[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：マクローリン

0.1 $e^x \cos x$ と $\tan x$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ．

(北海道大 2017)　(m20170101)

0.2 次式をマクローリン展開したとき，x の 0, 1, 2, n 次の項を求めなさい．

$$\sqrt{e^{3x}}$$

(北海道大 2020)　(m20200104)

0.3 次の問いに答えよ．

(1) $f(\theta) = \sin\theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ．

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$

（ただし $0 < \theta < 1$）

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．

(3) $f(\theta) = \cos\theta$ を無限級数へ展開し，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を証明せよ．

(4) $f(t) = 5 + 0.4\sin\omega t + 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t + 0.3\sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ．

$$f(t) = \sum_{n=-3}^{3} C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4\sin 2\omega t + 0.3\cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ．

$$f(t) = A\sin(2\omega t + \phi)$$

（岩手大 2004）　(m20040303)

0.4 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のように与えられる．

$$f(x) \sim f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots$$

ただし，f' と f'' は，それぞれ f の導関数と第 2 次導関数を示す．

(1) 関数　$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$　をマクローリン展開し，x^2 の項まで示せ．

(2) 以下の関係が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{Tan}^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

ただし，関数 $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ は，関数 $y = \tan x$ の逆関数であり，原点を通る．

(3) 関数　$F(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x$

について，$-\infty < x < \infty$ での増減・極値・グラフの凹凸・変曲点を調べよ．

(4) $y = F(x)$ のグラフの概形を描け．

(東北大 2003)　(m20030501)

0.5 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，log は自然対数であり，ln とも書く．

(1) $\log(1-x)$　　(2) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003)　(m20030605)

0.6 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を考える．

(1) 関数 $f(x)$ の $x=0$ のおけるマクローリン展開を考え，３次関数による近似 $S_3(x)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-k}}{k}$ を求めなさい．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090603)

0.7 (1) $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．

(2) $\sin 1$ の近似値を小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130607)

0.8 逆正接関数について以下の問に答えよ. ただし値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(1) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(a-x)=\dfrac{\pi}{4}$ が実数解をもつ a の範囲を求めよ.

(2) $\left(\tan^{-1}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ を示せ.

(3) $\displaystyle\int\tan^{-1}x\,dx$ を求めよ.

(4) $\tan^{-1}x$ を x^{10} の項までマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160609)

0.9 逆三角関数 $f(x)=\sin^{-1}x$　(ただし，$-\pi/2\le f(x)\le\pi/2$) について，以下の問いに答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフを描け.

(2) $\cos\left(\sin^{-1}x\right)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ を x で微分せよ.

(4) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(5) $y=f(x)$ として $y''(1-x^2)=y'x$ がり立つことを示せ.

(6) $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170605)

0.10 以下の各問いに答えよ．ただし，log はすべて自然対数とする.

(1) $f(x)=\log(1-x)$　$(|x|<1)$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，剰余項の評価はしなくてもよい.

(2) $0<x<1$ において $\dfrac{x}{x-1}<\log(1-x)$ であることを示せ.

(3) $\log 2019$ の値の 10 進小数第 2 位を四捨五入することにより小数第 1 位まで求めよ．ただし，必要ならば $\log 2=0.693147$ の近似値を用いてよい.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200610)

0.11 関数 $\cosh x$ をマクローリン展開し, 0 でない最初の 3 項を求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210606)

0.12 原点を出発点として数直線上の点 $(0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を 1 ステップごとに確率 q で $+1$，確率 $r=1-q$ で -1 だけ移動する点がある．n を自然数とするとき，$2n$ ステップ後の点の位置を x_n とする．たとえば $x_1=2$ となる確率は q^2，$x_1=0$ となる確率は $2qr$, $x_1=-2$ となる確率は r^2 である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $x_2=0,\ x_3=0$ となる確率をそれぞれ求めよ.

(2) $x_n = 0$ となる確率を求めよ.

(3) $2n$ ステップ後に初めて原点に戻ってくる確率を考える. すなわち $x_n = 0$ かつ自然数 $m < n$ に対し $x_m \neq 0$ を満たす確率である. この確率は $z = qr$ の関数として $u_n(z) = 2a_n z^n$ として表現できる.

このとき $n \geqq 2$ で $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ が成立することが示される. 原点を出発し, いつかは原点に戻ってくる確率を $U(z)$ とする. $U(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ である. また, $\{U(z)\}^2$ は $U(z)$ および z を用いて簡潔に記述することができる. 以上のことを用いて, $U(z)$ を求めよ.

(4) $U(z)$ をマクローリン展開し, a_n を n を使って表せ.

(東京大 2013)　　(m20130702)

0.13 ある定係数 2 階線形常微分方程式が, 次のように与えられている.

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり（n は自然数）, α は 0 でない実数定数とする.

