[選択項目]　年度：1991〜2023 年　文中：球面

0.1　3 次元空間上に存在する 3 点 $A(12, 12, 0)$, $B(0, 12, 12)$, $C(12, 0, 12)$ について，次の問いに答えなさい.

(1)　3 点からなる三角形 ABC の重心 G の座標を求めなさい.

(2)　重心 G を中心とする半径 4 の球面の方程式を示しなさい.

(3)　上の (2) で求めた球面の半径が 4 から毎秒 2 で増加するとき，球面が原点 $O(0, 0, 0)$ に達するまでの時間を求めなさい.

(岩手大 2016)　(m20160301)

0.2　点 O を原点とする xyz 座標空間において，中心が点 $(2,\ -1,\ -2)$ で，点 O を通る球面を S とする. 次の問いに答えなさい.

(1)　球面 S の方程式を求めなさい.

(2)　球面 S と xy 平面の交わりは円になる．この円の中心の座標と半径を求めなさい.

(3)　球面 S と平面 $z = k$ の交わりが半径 1 の円になる．k の値を求めなさい.

(岩手大 2018)　(m20180301)

0.3　3 次元直交座標系 (x, y, z) において，中心が点 $(-1, 2, 4)$ で半径 5 の球面を S とする.
次の問いに答えなさい.

(1)　球面 S の方程式を求めなさい.

(2)　球面 S の中心の x 座標が毎秒 2 で増加するとき，その球面の方程式を求めなさい．ただし，時刻 $t = 0$[秒] のときの中心は点 $(-1, 2, 4)$ とする.

(3)　上の (2) で求めた球面 S と平面 $x = 4$ との交わりが半径 4 の円になるときの時刻 t[秒] を求めなさい.

(岩手大 2019)　(m20190301)

0.4　(1)　点 $A(-3, 2, 6)$, 点 $B(5, 2, 0)$ を直径の両端とする球面 C の方程式を求めなさい.

(2)　球面 C と yz 平面の交わりは円になる．この円の中心座標と半径を求めなさい.

(3)　球面 C と x 軸の交点は 2 点存在する．この交点間の距離を求めなさい.

(岩手大 2021)　(m20210301)

0.5　平面 $2x + y + 2z = 0$ と球面 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい．ただし，空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には，その証明もしなさい.

(秋田大 2003)　(m20030403)

0.6　円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ.

(1)　領域 R の概形を描け.

(2)　変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のヤコビアン $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(3)　領域 R の体積 V を求めよ.

(東北大 2006)　(m20060501)

0.7 xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ．

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ．

(3) 領域 R の面積を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110501)

0.8 xyz 空間に原点 O を中心とする半径 1 の球面 S_1，点 $P(2,0,a)$ を中心とする半径 r の球面 S_2 がある．以下の問に答えよ．ただし，a, r はそれぞれ実数であり，$r>0$ とする．

(1) S_1 と S_2 が交線をもつ r の範囲を a を用いて表せ．

(2) S_1 と S_2 が交線をもつとき，交線を含む平面の方程式を求めよ．

(3) $a=0$, $r=\sqrt{3}$ のとき，S_1 と S_2 の交線を C とする．交線 C の方程式を求めよ．

(4) 点 $Q(0,0,\sqrt{2})$ と (3) で求めた交線 C 上の点 R を通る直線が xy 平面と交差する点を T とする．点 R が交線 C 上を動くとき，点 T の軌跡の方程式を求めよ;

(東北大 2019)　　(m20190502)

0.9 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．また，点 A，点 B を直径の両端とする球面を S とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB 上に点 P があり，点 A と点 P の間の距離を s とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ．

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，球面 S の方程式を示せ．

(3) $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(0,2,1)$ のとき，点 $D(0,0,d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする．ただし，d は $d>1$ を満たす実数である．

(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする．点 T の座標を $(p,q,0)$ と表すとき，p および q が満たす方程式を求めよ．

(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し，その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210504)

0.10 点 $O(0,0,0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0,0,1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0,0,2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x,y,z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F}=(x^3z)\,\mathbf{i}+(x^2yz)\,\mathbf{j}+\{(x^2+y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I=\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ただし，**i, j, k** は x,y,z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.11 半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001)　　(m20010702)

0.12 (1) xyz 空間において, 3 点 $A(1,3,1)$, $B(2,4,3)$, $C(3,-3,-1)$ を通る平面を α とする.

