以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値の 1 つが 2 であるとき，$a$ を求めよ．

(1) で求めた $a$ に対して，以下の (2),(3),(4) の問いに答えよ．

(2) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各固有値に対する，$A$ の固有ベクトルを求めよ．

(4) 正則行列 $P$ で，$P^{-1}AP$ が対角行列となる $P$ を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084203)

**0.493** (1) 次の 3 次正方行列 $A$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 上の正則行列 $A$ を対角化する正方行列 $P$ を求めよ．また，対角化された行列 $P^{-1}AP$ も答えよ．

(3) $n$ 次正方行列 $B$ の固有値の一つが $b(b \neq 0)$ であるとき，$b^2$ および $b^{-1}$ がそれぞれ行列 $B^2$ および $B^{-1}$ の固有値となることを証明せよ．ただし，$B$ は正則であるとする．

(広島市立大 2009)　　(m20094203)

**0.494** 次の 3 次正方行列 $A$ に対し, 以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$, およびその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104205)

**0.495** 次の 3 次正方行列 $A$ について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対応する固有ベクトル空間の基底をそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ およびそれに対応する $D$ を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた $D$ に対し，$D^n$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数とする．

(5) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数とする．

(広島市立大 2011)　　(m20114204)

**0.496** 次の 3 次正方行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $P$ に対し，$P^{-1}$ を求めよ．

(5) (3) で求めた $P$ に対応する $D$ を示せ．

(広島市立大 2012)　　(m20124205)

**0.497** 次の 3 次正方行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた $P$ に対応する $D$ を示せ．

(広島市立大 2013)　　(m20134204)

**0.498** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(山口大 1999)　　(m19994304)

**0.499** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2000)　　(m20004304)

**0.500** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　　(m20014317)

**0.501** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(山口大 2001)　　(m20014318)

**0.502** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対する固有値 $\lambda$ および固有ベクトル $\overrightarrow{v}$ を求めよ．ただし，固有ベクトル $\overrightarrow{v}$ は 1 つ示せばよい．

(山口大 2003) (m20034311)

**0.503** 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対する固有値および固有ベクトルを求めよ. 固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい.

(山口大 2004) (m20044310)

**0.504** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. ただし, 固有ベクトルはひとつの固有値に対してひとつ求めればよい.

(山口大 2005) (m20054304)

**0.505** 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは一つの固有値に対して一つ求めればよい．

(山口大 2006) (m20064304)

**0.506** 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．なお，固有ベクトルは，一つの固有値に対して一つ求めること.

(山口大 2008) (m20084306)

**0.507** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい. 固有ベクトルは, いずれか一つの固有値に対して求めればよい.

(山口大 2010) (m20104302)

**0.508** 行列 $\begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ の固有値を求めなさい．また，その固有値の中で絶対値の最も大きな固有値に対する固有ベクトルを求めなさい．ただし，$i$ は虚数単位を表し，固有値と固有ベクトルは複素数の範囲で求めることとする..

(山口大 2011) (m20114302)

**0.509** 行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(山口大 2012) (m20124302)

**0.510** 次に示す行列 $A$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．固有ベクトルは，いずれか一つの固有値に対して求めればよい.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(山口大 2016) (m20164302)

**0.511** 次のような定数行列 $\boldsymbol{A}$ によるベクトル $\overrightarrow{x}_i$ からベクトル $\overrightarrow{y}_i$ への変換を考える.

$$\overrightarrow{y}_i = \boldsymbol{A}\overrightarrow{x}_i \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

この変換により，$\overrightarrow{x}_1 = (4 \quad 2)^T$ は $\overrightarrow{y}_1 = (6 \quad 3)^T$，$\overrightarrow{x}_2 = (8 \quad 6)^T$ は $\overrightarrow{y}_2 = (13 \quad 8)^T$ へ変換される場合の行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．また，その行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ここで，$(\quad)^T$ は転置行列を表している．

(山口大 2021)　　(m20214302)

**0.512**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル（ただし，長さ 1 のもの）を求めよ．

(徳島大 1999)　　(m19994404)

**0.513**　(1)　次の行列の固有値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)　最小な固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(徳島大 2001)　　(m20014404)

**0.514**　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1)　$A$ の固有値 $\lambda$ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2)　上で求めた $\lambda$ と $x$ に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で $x$ と直交するものを求めよ.

(3)　このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004)　　(m20044404)

**0.515**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ．

(1)　固有値を求めよ．

(2)　各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3)　直交行列 $P$ を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで，${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す．

(徳島大 2006)　　(m20064401)

**0.516**　$a$ を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-2a & 2a \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　$a = 3$ のとき，$A$ の固有値を求めよ．

(2)　$A$ の固有値が重複するように，$a$ の値を定めよ．

(3)　(2) で求めた $a$ の値に対して，$A$ の固有ベクトルで大きさが 1 であるものをひとつ求めよ．

(徳島大 2007)　　(m20074401)

**0.517**　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1)　固有値を求めよ.

(2) 最大である固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104401)

**0.518** 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $A = B^2$ となる行列 $B$ をすべて求めよ.

(徳島大 2012)　　(m20124401)

**0.519** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $P$ を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで，${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す.

(徳島大 2013)　　(m20134401)

**0.520** 3 次実正方行列 $A$ は，$-2$ と 7 を固有値にもつ．$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ は固有値 $-2$ に対応する $A$ の固有ベクトル，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 7 に対応する $A$ の固有ベクトルである．3 つのベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ が，どの 2 つも直交するとき，次の問いに答えよ.

(1) 実数 $a$, $b$, $c$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を並べた 3 次正方行列を $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$ とする．$P^{-1}$ を求めよ.

(3) $A$ を求めよ.

(徳島大 2018)　　(m20184401)

**0.521** 以下の問に答えよ．ただし，計算過程は書かなくともよい．

(1) 2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(2) 2 次行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(3) 4 次行列 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

（高知大 2001 ）　　(m20014505)

**0.522** 3 次行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$　のすべての固有値・固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2008)　　(m20084506)

**0.523** $n\times\ n$ 行列 $A$ が $n$ 個の 1 次独立な固有ベクトルをもてば，$A$ は対角化可能であることを示せ．また，

$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，$A$ を対角化せよ．

(高知大 2009)　　(m20094504)

**0.524** $3\times\ 3$ 行列 $A$ を

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 次の関数式を満たす直交行列 $T$ をひとつ求めよ．

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $\alpha$ と $\beta$ を定数とし, $3\times\ 3$ 行列 $B$ を次で定義する.

$$B=T\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$$

このとき, $B$ と $B^2$ を計算せよ.