以下の問いに答えよ.

(1) x を変数, k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し, x の 3 次の項まで書け. ここで, e は自然対数の底である.

(2) 関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり, 式 $(*)$ を n 回微分したとき, 次の方程式が成り立っているとする.

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を, $f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!}$ に対し, (2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより, $f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \left[f^{(1)}(0) - \alpha f(0)\right]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ. ここで, m は 0 以上の整数であり, $f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし, $0! = 1$ とする.

(4) 次の微分方程式を, 条件 $f(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = p - 2$ （p は実数定数）のもとで解け.

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5) (4) で求めた $f(x)$ について, $f(x) = 0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め, それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ.

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.14 (1) 次の関数をマクローリン展開し, ゼロでない最初の 3 項を示せ.　　$\tan^{-1} x$

(2) 次の級数の収束域を求めよ.　　$\dfrac{2}{1\cdot 3} + \dfrac{3x}{2\cdot 4} + \dfrac{4x^2}{3\cdot 5} + \cdots\cdots$

(東京工業大 2002)　　(m20020802)

0.15 (1) 関数 $f(x) = x\cos x$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \log(1+x)}{x\sin x}$,　　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+x)}{e^{x^2} - 1}$

(電気通信大 2007)　　(m20071003)

0.16 関数 $u(x,y,t) = \dfrac{1}{4\pi t}e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}$　$(t > 0)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ および $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

以下では, $t > 0$ を定数とする.

(2) $u(x, y, t)$ の $x.y$ に関するマクローリン展開

$$u(x, y, t) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots$$

の係数 a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02} を求めよ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \iint_{x^2+y^2\leq R^2} u(x, y, t)\, dxdy$ を計算せよ.

(電気通信大 2013)　　(m20131003)

0.17 次の関数について, 0 でない最初の 4 項までマクローリン展開せよ.

$x \sin 2x$

(横浜国立大 2016)　　(m20161107)

0.18 次の問に答えなさい. ただし, $\log x$ の底は, 自然対数の底 (e) とする.

(1) (a) 関数 $\log(1 + x)$ と $x \cos x$ を, それぞれ 3 次の項までマクローリン展開しなさい.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\log(1 + x)} - \frac{1}{x \cos x} \right)$ を求めなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 3^n}$ を求めなさい.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\log x + \sqrt{\log x}} - \sqrt{\log x - \sqrt{\log x}} \right)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} (1 - \tanh x)^{\frac{1}{\sin x}}$ を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171201)

0.19 $\sin x$ のマクローリン多項式を利用して $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ を計算したい. 誤差を 0.002 以下にするには, 何次のマクローリン多項式を利用すればよいか示せ.

(筑波大 2003)　　(m20031308)

0.20 関数 $f(x) = (2e^x + a)^4$ が与えられている. $f(x)$ を x についてマクローリン展開（$x = 0$ の周りでのテイラー展開）をして x^2 の項まで求めよ. ただし, a は定数である.

(筑波大 2008)　　(m20081322)

0.21 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 　$(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である． このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}'=e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x)=e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x=0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.22 次の問いに答えよ．

(1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ．

(2) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 \cosh x\,dx$$

(3) 次の積分を計算せよ．

$$\int_0^1 (1-x)\cosh x\,dx$$

(4) $n=0,1,2,\cdots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\int_0^1 (1-x)^n\cosh x\,dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013)　　(m20131304)

0.23 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.24 (1) $x>0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x)\equiv\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1)=n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x$ $(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}})$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n\to\infty}(1+2^{-2}+3^{-3}+\cdots+n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.25 (1) 関数 $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ をマクローリン展開することにより，次式を導き出せ．

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} {}_{\alpha}\mathrm{C}_i x^i \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，${}_{\alpha}\mathrm{C}_i$ は次式で表される．　${}_{\alpha}\mathrm{C}_i = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$　$(i \geqq 1)$

(2) 式 ① を用いて次の関数 $g(x)$ のマクローリン展開式を x^3 の項まで求めよ．　$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$

(埼玉大 2007)　　(m20071401)

0.26 (1) 関数 $x\cos x$，$\log(1+3x)$ をそれぞれ 3 次の項までマクローリン展開せよ．

(2) (1) の結果を用いて極限 $\displaystyle\lim_{x\Rightarrow 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right\}$ を求めよ．

(埼玉大 2018)　　(m20181404)

0.27 関数 $g(x) = xe^{-\frac{x}{2}}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ について以下の $\boxed{ア}$〜$\boxed{ク}$ にあてはまる値を求めよ．

(1) $g(x) = 0$ を満たす x の値は $\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ である．

(2) $g(x)$ の傾きが 0 となる x の値は $\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ である．