(a) 平面 α の方程式を求めよ.

(b) 点 $P(1,1,1)$ からの距離が 5 であり, 平面 α に平行な平面の方程式を求めよ.

(c) (b) で求めた平面に接し, 点 P を中心とする球面を S とする, 平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ.

(2) 四面体 $OABC$ において, 線分 AB の中点を P, 線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q, 線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする, また, 3 点 O,B,C を通る平面と直線 AR の交点を S, 直線 OS と直線 BC の交点を T とする.

(a) $\overrightarrow{OA}=\vec{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{\boldsymbol{c}}$ とするとき, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{c}}$ を用いて表せ.

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と, 四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1:V_2$ を求めよ.

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は, 無関係である.

(東京大 2011)　　(m20110703)

0.13 (1) 対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における関数

$$f(x,y,z)=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

の最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1995)　　(m19951102)

0.14 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $\mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき,

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 t を求めよ.

(3) 3 変数関数

$$f(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy+2xz$$

の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1996)　　(m19961102)

0.15 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V=\iint_D \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,, \quad D=\{(x,y)\mid(x-a)^2+y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D=\left\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008)　(m20081203)

0.16 三次元空間中に，球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱面 $x^2+y^2=ax$ がある．ただし，$a>0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．
$v=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy\,,\qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2 \leq ax\right\}$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい．
$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2013)　(m20131203)

0.17 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2+y^2 \leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$（ただし，$a>0$）について，以下の問に答えなさい．

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい．

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい．

(千葉大 2017)　(m20171203)

0.18 球面 $C: x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ．

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ．

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2007)　(m20071332)

0.19 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot dS$ を，発散定理を用いて求めよ．S は原点を中心とする半径 1 の球面とする．

(埼玉大 2016)　(m20161405)

0.20 ユークリット空間内に 3 点 $P(-1,3,1)$, $Q(2,1,3)$, $R(5,-4,2)$ がある．2 点 P と Q を通る直線を ℓ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) R と ℓ の距離を求めよ．

(3) ℓ に関して R と対称な点 R' の座標を求めよ．

(4) R と R' を直径の両端とする球面の方程式を求めよ．

(5) R と R' を通る球面の中心の軌跡の方程式を求めよ．なお，球面の中心とは，球面の定める球の中心のことである．

(新潟大 2013)　　(m20132005)

0.21 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R < r$ では $\rho(r) = 0$ である．

(1) 半径 $r + \triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.22 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される空間の 1 次変換を f とする．点 $P(x, y, z)$ が球面 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上を動くとき，点 $f(P)$ と定点 $Q(0, 1, 0)$ との距離の最大値および最小値を求めよ．

(長岡技科大 1995)　　(m19952105)

0.23 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $y > 0$, $z > 0$ の部分を M とし，$A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$ とする．M 上の点 $P(x, y, z)$ から xy 平面に下ろした垂線の足を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABQ の面積 S を x, y で表せ．

(2) 三角錐 $PABQ$ の体積 V を x, y で表せ．

(3) P が M 上を動くとき，V の最大値を求めよ．

(長岡技科大 1999)　　(m19992101)

0.24 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $z \leqq 0$ の部分でできる容器について以下の問いに答えよ．

(1) 水深 $h\,(0 < h \leqq 1)$ まで水を入れたとき，水の量を求めよ．

(2) 水をいっぱいに満たしてから静かに角度 $\theta\,(0 < \theta \leqq 90^\circ)$ 傾けるとき，こぼれる水の量を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012104)

0.25 xyz 空間において, 球面 S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と点 $A(3, 0, 0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $x = c$ と球面 S とが交わるような実数 c の範囲を求めよ．

(2) c が前問の範囲を動くとき, 平面 $x = c$ と S との交わりの円を底面とし A を頂点とする円すいの体積を最大とする c の値を求めよ．

(長岡技科大 2005)　　(m20052103)

0.26　３次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とします．x, y, z は直交座標系の座標で，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです．３次元ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\, U(r)$$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\ ,\ \ U(r) = \exp(-ar)$$

で，a は定数です.