(4) $C^2=A$ を満たす行列 $C$ をひとつ求めよ．

(高知大 2010)　　(m20104504)

**0.525** 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とする．$A$ の固有値は $\tau$ と $\overline{\tau}=-\dfrac{1}{\tau}$ であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \tau \end{pmatrix}$ は固有値 $\tau$ と $\overline{\tau}$ に対する固有ベクトルで，単位ベクトルとなることを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_n=A^n\boldsymbol{v}_0\quad(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，$\boldsymbol{v}_n=\dfrac{\tau^n\boldsymbol{u}_1-\overline{\tau}^{n-1}\boldsymbol{u}_2}{\sqrt{1+\tau^2}}$ を示せ.

(高知大 2011)　　(m20114503)

**0.526** $a$ を正の実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の行列式の値が 6 となるような $a$ の値を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値が二つの実数となるような $a$ の値を求めよ.

(3) (2) で求めた $a$ に対し，行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114505)

**0.527**　2 次正方行列 $A$ と 4 次正方行列 $B$ を

$$A=\begin{pmatrix} -27 & 75 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -27 & 75 & 0 & 0 \\ -10 & 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$A$ の行列式を求めよ．

(2)　$B$ の行列式を求めよ．

(3)　$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4)　$B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2012)　　(m20124504)

**0.528**　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$A$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(2)　$A=PDP^{-1}$ を満たす正則行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$，および対角行列 $D$ を求めよ．

(3)　正の整数 $n$ に対し，$A^{2n}$ を求めよ．

(高知大 2013)　　(m20134505)

**0.529**　3 次正方行列 $A$ の固有値が $3, 2, 1$ で，それらに対応する固有ベクトルが順に $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ であったとする．また，

$$P=(\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w})$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$A$ の行列式を求めよ．

(2)　正の整数 $n$ に対して，$A^n-A$ は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ．

(3)　$P$ は逆行列を持つかどうかを理由を挙げて答えよ．

(4)　$A$ を $P$ を用いて表わせ．

(5)　正の整数 $n$ に対して，$A^n$ を $P$ を用いて表わせ．

(高知大 2014)　　(m20144503)

**0.530**　3 次行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(高知大 2017)　　(m20174501)

**0.531**　行列 $A=\begin{pmatrix} -2 & a & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする. ただし, $a$ は定数とする.

(1) 定数 $a$ を求めよ.

(2) $A$ の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054604)

**0.532** $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,　$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $AB = C$ となる行列 $B$ を求めよ.

(2) 行列 $C$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084611)

**0.533** $A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 1 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{a}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$ とする.（ただし，$a > 0$）

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 逆行列 $A^{-1}$ が存在しないときの $a$ の値を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列 $A$ の最大の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2009)　　(m20094604)

**0.534** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた行列 $A$ の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2014)　　(m20144605)

**0.535** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする，また，$n$ を自然数とする.

次の行列の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(i) $E$　　(ii) $A$　　(iii) $A^n$

(愛媛大 2015)　　(m20154605)

**0.536** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた行列 $A$ の固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174605)

**0.537**　(1) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

について考える.

(a) $A$ の固有値を全て求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(b) 適当な正則行列 $P$ を用いて，行列 $A$ を対角化せよ.

(2) $a$ を実数とし，行列

$$B = \begin{bmatrix} 1+a & a & 0 & 0 \\ -a & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

を考える．$B$ の固有値を全て求め，各固有値に対する固有空間の次元を求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174607)

**0.538**　行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ a & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値として持つとする．ただし，$a$ は定数とする.

(1) 定数 $a$ を求めよ.

(2) $A$ の 0 でない固有値をすべて求めよ.

(3) 固有値 0 に対する固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2018)　　(m20184605)

**0.539**　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(愛媛大 2021)　　(m20214607)

**0.540**　行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．ただし，$a$ は正の実数であるとする.

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2) 行列の列 $A,\ A^2,\ A^3, \ldots$ が零行列でない定数行列 $C$ に収束したとする．このとき，次の問いに答えよ.

(a) $a$ の値を求めよ.

(b) 最大固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(c) 行列 $C$ を求めよ.

(九州大 2001)　　(m20014705)

**0.541**　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，正則行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在すると仮定する．次の各設問に答えよ.

(1) $\lambda,\ \mu$ は $A$ の固有値でなければならないことを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して上の条件を満たす $P$ を直交行列で求めよ.

(九州大 2003)　　(m20034707)

**0.542**　ベクトル $y$ がベクトル $x$ と行列 $A$ によって次のように関係づけられる.

$$y = Ax \quad ここで,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 次の 3 つのベクトルが行列 $A$ の固有ベクトルであることを示せ.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_0 \\ {z_0}^2 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ {z_0}^2 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

ここで，$z_0 = e^{i2\pi/3}$ である.
（　$i$： 虚数単位　）
（ ヒント： ${z_0}^3 = 1$ ）

(2) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_k$ $(k = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(3) $a, b, c$ を行列 $A$ の固有値 $\lambda_k$ と $z_0$ を用いて表せ. （ヒント ： $1 + z_0 + {z_0}^2 = 0$）

(4) $a = c = 0$, $b = 1$ となる場合の, 行列 $A$ の（イ）固有値, （ロ）固有ベクトル　を求めよ.

(5)　（イ）ベクトル $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を固有ベクトル $p_1$, $p_2$, $p_3$ の線形和で表せ.

（ロ）上記のベクトル $p$ を $x$ とするとき, ベクトル $y$ を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054701)

**0.543**　次の連立定数係数線形同次微分方程式

$$\frac{dy_1(x)}{dx} + 2y_1(x) - y_2(x) = 0$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} - y_1(x) + 2y_2(x) = 0$$

を , 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を用いて ,

$$\frac{dy(x)}{dx} + Ay(x) = 0 \quad ただし ,\ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

のように表現する. 解 $y(x)$ を行列 $A$ の対角化を利用して以下の設問に沿って求めよ.

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$ , $\lambda_2$ と固有ベクトル $c_1$ , $c_2$ を求めよ.

(2) $c_1$ , $c_2$ を列ベクトルとする行列を $P = (c_1\ ,\ c_2)$ とする. $P^{-1}AP$ を求めよ.

(3) $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = P^{-1}y(x)$ とするとき, $z(x)$ に関する微分方程式を導き, $z(x)$ の一般解を求めよ.

(4) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき, $y(x)$ を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054702)

**0.544** $xy$ 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 $A$ で表される一次変換によって与えられるとする．

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$xy$ 平面上の点 $(x_0, y_0)$ が $n$ 秒後に到達する点 $(x_n, y_n)$ は，次の漸化式によって与えられる．ただし，$n$ は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ.

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 $\lambda$ の値 $a, b$ と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a < b$ とし，$(p, q)$, $(r, s)$ はそれぞれ整数の組で，$p > 0,\ r > 0$ とする．

(2) 前問の結果を用いて，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ.