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} g(x)dx = \boxed{オ}$ である．

(4) $g(x)$ のマクローリン展開の第 3 次までの項は

$$g(x) \approx \boxed{カ}\,x + \boxed{キ}\,x^2 + \boxed{ク}\,x^3$$

となる．ただし関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots$$

である．

(図書館情報大 2002)　　(m20021607)

0.28 関数 $f(x) = \log(1+\sin x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい．

(山梨大 2011)　　(m20111805)

0.29 (1) 単位円周 $x^2+y^2=1$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^3+y^2$ の値域を求めよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y) = \sin x\cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ．

(信州大 2005)　　(m20051904)

0.30 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ．

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.31 関数 $F(x)$ は　$F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$　で与えられるものとする．

また，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　であることがわかっている．

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}$ を求めよ．　　(2) $\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ．

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ．(a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2t^2}dt$　（a は正の定数とする）　(b) $\displaystyle\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.32 次の関数のマクローリン展開を計算し，3 次の項まで示せ．

$$e^x + e^{-x}$$

(新潟大 2012)　　(m20122011)

0.33 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)I + g(\theta)J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.34 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ に対して， $f^{(n)}(x)$ ， $n = 0, 1, 2, \cdots$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$ に対して， $g(x)$ のマクローリン展開を書け．すなわち $g(x)$ をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形で表せ．

(金沢大 1999)　　(m19992203)

0.35 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数とする．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ，次の不等式を証明せよ．

$$\left|\log 1.1 - 0.095\right| < \frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002)　　(m20022201)

0.36 (1) 関数 e^{-x} にマクローリンの定理をあてはめた式を書け．

(2) 上を用いて, m を 2 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{(2m)!}$$

が成立することを示せ.

(3) m を 3 以上の自然数とするとき, 不等式

$$0 < e^{-1} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots - \frac{1}{(2m-1)!}\right) < \frac{1}{500}$$

が成立することを示せ.

(金沢大 2006)　　(m20062202)

0.37 $f(x)$ を $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ を満たす関数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $(e^{-x}f(x))' = 0$ を示せ．また，これを用いて $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) (2) の結果を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$ の値を求めよ．

(金沢大 2007)　　(m20072202)

0.38 $f(x) = \sqrt{1+x}\ (x > -1)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ および $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) マクローリンの定理を適用し，$f(x)$ の $(n-1)$ 次近似多項式およびその剰余項 R_n を求めよ．

(3) (2) で得られた結果を $n=2$ の場合に用いて，$\sqrt{1.01}$ の近似値を 1.005 としたときの誤差を評価せよ．

(金沢大 2008)　　(m20082202)

0.39 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい．

(金沢大 2011)　　(m20112209)

0.40 関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ および微分方程式

$$(1-x^2)f''(x) = xf'(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

を満たしている. 次の問いに答えよ.

(1) $m = 1, 2, 3, \cdots$ について

$$(1-x^2)f^{(m+2)}(x) - 2mxf^{(m+1)}(x) - m(m-1)f^{(m)}(x) = xf^{(m+1)}(x) + mf^{(m)}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $m = 2, 3, 4, \cdots$ について

$$f^n(0) = (n-2)^2 f^{(n-2)}(0)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$f^{(0)}(x) = f(x)$ とする．

(3) $f(x)$ は区間 $-1 < x < 1$ でマクローリン級数に展開できるとする．その級数が

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

となることを示せ．ただし，$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)$，$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)$ である．

(金沢大 2012)　　(m20122202)

0.41 次の問いに答えよ．

(1) $1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!}$ を循環小数で表せ．

(2) マクローリンの定理を用いて，$\left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\right)\right| \leqq \dfrac{|x|^7}{7!}$ $(x \in R)$ を示せ．

(3) $\dfrac{n}{1000} \leqq \sin 1 < \dfrac{n+1}{1000}$ を満たす自然数 n を求めよ．

(富山大 2014)　　(m20142310)

0.42 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある．この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ．

(富山大 2021)　　(m20212303)

0.43 マクローリン展開を用いて 次の式の値を求めよ．ただし，計算の概略も示すこと．

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-6(x-\sin x)}{x^5}$$

(富山大 2022)　　(m20222302)

0.44 (1) 関数 x のマクローリン展開は次式で表される．

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

これをもとに, 次の関係式を示せ.（注意： $f^{(n+1)}(\theta x)$ は 'θx' の $(n+1)$ 階導関数である）

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}\ ,$$

$$R_{n+1}=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

(2) (1) の関係式で $n=1$ とした関数 x のマクローリン展開は次式で表される．

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2(1+\theta x)^2}\qquad(0<\theta<1)$$

これを用いて, $\log 1.01$ の近似値として 0.01 を採用したときの誤差は 0.00005 より小であることを示せ.