(1)　div $\boldsymbol{A}$　　　(2)　rot $\boldsymbol{A}$

(3)　３次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B = \oint \boldsymbol{A} \cdot da$$

(金沢大 2005)　　(m20052210)

0.27　$a > 0$ とする．座標空間内に球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

(金沢大 2009)　　(m20092208)

0.28　位置ベクトル $\boldsymbol{r} = xi + yj + zk$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，曲面 S の面要素を dS，dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1)　$\nabla \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい．ただし $y \neq 0$ とする.

(2)　原点 O を含まない閉曲面 S に対して，以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS$$

(3)　原点 O を含む半径 a の球面 S に対して，次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS = 4\pi$$

(4)　(3) の関係式が，原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.29　半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (a \sin\theta \cos\phi,\ a \sin\theta \sin\phi,\ a \cos\theta)$$

と表す．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．以下の問いに答えよ.

(1)　以下のベクトル積

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ.

(2)　次の積分を求め，何を表すか答えよ.

$$\iint_D \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

ただし，$|| \cdot ||$ はベクトルの長さを表し，領域 D は θ, ϕ の動く範囲，すなわち $D = \{(\theta,\ \phi \mid 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$ である.

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.30 (1) 球面 S : $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$ の中心 P の座標と半径を求めよ．

(2) 直線 : $x=2y-2=-z+1$ と直交し，点 $(a,0,0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ．

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ．

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）．

(豊橋技科大 2007)　　(m20072704)

0.31 3 次元空間内で，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と円柱面 $x^2+y^2=x$ によって囲まれる部分の体積を求めなさい．

(三重大 2013)　　(m20133108)

0.32 (1) $2x+y+2z=3$ で表される平面 A と，$x^2+y^2+z^2=5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2) $x+y+z=1$ で表される平面 A と，$2x+y+z=1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3) ある平面に点 A,B,C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a,b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c,d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173102)

0.33 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$　$(a>0)$ の $x^2+y^2=ax$ の円柱内の体積を求めよ．

(京都大 1996)　　(m19963302)

0.34 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ．

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ．

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ．

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q,　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする．　$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ．

(大阪大 2005)　　(m20053503)

0.35 ベクトル $\boldsymbol{p}=(p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q}=(q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$,　$\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B}=(B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C}=(C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A\cdot(B\times\ C)=B\cdot(C\times\ A)=C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(4,3,5)$, $\boldsymbol{b}=(3,1,4)$, $\boldsymbol{c}=(8,3,2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\,\cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u\,\cos v\,\boldsymbol{j} + \sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r,\ \ 0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqq\ v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.36 原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(= \boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\ \boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\ \boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\ \boldsymbol{i}_y + r\sin v\ \boldsymbol{i}_z$$
$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.37 円柱面 $x^2 + y^2 = bx$ と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234103)

0.38 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\,,\quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)$,　$(x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ．

(2) 半径 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.39 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ を含む平面 α が, 座標の原点 $O(0,0,0)$ を中心とする半径 r の球面 β と接している.

(1) 点 P が球面 β 上にあるとき, 平面 α を表す方程式を求めよ.

(2) 点 P が球面 β 上にないとき, 平面 α に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ が満たすべき条件を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104703)

0.40 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める．

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す．

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z=f(x,\ y)$ とする．

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I=\displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える．

このとき，次の各問に答えよ．

(1) 方程式 $z=f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ．

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

$$I=\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}}\left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}}\boxed{\quad\text{オ}\quad}\,d\theta\right)dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ．

(4) I を計算することによって，$V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ．

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.41 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$ および点 $B(-2,2,0$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle OAB$ において $\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(2) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ

(3) 原点 O を中心とする半径 R の球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ が直線 ℓ と点 Q で接するとき，半径 R ならびに点 Q の座標を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155404)

0.42 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える．

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)=(x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ．

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ $(|\boldsymbol{n}|=1)$ を求めよ．

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV=\iiint \triangledown\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ．

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)