(3) 座標 $(x_n, y_n)$ を $(x_0, y_0)$ と $n$ を用いて表せ.
（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の $(x_0, y_0)$ が，媒介変数 $s$ を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．$s$ が実数全体を動くとき，$(x_n, y_n)$ の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ.

(九州大 2008) (m20084701)

**0.545** $3 \times\ 3$ 行列 $B, C$ をそれぞれ

$$B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とし，点 $P_n(x_n,\ y_n,\ z_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を $x_1 = y_1 = z_1 = 1$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $C$ の逆行列 $C^{-1}$ を求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ はそれぞれ行列 $B$ の固有ベクトルであることを示せ.

(3) $a_n,\ b_n,\ c_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$a_{n+1},\ a_n$ の間に成立する関係式を求めよ.

(4) $n \to \infty$ としたとき，点 $P_n$ はある点 $P_\infty$ に近づくことを示し，点 $P_\infty$ を求めよ．

(九州大 2011)　　(m20114704)

**0.546** 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ に対し以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の行列式を求めよ．

(2) $A$ の逆行列を求めよ．

(3) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124701)

**0.547** $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) それぞれの固有値に対する第 2 成分が 1 の固有ベクトルを求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124707)

**0.548** $n$ 次実正方行列 $A = (a_{ij})$ は，どの行についても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ とする，以下の問いに答えよ．

(1) 1 は $A$ の固有値であることを示せ．

(2) 2 は $2A$ の固有値であることを示せ．

(3) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $B$ が対角化可能かどうか判定せよ．

(九州大 2013)　　(m20134701)

**0.549** 3 次正方行列 $A$ を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の固有値のうちで最小なものを $\lambda_0$ とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを $\lambda_0$ とおく.）$\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164706)

**0.550** $a, b$ を実数として，次の行列 $A$ について考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ が正則であるための条件を求めよ.

(2) $A$ に掃き出し法（ガウスの消去法）を適用して次の行列 $U$ を得たとする.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

この時，$a, b$ を用いて $c$ を表せ.

(3) $U$ の各列ベクトルが直交するように $a, b, c$ を求めよ.

(4) $a, b, c$ が小問 (3) を満たすとき，$A = LU$ が成り立つような行列 $L$ を求めよ.

(5) $a, b, c$ が小問 (3) を満たすとき，$U$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(九州大 2017)　　(m20174704)

**0.551** 4 次正方行列 $A$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $A$ の固有値のうちで最大のものを $\lambda_0$ とおく．$\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで，第 1 成分が 1 であるものを求めよ.

(九州大 2018)　　(m20184705)

**0.552** 3 次正方行列 $A$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $A$ の固有値のうちで最小なものを $\lambda_0$ とおく.（固有値がただ一つの場合には，それを $\lambda_0$ とおく.）$\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ.

(九州大 2019)　　(m20194709)

**0.553** 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える．このとき次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) $A$ の固有値のうちで最大なものを $\lambda_0$ とおく（固有値がただ一つの場合には，それを $\lambda_0$ とおく）.このとき $\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで，「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2020)　　(m20204701)

**0.554** 3 次正方行列 $A$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $A$ の固有値のうちで最小のものを $\lambda_0$ とおく. $\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 )」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214705)

**0.555** 3 次正方行列 $A$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $A$ の固有値のうちで最小のものを $\lambda_0$ とおく. $\lambda_0$ に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224704)

**0.556** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して固有値と固有ベクトルを求め，$A$ を対角化せよ．また，$A^n$ を求めよ.

（九州芸術工科大 2001）　　(m20014809)

**0.557** $F$ の直交行列 $P$ を求めて，$P^{-1}FP$ を対角行列にする.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ.

(1) $F$ の固有値を求め,

(2) 長さ 1 の固有ベクトルを求め,

(3) 直交行列 $P$ を求め,

(4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034930)

**0.558** 次の対称行列の階数および行列式を求め, この行列が正則であるかどうか判断せよ. 正則な場合は, 逆行列を求めよ. さらに, 固有値と対応する固有ベクトルを求めて, この行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2004)　　(m20044932)

**0.559** $R^3$ を実の 3 次列ベクトル全体のなすベクトル空間とする．3 次正方実行列 $A$ と 3 次列ベクトル $a \in R^3$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $f : R^3 \to R^3$ を $f(x) = Ax\ (x \in R^3)$ で定義された $R^3$ の線形変換とする.

(1) $A^2$ および逆行列 $A^{-1}$ を計算せよ.

(2) ベクトル $f(f(\boldsymbol{a}))$ を計算せよ.

(3) $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}$ となるベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(4) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(5) $A$ の固有値とそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2004)　　(m20044933)

**0.560** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & c \end{pmatrix}$ について，次の (1),(2),(3) に答えよ．ただし, $a \neq 0$ または $c \neq 0$ とする.

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) ベクトル

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x_3} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

は $A$ の固有ベクトルであることを示し, それぞれのベクトルに対する固有値を答えよ.

(3) $a + c \neq 0$ のとき, $A$ は対角化可能であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054907)

**0.561** 次の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(3) (2) の行列を直交行列によって対角化せよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054909)

**0.562** 次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $A$ を対角化せよ.

(3) (2) で得られた対角行列を $B$ とすると $P^{-1}AP = B$（ただし $P$ は正則行列）の関係が成り立つ. この関係を利用して $A^n$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054926)

**0.563** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ.

(1) $A$ の行列式を求めよ.

(2) $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(3) $A$ の固有多項式 $g_A(t)$ を求めよ.

(4) $A$ の固有値 $\lambda$ を求めよ.

(5) $A$ の各固有値の固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054928)

**0.564** $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{AB}$ および $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}$ を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054937)

**0.565** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(佐賀大 2006) (m20064912)

**0.566** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ. (2) 適当な直交行列 $P$ を求め，$A$ を対角化せよ.

(佐賀大 2006) (m20064923)

**0.567** 次の行列の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，$i$ は虚数単位である. $\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$

(佐賀大 2006) (m20064929)

**0.568** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について,

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ.

(2) 固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 $A$ を対角化する行列を示し，対角化せよ.

