[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：曲面

0.1 円柱座標 (r,θ,z) が直交座標 (x,y,z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ.

円柱座標 (r,θ,z) と直交座標 (x,y,z) の関係は以下の通りである.

$$x = r\cos\theta\,,\ \ y = r\sin\theta\,,\ \ z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r,θ,z) が直交曲線座標であることを示せ.

(2) 円柱座標 (r,θ,z) の基本ベクトル $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ を求めよ.

(3) 曲面 $z = x^2+y^2$ と $z = 18-(x^2+y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ の値を求めよ.

(北海道大 2003)　　(m20030101)

0.2 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “·” はベクトルの内積（スカラー積）, “ × ” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{曲面 } \boldsymbol{S}\ :\ 2x+y+2z=6\,,\ x\geq 0\,,\ y\geq 0\,,\ z\geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.3 $u = (x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{grad}\,u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x,y,z) = c$ 　(c : 定数) で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\,u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x,y,z 軸方向の単位ベクトルである．

(2) $\mathrm{grad}\,u\cdot\boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\,u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“ · ” は内積を表している．

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x,y,z) = c$ 　(c : 定数) で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　　(m20070102)

0.4 次の立体について，以下の問いに答えなさい.

曲面 $x^2+y^2=z^2$, 平面 $z=0$, 平面 $z=1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい.

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる. $\boxed{\quad（ア）\quad}$, $\boxed{\quad（イ）\quad}$ にあてはまる式を答えなさい.

$$V = \iint_D \left(1-\boxed{\quad（ア）\quad}\right)dxdy \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ \boxed{\quad（イ）\quad}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.5 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\quad（ア）\quad}$ から $\boxed{\quad（エ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\quad（ア）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（イ）\quad}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\quad（ウ）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（エ）\quad}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\quad（オ）\quad}$ から $\boxed{\quad（キ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\quad（オ）\quad}\,dx\quad\cdots\cdots①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\quad（カ）\quad}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z\geqq 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\quad（キ）\quad}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V=2\iint_{D_1}\boxed{\quad（キ）\quad}\,dxdy\quad\cdots\cdots②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.6 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x}\neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},\quad |\boldsymbol{x}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon>0$ に対して, $S_\varepsilon=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3\ ;\ |\boldsymbol{x}|=\varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_{S}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.7 x, y を実数とし，$0 < x < 2\pi$，$0 < y < 2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ．

(3) $f(x, y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$，$y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.8 x と y を実数とし，関数 $f(x, y)$ を　$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$　と定義する．
不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x, y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．　(2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x - 1)^2 + y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z = f(x, y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.9 3 次の対称行列 A および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $f(x, y, z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで，左上付き添字 ^{t} は転置を表す)．$f(x, y, z)$ を x, y および z の多項式で表せ．

(3) 原点を通り A の固有ベクトルに平行な直線と，2 次曲面 $f(x, y, z) = 18$ との交点をすべて求めよ．

(東北大 2014)　　(m20140502)

0.10 xyz 空間の曲面 $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a, b, c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1, 2, 3)$ が曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点となるとき，a, b, c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x, y, z) = 0$ 上の点 $P(1, 2, 3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a, b, c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.11 xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S} : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4z$ および平面 $\boldsymbol{P} : z = a(x + y + 2)$ について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) 平面 $y = -1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め，図示せよ．

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える．$a=1$ のとき，$\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ．

(4) $a=1$ のとき，曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170502)

0.12 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3z)\,\mathbf{i} + (x^2yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.13 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W: x^2+y^2+z^2 \le 1$ に対する積分

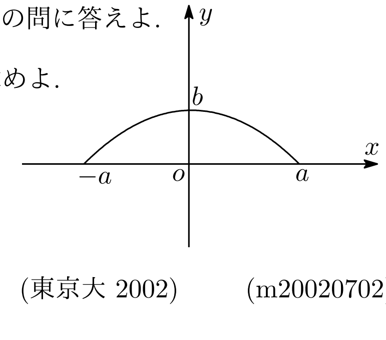
$$K = \int_W (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

(東京大 2000)　　(m20000702)

0.14 図の曲線は点 $(0,b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.



(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \le x \le a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.