(佐賀大 2006) (m20064934)

**0.569** (1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) (1) の行列を対角化する直交行列を求め，対角化せよ．

(佐賀大 2007) (m20074905)

**0.570** 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2007) (m20074914)

**0.571** $C = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

(佐賀大 2009) (m20094927)

**0.572** 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有方程式を求めよ．

(2) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ．

(3) $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対する各々の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ．

(4) $A$ を対角化したときの対角行列 $B(=P^{-1}AP)$ および正則行列 $P$ を求めよ．

(5) $A^n$（$n$：自然数）を求めよ．

(佐賀大 2010) (m20104921)

**0.573** 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $B$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(2) $PBP^{-1}$ が対角行列となるような 3 次正則行列 $P$ を求めよ．

(佐賀大 2012) (m20124906)

**0.574** 次の行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $A$ に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 $P$ を求めよ．

(3) $A^n = PXP^{-1}$ となるような行列 $X$ を求めよ．ただし，$n$ は自然数とする．

(佐賀大 2013) (m20134909)

**0.575** 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & c & -c \\ 0 & c & 1-c \\ c & 0 & -c \end{bmatrix}$ の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

ただし，$c$ は定数とする．

(佐賀大 2013) (m20134915)

**0.576** $C = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2013) (m20134922)

**0.577** $n$ 次の正方行列 $A$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ が次のように与えられたとき，すべての固有値と対応する大きさ 1 となる固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有ベクトルを列ベクトルとして並べて作られる行列を $P$ とするとき，行列 $P$ の転置行列 $P^T$ と逆行列 $P^{-1}$ をそれぞれ求めよ．また，求めた $P^T$ と $P^{-1}$ の関係を満足する $n$ 次正方行列の名称を答えよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144911)

**0.578** 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値と それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(佐賀大 2014)　　(m20144918)

**0.579** 次の行列について，問いに答えよ．ただし $E$ は単位行列，$O$ はゼロ行列である．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 $A$ が $A^2 - 2A - 3E = O$ を満たすことを示せ．

(3) (2) で求めた結果を使って（$A^4 = A^2A^2$ の計算を行うことなく）$A^4$，$A^{-1}$ を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154903)

**0.580** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A$ のすべての固有値を求めよ．

(2) 3 つの固有値に対応する規格化された（長さが 1 の）固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) 行列 $A$ を対角化した行列 $A_d$ を求めよ．

(4) 次の関係式を満たす直交行列 $O$ を求めよ．ここで，$O^T$ は $O$ の転置行列である．

$$A_d = O^TAO$$

(佐賀大 2015)　　(m20154911)

**0.581** 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ．

(2) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) 行列 $A$ は対角化可能かどうか理由を述べて答えよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154918)

**0.582** 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $A$ の行列式を求めよ.

(2) $A$ の逆行列を求めよ.

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164905)

**0.583** 次の行列 $P$ について以下の問いに答えよ.

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $P$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $P$ の固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164920)

**0.584** 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 $A$ を対角化して得られる行列 $B$ を求めよ．また，$B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ.

(佐賀大 2016) (m20164929)

**0.585** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2017) (m20174906)

**0.586** 行列 $A = \begin{bmatrix} k & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の行列式の値が 0 になる $k$ を求めよ.

(2) $k = 4$ であるとき，行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ,

(3) $k = -3$ であるとき，行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ,

(4) (3) の条件において，行列 $A$ を対角化せよ.

(佐賀大 2017) (m20174909)

**0.587** 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列 $A$ を対角化して得られる行列 $B$ を求めよ．また，$B = PAP^{-1}$ を満たす正則行列 $P$ とその逆行列 $P^{-1}$ を求めよ.

(佐賀大 2017)　　(m20174920)

**0.588** (1) 2 次式 $5x^2 + 4xy + 5y^2$ を対称行列 $A$ を用いて，以下のように表す．行列 $A$ を求めなさい.

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2) 行列 $A$ の固有値を求めなさい.

(3) 固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(4) 固有値の小さい順に，その固有ベクトルを第 1 列，第 2 列とする正方行列を $P$ とおく．変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

により，方程式 $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 1 = 0$ を $X$, $Y$ を用いて表すとともに，この図形がどんな図形を表すか答えなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184906)

**0.589** 次の行列 $A$ について以下の問いに答えよ.

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 正則行列 $P$ を求め，対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2018)　　(m20184915)

**0.590** 次の行列 $A$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式を求めよ.

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(3) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を求めよ.

(4) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2018)　　(m20184919)

**0.591** 次の 2 次正方行列 $A$ について，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式の値を求めよ.

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(4) (3) で求めた行列 $A$ の各固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(5) 行列 $A$ が対角化可能か調べ，対角化可能であれば適当な正則行列 $P$ を求め，対角化せよ．

(佐賀大 2021)　　(m20214905)

**0.592** 次の行列 $A$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(2) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(3) 行列 $A$ は固有値 1 をもつ．1 以外の $A$ の固有値をすべて求めよ．また，求めた固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(4) $A$ が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば対角化せよ．

(5) 外積 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ と，その $\boldsymbol{b}$ との内積 $\boldsymbol{b}^t(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ をそれぞれ求めよ．ただし $\boldsymbol{b}^t$ は $\boldsymbol{b}$ の転置を表す．

(佐賀大 2021)　　(m20214919)

**0.593** (1) 次の行列 $A$ と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 $A$ の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(d) 行列 $A$ は固有値 1 をもつ．1 以外の $A$ の固有値をすべて求めよ．また，$A$ の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(e) 行列 $A$ が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 $P$ と対角行列 $\Lambda$ の組を 1 つ求めよ．

(2) $A$ を $n \times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を $n$ 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．$A$ が相異なる $n$ 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \geq 0$ を示せ．

(佐賀大 2022)　　(m20224918)

**0.594** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{bmatrix}$ について　以下の問に答えなさい．<u>答えだけでなく途中経過</u> も記載すること．

(1) 固有値が，2, 3 のとき，$a$, $b$ を求めなさい．

(2) (1) のとき，固有ベクトルを全て求めなさい．

(3) (1) のとき，$A^n$ を求めなさい．

(佐賀大 2022)　　(m20224928)

**0.595** 次の行列 $A$ について, 以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値を求めよ．

(2) 行列 $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 $A$ を以下のように

$$B = P^{-1}AP$$

対角化する行列 $P$ と対角行列 $B$ を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055009)

**0.596** 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 大きさを 1 に規格化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べてできる行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ を計算せよ.

(長崎大 2005)　　(m20055013)

**0.597** 次式で与えられる行列 $A$ について以下の小問に答えよ.　$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$

ただし，各小問は互いに無関係である.

(1) 行列 $A$ に左から $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ を乗じて得られる行列 $BA$ の行列式の値が 2 であった．このときの $a$ と $b$ の関係を求めよ.

(2) 行列 $A$ が固有値 1 を持つとき，$a$ と $b$ の関係を求めよ.

(3) 行列 $A$ が固有ベクトル $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を持つとき，$a$ と $b$ の関係を求めよ.

(長崎大 2007)　　(m20075005)

**0.598** 次の行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(長崎大 2007)　　(m20075008)

**0.599** (1) $N \times M$ の行列 $A$ と $P \times Q$ の行列 $B$ があるとき，行列の積 $AB$ が定義できる条件を述べよ.

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，$A$ は $N \times N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は $N$ 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は $N$ 次元の 0 ベクトルである.

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，$A^n$ が $n \to \infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 1$ である.

(長崎大 2009)　　(m20095010)

**0.600** 2つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ が $a_n = a_{n-1}+b_{n-1}$, $b_n = 3a_{n-1}-b_{n-1}$ を満たすとき，以下の手順に従って $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，$a_0=1$, $b_0=-1$ である．

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$ を満たす行列 $A$ を求めよ,

(2) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(3) $A$ を対角化する行列 $P$ を求めよ．

(4) $A^n$ を求めよ．ただし，$n$ は正の整数である．

(5) 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095014)

**0.601** 次の行列 $A$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(長崎大 2010)　　(m20105006)

**0.602** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルが $\lambda_1 = -1,\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} d \\ 1 \end{pmatrix}$ となるように, $a,b,c,d$ を求めよ．

(長崎大 2010)　　(m20105018)

**0.603** 以下の行列 $A$ の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011)　　(m20115007)

**0.604** 次の行列に対して，固有値および固有ベクトルを求め，対角化しなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

(大分大 2011)　　(m20115106)

**0.605** 行列 $A$ が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている．ただし，$a$ は正の実数とする．

(1) $A$ の行列式を求めなさい．

(2) $A$ の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(i=1,2\,;\ j=1,2)$ を求めなさい．

(3) $A$ の逆行列が存在するための条件と，そのときの逆行列を求めなさい．

(4) $A$ の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(大分大 2011)　　(m20115107)

**0.606** 2次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，行列 $A$ と 2次元のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，2次式 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}$ と定義する．ただし，記号 $T$ は，行列やベクトルの転置を示し，$\boldsymbol{v}^T$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を示すものとする．

(1) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい．

(2) 適当な直交行列 $U$ により行列 $A$ を対角化し，$U^T AU = D$ と表現する．ただし，$D$ は 2 次の対角行列とする．行列 $U$ と $D$ を求めなさい．

(3) (2) の結果を利用して，$f(x,y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい．

(大分大 2012)　　(m20125108)

**0.607** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A$ が逆行列をもつための $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の条件を求めよ．

(2) $A$ の逆行列を求めよ．

(3) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2001)　　(m20015205)

**0.608** 3 次の実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 3 次の正則行列 $P$ を 1 つ求めよ．

(熊本大 2004)　　(m20045204)

**0.609** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$．$B = \lambda I_2 - A$ とする．ただし，$\lambda$ は定数で，$I_2$ は 2 次の単位行列である．次の問いに答えなさい．

(1) $B$ を求めなさい．

(2) $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に自明でない解（$x = y = 0$ ではない解）が存在するような $\lambda$ を全て求め，それぞれの $\lambda$ に対して，$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の自明でない解を求めなさい．

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(4) $A$ の対角化により,$A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は自然数とする．

(熊本大 2008)　　(m20085201)

**0.610** 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を $V$ とし，$V$ の正規直交基底を求めなさい．

(3) 設問 (2) の結果を用いて，行列 $A$ を $R^TAR$ により対角化する直交行列 $R$ を求めなさい．ただし，$R^T$ は $R$ の転置行列である．

(熊本大 2011)　　(m20115201)

**0.611** $xy$ 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである．

$$固有値\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$固有値\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ,\quad 固有ベクトル\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，$xy$ 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．$\alpha$ および $\beta$ を，$x$ および $y$ を用いて表しなさい．

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，$\alpha$, $\beta$, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135202)

**0.612** ベクトル $\boldsymbol{x}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$ に，次の関係があるとする．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)$$

ただし，$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $\boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}(n)$ を求めなさい．

(熊本大 2015)　　(m20155201)

**0.613** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問に答えなさい．

(1) $A$ の逆行列を求めなさい．

(2) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) $A$ は対角化可能かどうか調べ，その理由を示しなさい．

(4) $A^n$ を求めなさい．

(熊本大 2017)　　(m20175201)

**0.614** $xy$ 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) $xy$ 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$$

$\alpha$, $\beta$ を $x$, $y$ を用いて表しなさい．

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha$, $\beta$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2019)　　(m20195203)

**0.615** 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ を用いて，対角行列 $B$ を求めなさい．

(3) 行列 $A^n$ を求めなさい．ただし，$A^n$ は次式で定義される．

$$A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0$, $a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めなさい．

(熊本大 2020)　　(m20205203)

**0.616** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(熊本大 2022)　　(m20225202)

**0.617** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を 2 つの固有ベクトルの和で表せ．

(3)　(2) の結果と固有ベクトルの性質を用いて，　$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$　を示せ.

(宮崎大 2004)　　(m20045305)

**0.618**　次の各問に答えよ.

(1)　平面上の点 $P(2,3)$ および点 $Q(1,4)$ を点 $P'(8,3)$ および点 $Q'(9,4)$ にそれぞれ移す 1 次変換を表す行列 $A$ を求めよ.

(2)　(1) で求めた行列 $A$ の固有値と固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2005)　　(m20055301)

**0.619**　行列　$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ.

(1)　$A$ の固有値 $\lambda_1$ と $\lambda_2$ を求めよ.

(2)　$\lambda_1$ と $\lambda_2$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ をそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2006)　　(m20065301)

**0.620**　行列　$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　について，次の各問に答えよ.

(1)　行列 $A$ の固有値を全て求めよ.　　(2)　行列 $A$ の固有ベクトルを全て求めよ.

(宮崎大 2008)　　(m20085301)

**0.621**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1)　$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たす列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2)　行列 $A$ の固有値の 1 つは 0 である．この固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(宮崎大 2011)　　(m20115301)

**0.622**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1)　行列 $A$ の固有値を求めよ.

(2)　(1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(宮崎大 2012)　　(m20125303)

**0.623**　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1)　行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2)　行列 $A$ の固有ベクトルをすべて求めよ.