(東京大 2002)　　(m20020702)

0.15 2つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

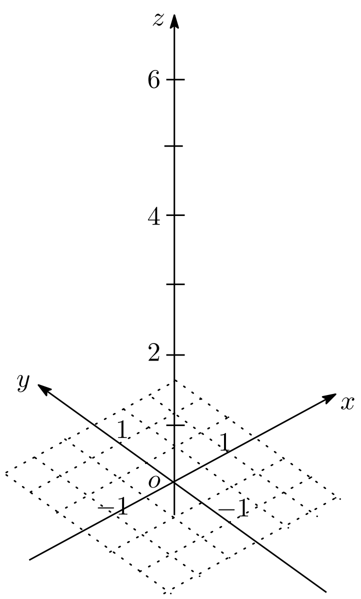
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.16 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0\ ,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.17 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

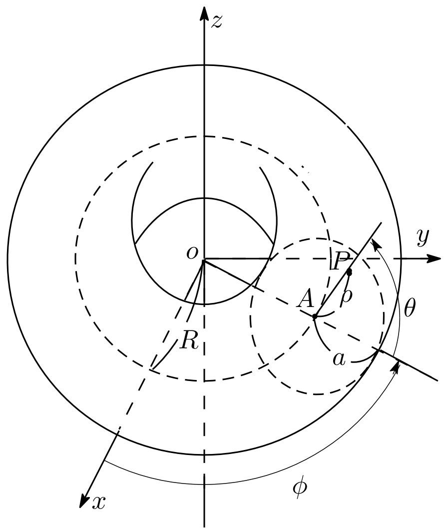
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot dS \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012) (m20120703)

0.18 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2+z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \overrightarrow{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)$$

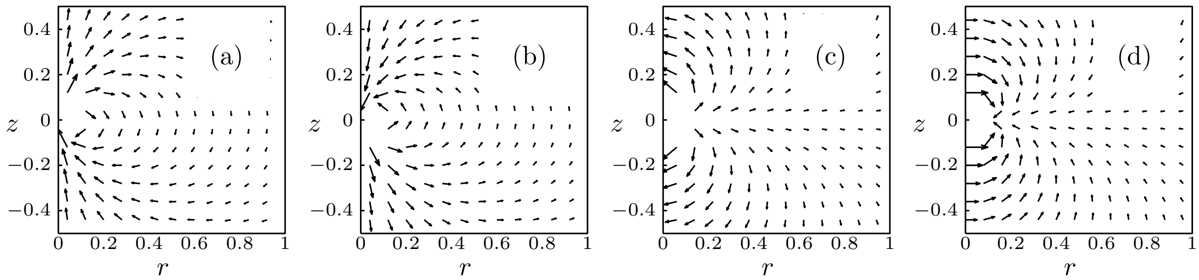
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.19 (1) 次の積分をせよ．　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D : 0 \leq x \leq y \leq 1$

(2) 二つの曲面 ： $z^2 = 4ay$, $x^2 + y^2 = ay$　に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.20 ２次曲面

$$2x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz - zx + 10x - 9 = 0$$

の標準形を求めよ．

(東京工業大 2002)　　(m20020807)

0.21 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，平面 $z = 0$，曲面 $z = x^2 + y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ．ただし，a, b は正の実数とする．

(東京工業大 2013)　　(m20130804)

0.22 関数 $z = x^3 - 3xy + y^3$ の表す曲面を S とする．S 上の点 $P(-2, 1, -1)$ における S の接平面の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060905)

0.23 xyz 空間の 2 つの曲面 $S_1 : z = x^2 + 2x$, $S_2 : z = -y^2 + 4y - 1$ によって囲まれた部分の体積を求めなさい．

(東京農工大 2017)　　(m20170902)

0.24 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi,\ 0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u,\ \sqrt{1+v^2}\sin u,\ v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.25 関数 $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) xyz 空間内の曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y) = 0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ を $x = 2$ の近くで

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots$$

とテイラー展開したときの係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ．

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.26 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) xyz 空間内の曲面 $S : z = u(x,y)$ を考える． このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする．

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ．

(3) $f(r) = r^2 e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ．

$$I = \iint_D u(x,y)\,dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.27 関数

$$f(x,y) = \frac{\pi}{4} - \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z = f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．
ただし，$y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x = \tan y\ \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ．

(3) 曲面 S と平面 $z = 0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.28 三次元空間 O- xyz 座標系で, 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a > 0)$ である.