(宮崎大 2013)　　(m20135301)

**0.624** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A$ の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) $A^{99}$ を求めよ．

(宮崎大 2016)　　(m20165303)

**0.625** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ．

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 適当な直交行列 $P$ により，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．そのような直交行列 $P$ を 1 つ求めよ．

(宮崎大 2022)　　(m20225301)

**0.626** 行列 $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ について．

固有値方程式：$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を解いて．

行列 $K$ の固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ と対応する規格化された固有ベクトル $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めなさい．

$*$　規格化とは, ベクトルの大きさを 1 にとることである．

(鹿児島大 2005)　　(m20055415)

**0.627** (1) 2 点 $P_1(1,-1,1)$，$P_2(3,1,2)$ を通る直線の式を求めよ．

(2) $x$ 軸，$y$ 軸，$z$ 軸との切片が，それぞれ，3，$-5$，4 である平面の方程式を求めよ．

(3) 座標の原点を $O(0,0,0)$，2 点 $P_1, P_2$ の座標を，それぞれ $(2,1,3)$，$(4,0,1)$ とする．
$\overline{OP_1}$ と $\overline{OP_2}$ のなす角を求めよ．

(4) 2 つの行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，
$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ が成立するか調べよ．

(5) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(鹿児島大 2007)　　(m20075415)

**0.628** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\lambda：\text{定数}) \quad \cdots\cdots(a)$$

を満たす時，以下の問いに答えなさい．

(1) $(a)$ 式を満たす 2 つの定数 $\lambda$（固有値）と 2 つのベクトル $(x, y)$（固有ベクトル）を求めなさい．

(2) (1) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 $A$ を対角化しなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095418)

**0.629** 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2011) (m20115416)

**0.630** 2× 2 の正方行列：$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ があるとき，以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125418)

**0.631** 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2012) (m20125436)

**0.632** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求め，行列 $A$ を対角化しなさい.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

(鹿児島大 2015) (m20155420)

**0.633** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求め，行列 $A$ を対角化しなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(鹿児島大 2016) (m20165416)

**0.634** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185410)

**0.635** 行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有ベクトル $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対応する固有値 $\lambda_1$ を求めなさい．また，行列 $B$ の固有値 $\lambda_2 = 2$ に対応する大きさが 1 の固有ベクトル $\overrightarrow{v_2}$ をすべて求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215410)

**0.636** 行列 $C$ の固有値とその固有ベクトルを求めなさい. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(室蘭工業大 2006) (m20065504)

**0.637** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ と固有ベクトル $u_1$, $u_2$ を求めなさい.

(室蘭工業大 2007) (m20075505)

**0.638** 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ と与えられているものとする．このとき，以下の問題に答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい．すなわち，下の関係を満たす正則行列 $P$ と対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい．もし，対角化が不可能な場合はその理由を述べなさい.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}$（すなわち $\boldsymbol{A}$ の 10 乗）を求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085506)

**0.639** (1) 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $\boldsymbol{P}$ を正則な正方行列として $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ のときに $\boldsymbol{A}$ の固有値と $\boldsymbol{B}$ の固有値は一致することを示しなさい.

(3) $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ として $\boldsymbol{B}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085509)

**0.640** 次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2011)　　(m20115501)

**0.641** 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような，正則な正方行列 $P$ を求めよ．ただし, 行列 $P$ は直交行列（逆行列と転置行列が等しい行列）とする.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115508)

**0.642** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値を求めよ.

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) $A$ を対角化せよ.

(室蘭工業大 2014)　　(m20145501)

**0.643** 行列に関する設問に答えよ.

(1) 下記に示す行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 下記に示す行列 $B$ の固有値，固有ベクトルを全て求めよ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2015)　　(m20155515)

**0.644**　次の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165513)

**0.645**　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A$ の固有値を求め, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $AX = BA$ を満足する行列 $X$ を求めよ.

(室蘭工業大 2017)　　(m20175506)

**0.646**　2 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ について以下を答えよ.

(1) $A$ の固有多項式と固有値を求めよ.

(2) $A$ の各々の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185501)

**0.647**　次の行列 $A$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225503)

**0.648**　以下の行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(室蘭工業大 2022)　　(m20225507)

**0.649**　行列 $A$ について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $|A|$ の値を求めよ.

(2) $A$ の逆行列を求めよ.

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2005)　　(m20055702)

**0.650**　以下に示す行列 $A$ について次の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の行列式を求めよ.

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(香川大 2013) (m20135703)

**0.651** 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

(香川大 2014) (m20145703)

**0.652** 以下に表す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について, 次の各問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて, 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2015) (m20155702)

**0.653** 以下に示す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2017) (m20175705)

**0.654** 以下に示す行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2019) (m20195705)

**0.655** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して, 2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_i$ とその固有ベクトル $x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 適当な行列 $P$ と相似変換 $(P^{-1}AP)$ を利用して, $A$ を対角化せよ.

(島根大 2005)　　(m20055801)

**0.656** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O-xy$ 上に原点 $O$ を始点として描け.

(3) ある四辺形を行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換した像が, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1. -1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O-xy$ 上に描け.

(4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005)　　(m20055809)

**0.657** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ.

(2) 固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005)　　(m20055815)

**0.658** 次の行列の固有ベクトルを求め，この行列を対角化せよ。 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix}$

ただし，$i$ は虚数単位である.

(島根大 2006)　　(m20065813)

**0.659** 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を第 1 列について余因数展開して，2 行 2 列の行列式にして計算せよ.

(2) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(3) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_i$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(4) 行列 $A$ の階数を求めよ.

(島根大 2007)　　(m20075812)

**0.660** 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$， $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$， $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の固有ベクトル $\nu_1$, $\nu_2$ を求めよ.

(3) 行列 $T = [\nu_1, \nu_2]$ とする $x(t) = Ty(t)$ の変換によって, ① を $y(t)$ に関する微分方程式に変形せよ. ただし, $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ である.

(4) 設問 (3) で求めた $y(t)$ に関する微分方程式を解け.

(5) 設問 (4) で求めた解 $y(t)$ を用いて, ① の解 $x(t)$ を求めよ.

(島根大 2007) (m20075815)

**0.661** 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 $A$ の階数を求めよ.

(3) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_i$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2008) (m20085806)

**0.662** (1) 次の行列 $A$ の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 $A$ に対し, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 $P$ を求めよ. ただし, ${}^tP$ は $P$ の転置行列を表す.

(島根大 2010) (m20105807)

**0.663** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) 行列 $A$ の行列式を 1 列について余因子展開して求めよ.

(2) 行列 $A$ の 3 つの列ベクトルは線形独立といえるか. その根拠と共に示せ.

(3) 行列 $A$ の逆行列を求めよ.

(4) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_i$ とその固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ.

(島根大 2010) (m20105809)

**0.664** 次の行列 $A$ について以下の設問に答えよ. ただし, $0 < a < 1/2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

(1) $A^2$ を計算せよ.

(2) $|A|$ を計算せよ.

(3) $A^{-1}$ を求めよ.

(4) $A$ の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

(5) $A^{-1}$, $A^2$ および $A^n$ の固有値を求めよ. ただし, $n$ は自然数とする.

(6) $A^n$ を求めよ.

(7) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(島根大 2010)　　(m20105812)

**0.665** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $A$ を直交行列を用いて対角化せよ.

(島根大 2012)　　(m20125806)

**0.666** 次に示す連立方程式が与えられている時，以下の設問に答えよ．ただし，$c$ は定数である.

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_2 + cx_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(1) 上の方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のように表現する場合に，行列 $A$ と $\boldsymbol{b}$ を示せ．ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ とする.

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(3) $c = 0$ の時，以下の問いに答えよ.

(a) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(b) 問い (a) で求めた固有値の最大なものに関する固有ベクトルを求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155802)

**0.667** 次の 3 次の正方行列 $A$ について，以下の設問に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさが 1 となるように正規化（規格化）すること.

(3) 設問 (2) で求めた固有ベクトルを用いて，行列 $A$ を対角化せよ.

(4) $A^{12}$ を計算せよ.

(島根大 2016)　　(m20165805)

**0.668** 次の微分方程式について，以下の設問に答えよ.

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = A\boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，　$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(1) 行列 $A$ の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ を求めよ．ただし，固有ベクトルは単位ベクトルとして求めること．

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルが互いに直交していることを示せ．

(3) 固有ベクトルからなる行列 $T = [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]$ の逆行列 $T^{-1}$ を求めよ．

(4) $\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{y}(t)$ の変数変換を行い，$\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を導け．

(5) 設問 (4) で求めた $\boldsymbol{y}(t)$ に関する微分方程式を解け．

(6) 設問 (5) で求めた解 $\boldsymbol{y}(t)$ を用い，微分方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175802)

**0.669** 次の 3 行 3 列の正方行列 $A$ について，以下の設問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の対角成分の和（トレース）を求めよ．

(2) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が行列 $A$ の固有ベクトルであることを確認し，対応する固有値を求めよ．

(3) 行列 $A$ の他の 2 つの固有ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ ，およびそれらに対応する固有値を求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化（規格化）し，固有値の小さい方の固有ベクトルを $\vec{b}$ とすること．

(4) 行列 $A$ の 3 つの固有値の和を求めよ．

(5) 行列 $A$ の 3 つの固有ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ から 3 行 3 列の正方行列 $P = [\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ ]$ を作り，その逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(6) 3 行 3 列の正方行列 $L = P^{-1}AP$ を求めよ．

(7) 行列 $L$ のトレースを求めよ．

(8) 行列 $P$ と行列 $L$ を用いて，行列 $A^4$ を求めよ．

(9) 行列 $A^5$ のトレースを求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195802)

**0.670** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $A$ の行列式の値を求めよ．

(2) $A$ の階数を求めよ．

(3) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f$ を次のように定める．

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

(a) $f$ は線形写像であることを示せ．

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195804)

**0.671** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ.　　(2) $A^n$ を求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205803)

**0.672** 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような，行列 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^k$ を求めよ.

(首都大 2003)　　(m20035903)

**0.673** 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられているとき，次の問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を全て求めよ.

(2) その全ての固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 二次形式 $\Phi = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ の標準形が $\Phi = a{\xi_1}^2 + b{\xi_2}^2$ で与えられるとき，係数比 $\dfrac{b}{a}$ を求めよ.
ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ は直交行列 $\boldsymbol{U}$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\xi}$ で表されるベクトルとする.

(首都大 2005)　　(m20055903)

**0.674** 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{C}^n$ を求めよ.

(首都大 2007)　　(m20075902)

**0.675** 行列 $A$ を $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^n$ を求めよ. 但し $n$ は正の整数とする.

(首都大 2010)　　(m20105903)

**0.676** 行列 $A$ を $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値をすべて求めなさい.

(2) $A$ の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 $P$ と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125903)

**0.677** 行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ と行列 $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $AB$ と $BA$ を求めなさい.

(2) $A$ の固有値と大きさ 1 の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(3) $A$, $B$, $AB$ を同一の正則行列を用いてそれぞれ対角化しなさい.

(首都大 2013)　　(m20135903)

**0.678** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $A$ の固有値，および各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求めて，$A$ を対角化しなさい.

(3) $A^n$ の各成分を $n$ を用いた式で表しなさい．ただし，$n$ は自然数である.

(首都大 2014)　　(m20145903)

**0.679** 行列 $A$ について以下の (1),(2) に答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $A$ を対角化しなさい.

(首都大 2015)　　(m20155903)

**0.680** 行列 $A$ について下記の (1),(2),(3) に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) すべての固有値とそれぞれの固有値の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 $P$ と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) $A^5$ を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165902)

**0.681** (1) 次の 2 次正方行列 $A$ の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ．ただし，実数の範囲で扱うものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 $P$ が直交行列であるとき，$a, b, c$ の値をすべて求めよ.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016)　　(m20165910)

**0.682** 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい．

(1) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ とその逆行列を求め，行列 $A$ を対角化しなさい．

(3) $A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は任意の自然数とする．

(首都大 2019)　　(m20195902)

**0.683** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) $A$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P$ をひとつ示し，$A$ を対角化しなさい．

(3) $A^n$ を求めなさい．ただし，$n$ は任意の自然数とする．

(東京都立大 2020)　　(m20205902)

**0.684** 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする．

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$^T$ は，行列の転置を表す．

(1) 行列 $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^TAP$ が対角行列となる直交行列 $P$ を求めよ．

(3) 行列 $A$ の固有値を $\lambda_1$, $\lambda_2$ とするとき，以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 $B$, $C$ を求め，以下の条件を満足していることを示せ．

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T$, $C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times 2}$，なお，$\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ は，すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す．

(d) $B^2 = B$, $C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

**0.685** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ について　次の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値を求めよ．ただし，重複がある場合は，その重複度も答えよ．

(2) $A$ の固有ベクトルを求めよ．

(滋賀県立大 2016)　　(m20166002)

**0.686** 以下の問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$A$ が正則行列かどうか調べ，正則ならば $A^{-1}$ を求めよ．

(2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) $B$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(b) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような $P$，およびそのときの $P^{-1}BP$ を求めよ．

(宇都宮大 2004)　　(m20046101)

**0.687** (1) 行列 $A$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．$A$ の階数（ランク）を求めよ．

(2) 行列 $B$ を $B = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) $\det B = 0$ となるように $\alpha$ を求めよ．

(b) この $\alpha$ に対する $B$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(宇都宮大 2005)　　(m20056101)

**0.688** 次の行列　$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の固有値と固有ベクトル $\lambda_i$，$\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．ただし，各固有ベクトルの最大の成分が 1 となるようにせよ．

(2) $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ が，数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基底となることを示せ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076105)

**0.689** (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ としたとき, $|A| = -2$ となった. この時の $a$ の値を求めよ.

(2) $a$ が (1) の条件を満たすとき, $A$ の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, $a$ が 2 つ以上の値を取るときは最も小さい値を採用する. また, 固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ.

(3) (2) で求めた固有値および固有ベクトルを用いて, $A$ を対角化せよ. その時の対角化行列も求めよ.