(千葉大 2010)　　(m20101203)

0.29 三次元空間 $O-xyz$ 座標系で，曲面 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z=a^{-1}$ $(1<a)$ で囲まれた図形を図示し，その体積 V を求めなさい．

(千葉大 2011)　　(m20111203)

0.30 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた，放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$，および，二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ について，以下の問に答えなさい．

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい．

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい．

(3) 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(千葉大 2015)　　(m20151203)

0.31 $2\leq x\leq 2$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases} 2\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\right) \\ 0 & \left(0\leq x\leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい．

(2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい．

(3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい．

（筑波大 2004）　　(m20041306)

0.32 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z)=z^i$ $(i=\sqrt{-1})$ において，$f(i)$ の値をすべて求めよ．

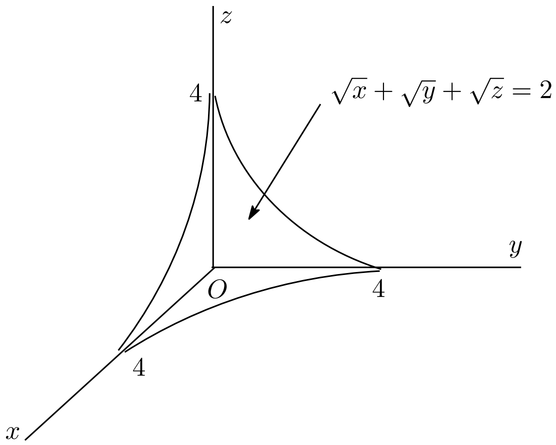
(2) xyz 空間における曲面 $z=(x+y)^2e^{x-y}$ 上の点 $(1,0,e)$ での接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.33 2 次曲面 $x^2+3y^2+3z^2-2yz+2y+2z=0$ の標準形を求めよ．また，曲面の名称を答えよ．

(筑波大 2009)　　(m20091307)

0.34 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A,B,C とし，原点 O から点 A,B,C への距離を OA, OB, OC とする．このとき，$OA+OB+OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい．



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.35 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ （ただし，$(x,y)\neq(0,0)$）と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について，点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，

$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

（筑波大 2013）　　(m20131308)

0.36 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，曲面 $z=5x^2+4xy+8y^2$ と平面 $z=1$ によって囲まれた図形の体積を求めよ．

（筑波大 2014）　　(m20141314)

0.37 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x,y)=(0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x,y)=(1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ．

（筑波大 2015）　　(m20151306)

0.38 曲面 $x^2=y(2+3x+z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい．

（筑波大 2015）　　(m20151318)

0.39 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+4x_1+2x_2-2x_3=0 \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+c=0 \qquad \cdots\cdots②$$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T={}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t=1,2,3)$ は $t_{11}\geq t_{22}\geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1,2,1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1，y_2，y_3 を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017) (m20171305)

0.40 $f(x, y) = x^2 + y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S : z = x^2 + y^2$ を考える．この座標系上の点を (x, y, z) と表し，座標系の原点を $O(0, 0, 0)$ とする．

(1) 点 $A(1, 1, 2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I = \iiint_D (x^2 + y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019) (m20191306)

0.41 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A + 2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A + E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.42 $z = \dfrac{1}{xy},\ x > 0,\ y > 0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x, y) = (1, 2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x + 3y + 9z + 18 = 0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.43 $x + 2y + z + e^{2z} - 1 = 0$ から定まる陰関数 $z = f(x, y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z = f(x, y)$ が表す曲面上の点 $(x, y, z) = (-2, 1, 0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x, y)$ の原点 $(x, y) = (0, 0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.44 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z = f(x, y)$ $\big((x, y) \in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998）　　(m19981401)

0.45 2 変数関数 $z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ について, 以下の各問に答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 11)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(1 + at\,,\ 2 + bt) - f(1, 2)}{t}$ を求めよ．

(3) 「$f(0, 0)$ は極大値である」,「$f(0, 0)$ は極小値である」,「$f(0, 0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ．

(茨城大 2010)　　(m20101701)

0.46 座標平面内の領域 $D = \{(x, y)\,|\,x,\ y$ は実数で $x^2 + y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ．

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x, y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする．

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ．

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x, y)\,dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ．

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.47　関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z = f(x + ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1)　次の等式を示せ.

$$\frac{\partial z}{\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

(2)　$z = f(x + ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.48　実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 - 3x - 3y^2$ に対して，xyz 空間内の曲面 S を

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z = f(x, y)\right\}$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1)　$f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2)　k を正の定数とする．曲面 S 上の点 $(k, k, f(k, k))$ における接平面が原点 $(0, 0, 0)$ を通るように定数 k の値を定めよ.

(茨城大 2017)　　(m20171702)

0.49　実 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y + 2$ を考える．以下の各問に答えよ.

(1)　関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2)　$z = f(x, y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1, 2))$ における接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.50　$-\infty < x < \infty$ である x に対して，$\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす．以下の各問に答えよ.

(1)　$\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ を示せ.

(2)　曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3)　関数 $y = x\sqrt{x^2 + 1} + \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ の微分を求めよ.

(4)　曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の，xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.51　$f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 7$ とする. 点 $(1, 2)$ での曲面 $f(x, y) = 0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051805)

0.52　方程式 $z = f(x, y) = x^2 + g(y) - 1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ.

但し，$g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1)　点 $(1, s, f(1, s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ.

(2)　接平面 S' の z 軸切片が $z = -3s^4 + 2s^2 - 1$ であるとき，$g(y)$ を求めよ.

(3) $z = f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ に停留点を持つとする． このとき，(2) で求めた $g(y)$ を用いて，$z = f(x,y)$ が極大または極小となる (x,y) およびそのときの極値を全て求めよ．

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.53 3 次元空間の曲線 $x = 0$，かつ　$z = y^2 \quad (0 \leqq y \leqq 2)$ を z 軸のまわりに回転させてできる曲面を考える．この曲面を内面とする容器を z 軸の正方向が鉛直上向きになるように置き，単位時間当たり体積 V_0（定数）の水を容器が完全に満たされるまで注ぎ入れる．このとき，次の設問に答えよ．

(1) 容器の底から水面までの高さが h のとき，容器内の水の体積 V を求めよ．

(2) 空の容器に水を注ぎ入れ始めてから時間 t 後の容器の底から水面までの高さを t の関数 $h(t)$ と表す．$h(t)$ に対する微分方程式を導け．また，それを解いて $h(t)$ を求めよ．

(3) 容器を完全に満たしてから静かに 45 度傾けたとき，容器内に残る水の体積を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171801)

0.54 次の問に答えよ．

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x) > 0$ となるとする．$0 < h < b-a$ となる h をとるとき $[a, b-h]$ で定義される関数 $g(x) = f(x+h) - f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ．

(2) 曲面 $z = y^2 - x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.55 曲面 $z = x^2y^3$ 上の点 $(2,1,4)$ における接平面の方程式を求めよ．

（新潟大 2004）　　(m20042003)

0.56 2 変数関数 $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^4 - \dfrac{2}{3}y^3 + 1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) 平面 $z = 2x + 2y + b$ が曲面 $z = f(x,y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172021)

0.57 曲面 $z = x^2 + y^2$ の $z \leqq\ 4$ の部分でできる容器を z 軸正方向を上向きにして水をいっぱいに満たす．以下の問いに答えよ．

(1) 満たされた水の体積を求めよ．

(2) 容器を静かに 45° 傾けて水をこぼしたとき，残った水の体積を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962102)

0.58 $a > 0$ とする．

(1) 平面において，x 軸からの距離と点 $(0,a)$ からの距離が等しいような点からなる曲線の方程式を求めよ．

(2) 空間において，xy 平面からの距離と点 $(0,0,a)$ からの距離が等しいような点からなる曲面 S_1 の方程式を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x+y+z=0$ からの距離と点 $(1,1,1)$ からの距離が等しいような点からなる曲面を S_2 とする．S_2 と平面 $x+y+z=3$ とで囲まれる部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972105)

0.59 $z=x^2+y^2$ とする，以下の問いに答えなさい.

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい.

(2) 空間の曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,c) における接平面の方程式を求めなさい.