(宇都宮大 2010)　　(m20106102)

**0.690** 次の行列 $A$ について下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) 行列 $A$ が対角化可能か調べよ．対角化可能であるときは適当な正則行列を求め，行列 $A$ を対角化せよ．計算経過も記入せよ．

(3) $A = B^3$ を満たす行列 $B$ を 1 つ求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156102)

**0.691** 次の行列 $A$ について，下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $A$ の固有値と，その固有値に対する固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 行列 $A$ が対角化可能であるかを調べ，対角化可能であるときは行列 $A$ を適当な正則行列で対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) $A^n$ を求めよ．ここで，$n$ は自然数とする．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196101)

**0.692** 次の行列 $B$ について，下の問いに答えよ．

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $B$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 行列 $B$ は対角化が可能であるか調べよ，対角化が可能であるならば適当な正則行列を求めて行列 $B$ を対角化せよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206102)

**0.693** 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) $A$ の対角成分の和と $A$ の固有値の和は等しいことを示せ．

(2) $A$ をその固有値と固有ベクトルを用いて対角化せよ．

(はこだて未来大 2008)　　(m20086301)

**0.694** 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $A$ の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルのうち, 成分がすべて整数であるものをそれぞれ一つ求めよ.

(はこだて未来大 2010)　　(m20106301)

**0.695** 2 次実対称行列について，以下の問いに答えよ．

(1) 2 次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 2 次実対称行列 $S$ が正定値であるとは，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} > 0$ が成立することをいう．ここで ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．(1) の行列 $B$ が正定値であることを示せ．

(3) 2 次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2$ とする．行列 $C$ が正定値となるための $\lambda_1, \lambda_2$ の条件を求めよ．

(はこだて未来大 2012)　　(m20126302)

**0.696**　3 次正方行列
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
について，以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2)　(1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3)　行列 $A$ が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 $A$ を対角化せよ．

(はこだて未来大 2015)　　(m20156301)

**0.697**　3 次正方行列
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
について，以下の問いに答えよ．

(1)　行列 $A$ の固有値をすべて求めよ．

(2)　(1) で求めた固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3)　行列 $A$ が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能であれば行列 $A$ を対角化せよ．

(はこだて未来大 2018)　　(m20186301)

**0.698**　行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2007)　　(m20076403)

**0.699**　行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2008)　　(m20086402)

**0.700**　行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2009)　　(m20096402)

**0.701**　行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2010)　　(m20106402)

**0.702**　行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 14 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(東京海洋大 2011)　　(m20116402)

**0.703** 行列 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & -6 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2012)　　(m20126403)

**0.704** 行列 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(東京海洋大 2016)　　(m20166406)

**0.705** 行列 $\begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076501)

**0.706** 次の行列 $A$ について，以下の各問いに答えなさい．ただし，$k$ は実数である.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 $A^{-1}$ を求めなさい.

(2) 行列 $A$ のすべての固有値と，絶対値が最大の固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) 行列 $A$ の第 2 列，第 3 列をそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ となるような $k$ の値を求めなさい.

(和歌山大 2008)　　(m20086501)

**0.707** (1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，$A$ の行列式と，トレースを求めなさい.

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ として，以下の問いに答えなさい.

(a) $B$ の行列式を求めなさい.

(b) $B$ の固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ を求めなさい．ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする.

(c) 固有値 $\lambda_1$, $\lambda_2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ を求めなさい．ただし，各成分は $x_{11} \geq x_{21}$, $x_{12} \geq x_{22}$ を満たし，絶対値の最も小さい整数とする.

(d) 行列 $P$ が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ で定義されるとき，$BP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となることを示しなさい.

(e) 行列 $P$ の逆行列を求めなさい.

(f) $B^n$ を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096501)

**0.708** $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とするとき, 次の問いに答えよ．ただし, $a \neq b$ である.

(1) $P$ の行列式の値と逆行列とを求めなさい.

(2) $PQP^{-1}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106501)

**0.709** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，次の各問いに答えなさい.

(1) $A$ のすべての固有値を求めなさい.

(2) $A$ の各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい.

(3) $A$ を対角化する正則行列 $P$ を求め, $A$ を対角化しなさい.

(和歌山大 2016)　　(m20166504)

**0.710** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の (1)，(2) を求めなさい.

(1) この行列の固有値

(2) この行列の固有ベクトル

(和歌山大 2017)　　(m20176506)

**0.711** 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) 固有値 $\alpha$, $\beta$ に対して，次式が成り立つように，正則行列 $P$ を求めなさい．ただし，$\alpha > \beta$ とする.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(和歌山大 2018)　　(m20186501)

**0.712** 3 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ につて，次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 固有値をすべて求めなさい.

(2) 各固有値に対応する固有ベクトルを 1 つずつ求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ により $A$ を対角化する正則行列 $P$ を一つ求め，$A$ を対角化しなさい.

(和歌山大 20221)　　(m20216501)

**0.713** 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を $\alpha$, $\beta$ とし，$\alpha$ と $\beta$ に対する固有ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{x} = k \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$ ,　$\boldsymbol{y} = h \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ $(h \neq 0)$ とするとき，次の問 1〜問 4 に答えよ.

ただし，$\alpha > \beta$ とする.

問 1 $\alpha$, $\beta$ を求めよ.

問 2 $a$, $b$ を求めよ.

問 3 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 $P$ をひとつ求めよ.

問 4 次式が成り立つように $a_n$ を求めよ.

$$A^n = \begin{bmatrix} 2a_n - 1 & -a_n + 1 \\ 2a_n - 2 & -a_n + 2 \end{bmatrix}$$

(和歌山大 2022)　　(m20226501)

**0.714** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，次の問いに答えよ．$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $A$ の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) $A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I$ を求めよ.

(3) $(A^4 + 3A^3 - 6A^2 - 26A - 12I)^{-1}$ を求めよ.

(京都府立大 2008)　　(m20086703)

**0.715** 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ を考える.

(1) $A$ の行列式の値と逆行列を求めよ.

(2) $A$ の 2 つの固有値と, 各々の固有値に属する固有ベクトルを求めよ. ただし，固有値の 1 つにつき固有ベクトル 1 つを求めればよい.

(東京工科大 2010)　　(m20106908)

**0.716** 次のベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 $A, B, C$ について，あとの問いに答えなさい．回答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{v}$, $B\boldsymbol{v}$, $C\boldsymbol{v}$ について，定義されるときは，それぞれの値を計算しなさい．定義されないときはその理由を答えなさい.

(2) 行列式 $|A|$, $|B|$ をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列 $A$, $B$ の逆行列をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 $B$ の固有値と固有ベクトルをそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2014)　　(m20147001)

**0.717** 次の行列 $A, B, C, D$ について，あとの問いに答えなさい．解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) $AB$ を答えなさい.

(2) 行列 $A, B$ の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 $A, C$ の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい.

(5) 行列 $D$ の固有値と固有ベクトルを答えなさい.

(岩手県立大 2016)　　(m20167001)