(3) 前問の接平面が点 $(0,0,-\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082102)

0.60 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える． A$(r,0)$ とし，円周上に点 B を $\angle$AOB$=30^\circ$ になるようにとる． 下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014)　　(m20142104)

0.61 xyz 空間における曲線 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ について下の問いに答えなさい.

(1) 曲線 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,a^2+b^2) における接平面の方程式を求めなさい． ただし，曲面 $x=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は，f_x，f_y を f の偏導関数とすると，

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる,

(2) 前問の接平面が点 $(0,0,-1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい.

(3) 曲線 $z=x^2+y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(長岡技科大 2017)　　(m20172104)

0.62 a, h を正の定数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=h-a(x^2+y^2)$ とする． $f(x,y)\geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし，その面積を S とする． また，xyz 空間で，曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする． 下の問いに答えなさい.

(1) D を xy 平面上に図示しなさい． また，S を a と h で表しなさい.

(2) $V=\dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

0.63 xyz空間内の二つの曲面　$x^2+y^2-x=0$ と $z^2=x$ で囲まれた部分の体積を求めよ.

(金沢大 2011)　　(m20112208)

0.64 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=xi+yj+zk$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， 曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい． ただし $y\neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS = 4\pi$$

(4) (3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.65 関数 $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上で点 $(1,0,f(1,0))$ における接平面の方程式を $z=ax+by+c$ と表すとき，定数 a,b,c を求めよ.

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ.

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい.

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.66 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x^2,y^2,1)$ について，以下の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ を求めなさい.

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである.

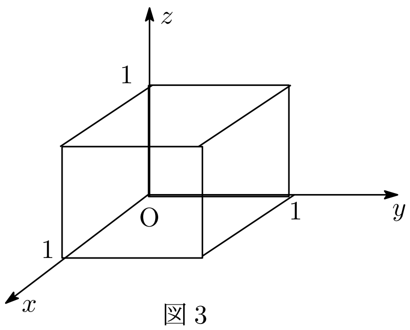


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.67 $a>0$ とし, $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \leqq \dfrac{3}{4}a^2\right\}$ とする. R^3 内の曲面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad (x,y)\in D$$

の面積を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042316)

0.68 関数 $f(x,y)=2xy-x^2-y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1,2)$ を P とする. 以下の問に答えよ.

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052303)

0.69 関数 $f(x,y,z)=\exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f=c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f=\dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ．

(2) $f=c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(=\nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ．

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.70 曲面 $z=x^2+y^2$ 上の点 (1,2,5) における単位法線ベクトルを求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012408)

0.71 2 変数関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.72 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) の行列 A を直交行列を用いて対角化せよ．このとき，用いた直交行列も明記せよ．

(3) 2 次曲面の方程式 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz = 1$ を標準形に変えよ．

(静岡大 2013) (m20132502)

0.73 式（イ），（ロ），（ハ）に関して各問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{（イ）}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{（ロ）}$$

$$z = 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 4\sqrt{3}x + 4y \qquad \text{（ハ）}$$

(1) 式（イ）の A の行列式を求めよ．

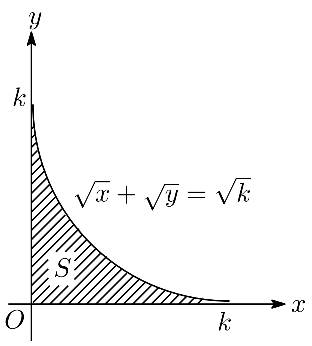
(2) 式（ロ）の固有値 λ を求めよ．

(3) 式（ロ）の固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ．

(4) x, y, z で表される 2 次曲面（ハ）を x, y, z に関して座標変換し，標準形で表せ．標準形とは，楕円面, 一葉双曲面, 二葉双曲面, 楕円放物面, 二次すい面を指す．

(豊橋技科大 1999) (m19992708)

0.74 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k} \quad (k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け．



(2) 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ と z 軸に垂直な平面 $z = t \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z = t \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1 - \sqrt{t})^4$ と表されることを示せ．

(4) 立体 V の体積を求めよ．

(豊橋技科大 2014) (m20142701)

0.75 関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t),\ y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0}=0$ をみたしており，

さらに $x(0)=1,\ y(0)=0,\ \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0}>0$ とする．$t=0$ のとき，

単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}}\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019) (m20192701)

0.76 曲面 $x^2+y^2/4+z^2=1$ 上の点 $(1/2,\sqrt{2},1/2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 1998) (m19982903)

0.77 曲面 $z=1-x^2-y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001) (m20012903)

0.78 xyz 空間で円柱 $x^2+y^2=4$，xy 平面，放物面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた領域を D とし，D の境界を S とする．$\mathbf{F}=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}-z\mathbf{k}$ とする．

(1) ベクトル場 $\mathbf{F}$ の発散を求めよ．

(2) 発散定理を用いて，ベクトル場 $\mathbf{F}$ の曲面 S を貫く外向きの流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2003) (m20032904)

0.79 xyz 空間内の半円柱面 $y^2+z^2=1$，$z \geqq 0$ を 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ によって切ったときに得られる曲面

$$S=\{(x,y,z)\,|\,y^2+z^2=1,\ z\geqq 0,\ 0\leqq x\leqq 1\}$$

に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ が外向きに（つまり S 上の $z>0$ なる点では z の正方向に）貫く流束 (flux) を求めよ．

(名古屋工業大 2005) (m20052904)

0.80 関数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3-y$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $P\big(-1,1,f(-1,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2017) (m20172901)

0.81 xyz 空間中の曲面 $z=5-x^2-y^2$，z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒，および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ．

(三重大 2016) (m20163115)

0.82 関数 $f(x,y)=x^y\ \ (x>0,\ y>0)$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(e,1,f(e,1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008) (m20083403)

0.83 関数 $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ について次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,2,2)$ における接平面を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2011)　　(m20113403)

0.84 関数 $F(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ について次の問に答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x,y)$ の点 $(1,1,5)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 微分可能な関数 $y = y(x)$ が $f(x, y(x)) = 5$ を満たすとき，導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123402)

0.85 関数 $f(x,y) = (2x+1)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x,y)$ の，点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153402)

0.86 xy 平面上の関数 $f(x,y) = \dfrac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z = f(x,y)$ の，点 $(1,1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183404)

0.87 曲面 S : $x^2 + y^2 - z^2 + x + y + 2 = 0$ $(z > 0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S と平面 $z = 2$ の交線の長さを求めよ.

(2) 曲面 S と平面 $z = 2$ に囲まれた領域の体積を求めよ.

(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上にあるとき，$x + y - 2z$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163508)

0.88 次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ.

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ.

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ. ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと.

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ.

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y$, $Y-Z$, $Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ. その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること.

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.89 xy 平面上の閉領域 D を

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

と定め,

$$z=x^2-y^2 \qquad ((x,y)\in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする. 以下の各問いに答えよ.

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V=\int_D |x^2-y^2|dxdy$$

を求めよ.

(2) S の曲面積を求めよ.

(神戸大 2021) (m20213806)

0.90 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ $(a,b>0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0,y_0,z_0), $(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007) (m20073905)

0.91 3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ.

(1) 点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする. ただし, $x^2+y^2\leq 9$ である. 線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す. このとき, z を x,y の関数で表せ.

(2) 問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく. 三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は,

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる. ただし, $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 9\}$ である. この 2 重積分を計算することにより, V の値を求めよ.

(広島市立大 2011) (m20114203)

0.92 $x-y$ 平面の領域 $D\ :\ 0\leq y\leq x^2\leq 1$ 上で, 曲面 $z=xe^{-y}$ と平面 $z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074613)

0.93 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) 空間における領域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\leqq\ a^2\ \ 0\leqq\ z\leqq\ f(x,y)\right\}$$

の体積を求めよ. ただし, $0<a<1$ とする.

(愛媛大 2013) (m20134603)

0.94 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+2x^2+3y^2}$ とする.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $\bigl(2, 1, f(2, 1)\bigr)$ における接平面の方程式を求めよ．

(愛媛大 2022)　　(m20224608)

0.95 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x, y)$ で定義される曲面の点 (a, b, c)，$c = f(a, b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034702)

0.96 xyz 空間内の円柱面 $T : x^2 + y^2 = x$ と曲面 $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ について，次の設問に答えよ．

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034703)

0.97 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を，z_0 を用いて表せ．

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.98 2 変数関数 $z = x^2 - y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z = 0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる立体図形：$0 \leqq z \leqq x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の体積を求めよ.

(3) $z = x^2 - y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取られる部分：$z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.99 $\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す．また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P = (1, 1, -2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる. このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.100　3 次元空間内で

$$S \,:\, (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1)　曲面 S が $z = f(x,y)\,,\quad (x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ dxdy$$

であることを示せ.

(2)　半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.101　xyz 空間において，　$z = e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ.

(1)　曲面 Σ と　$z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である.

(2)　曲面 Σ と　$z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ.

(3)　V を $V_1,\ V_2$ と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$　を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.102　$a > 0$ として，xy 平面上の曲線 $(a - x)y^2 = a^2 x$ を考える.

(1)　上の曲線の概形をかけ.

(2)　上の曲線を $x = 0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.103　3 次元空間において二つの曲面　$A \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\quad B \,:\, x^2 + y^2 = x$　を考える.

(1)　これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ.

(2)　曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ.

(九州大 2008)　　(m20084711)

0.104　C を区間 $0 \leqq\ t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1)　導関数 $\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である．

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.105 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 　について考える．

(1) $f(x,y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) 以下の条件下のもとで $f(x,y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.106 曲面 $z=x^2+y^2$ の点 $(3,4,25)$ における接平面と法線の式を求めよ．

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034803)

0.107 2 変数関数 $z=f(x,y)=e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の上の点 $P\left(0,\dfrac{\pi}{2},1\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

（宮崎大 2004）　　(m20045301)

0.108 $z^2=-xy+x-5y+18$ を満たす実数の組 (x,y,z) によって定まる空間内の曲面を S とする，このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 原点と曲面 S 上の点 (x,y,z) との距離を r とするとき，r^2 を x,y で表した式 $f(x,y)$ を求めよ．

(2) (1) で得られた式 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(宮崎大 2008)　　(m20085302)

0.109 2 つの 2 変数関数

$f(x,y)=x^3+2x^2y-4x+y$,

$g(x,y)=e^{-x^2-y^1}$

について，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ における値 $f(0,0)$，$g(0,0)$，そして $(x,y)=(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$，$g_x(0,0)$，$g_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $z=f(x,y)$，$z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\big(0,0,f(0,0)\big)$，$\big(0,0,g(0,0)\big)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ．
ただし，曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\big(a,b,h(a,b)\big)$ における接平面の方程式は
$z-h(a,b)=h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$
である．

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば，交わりの図形を表す方程式を求めよ．交わらないならばその理由を書け．

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.110 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=(x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV = \iiint \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.111 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ.

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ.

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ.

(3) この曲面上の $x = 2,\ y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする．V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ.
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.112 $z = x^2 + y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) $w = \log(z)$ の関係があるとき，2 階偏導関数 $w_{xx},\ w_{xy},\ w_{yx},\ w_{yy}$ を求めよ.

(2) 曲面 z と平面 $x + y = 2$，ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ．ただし，体積 V は計算で求めなくともよい.

(香川大 2016)　　(m20165702)

0.113 円柱 : $x^2 + y^2 \leq 1$ のうち放物曲面 : $z = 2 - x^2 - y^2$ と平面 : $z = 0$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

(香川大 2022)　　(m20225704)

0.114 $f(x,y) = \dfrac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) $a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ とおく.
2 重積分　$\displaystyle I(a) = \iint_{d(a)} f(x,y)\,dxdy$　を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205807)

0.115 曲面 $\{(x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\ :\ z = x^2 + xy + y^2\}$ の点 $(1,-1,1)$ における法ベクトルを求めよ.

(はこだて未来大 2007)　　(m20076306)

0.116 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y}$ の $(x,y) = (1,3)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2007)　　(m20076505)

0.117 (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x}$ を求めなさい.

(2) $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} + \dfrac{z^2}{5^2} = 3$ で表される曲面の，点 $(2,3,5)$ における法線の方程式を求めなさい.

(3) 次の 2 重積分を極座標変換を利用して求めなさい.

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dxdy \ , \quad D = \{(x, y) \mid x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0\}$$

(和歌山大 2008)　　(m20086502)

0.118　曲面 $z = e^{x-y-1}$ の $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2010)　　(m20106507)