(福井大 2005)　　(m20052402)

0.45 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x}$ のマクローリン展開を，次の順序に従い求めよ．

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ および $f'''(x)$ を計算せよ．

(2) 一般項 $f^{(n)}(0)$ を推定せよ（答のみでよい）．

(3) (2) の結果を用いて，関数 $f(x)$ を $x=0$ で無限級数にテーラー展開せよ．

(福井大 2007)　　(m20072402)

0.46 (1) 関数 $f(x)=\log(1+x)$（ただし $x>-1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ．

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x)=\log\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）．

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.47 $\log(1+x)$ をマクローリン級数（マクローリン展開）を使って, 第 5 項まで示せ.

(福井大 2010)　　(m20102403)

0.48 次式はマクローリン展開の一般式である．

$$f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\qquad\text{ただし，}f^{(n)}\text{は }n\text{ 次導関数を示す.}$$

(1) $f(x) = e^x$ の $n = 4$ までのマクローリン展開を示すとともに，e の近似値を求めよ．

(2) $f(x) = \sin x$ および $f(x) = \cos x$ について，$n = 5$ までのマクローリン展開を示せ．

(3) 上の結果を利用して $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ; ただし，$i^2 = -1$ である．

(福井大 2012)　　(m20122424)

0.49　$\sin(ax)$ をマクローリン級数展開せよ．

(福井大 2014)　　(m20142403)

0.50　次の関数のマクローリン展開を x^4 の項まで求めよ（計算過程も示せ）．

$\log(1+x)$

(福井大 2015)　　(m20152403)

0.51　e^x をマクローリン展開し，最初の 4 項までを答えよ．

(福井大 2018)　　(m20182418)

0.52　$\cosh x$ をマクローリン級数展開せよ．ただし，一般項も示すこと．

(福井大 2021)　　(m20212403)

0.53　関数 $f(x) = \log(2x+3)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．また，関数 $f(x)$ のマクローリン級数の最初から 5 項を求めよ．

(静岡大 2004)　　(m20042502)

0.54　関数 $f(x) = x^5 e^x$ のマクローリン級数（すなわち原点を中心とするテイラー級数）を求めよ．

(静岡大 2006)　　(m20062503)

0.55　$f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき, 定数 a_0, a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(静岡大 2010)　　(m20102505)

0.56　(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ を求めよ．

(2) $f(x) = \dfrac{-4x+6}{x^2-4x+3}$ のマクローリン展開を求めよ．

(静岡大 2011)　　(m20112501)

0.57　次の関数 f のマクローリン (Maclaurin) 展開 $\left(f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$ を求めよ．

(1) $f(x) = e^{x^2}$　　(2) $f(x) = \log(2+x)$　$(-2 < x < 2)$

(静岡大 2012)　　(m20122504)

0.58　(1) e^x を，$x = 0$ でテーラー展開せよ（このような展開を，「マクローリン展開」という場合がある）．

(2) (1) の情報を基に，e を有効桁数 3 桁まで正確に求めたい場合，第何項まで計算すればよいと考えるか.

(岐阜大 2007)　　(m20072619)

0.59　関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次の式で表される．

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \cdots \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \cdots$$

ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ での n 階微分である．このとき，次の関数のマクローリン展開を，$n = 2$ まで表せ．

(1) $f(x) = \sin x$

(2) $f(x) = \cos x$

(豊橋技科大 1997) (m19972706)

0.60 関数 $f(x,y) = e^{ax}\cos by$ について，次の問いに答えよ． ただし，a, b は実数の定数とする.

ア. 2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yy} を求めよ.

イ. $f(x,y)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(豊橋技科大 2022) (m20222702)

0.61 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ.

(名古屋工業大 1997) (m19972901)

0.62 関数 $f(x) = e^{\sin x}$ のマクローリン展開を次の指示に従って計算しなさい.

(1) $f'(x)$ と $f(x)$ との関係を導きなさい. その関係式に対してライプニッツの公式を適用し，$f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ $(0 \leq k \leq n)$ を用いて表しなさい. ただし, n は任意の自然数とし，等式 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ を用いてもよい.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めなさい. ただし剰余項を求める必要はない.

(名古屋工業大 2010) (m20102903)

0.63 $\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ.（収束する範囲は求めなくてよい.）

(名古屋工業大 2015) (m20152901)

0.64 関数 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$ に対し，$f(x)$ のマクローリン展開を x^4 の項までで打ち切って得られる高々4 次の多項式 $g(x)$ を求めよ.

(名古屋工業大 2020) (m20202901)

0.65 (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ の第 n 次導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

(3) (2) の結果を用いて，$g(x) = \log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

(三重大 2006) (m20063111)

0.66 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

$$f(x) = \log(1+x)$$

(三重大 2012) (m20123104)

0.67 関数 $g(\varepsilon) = \cos^2(\theta+\varepsilon)$ を ε についてマクローリン展開

$$g(\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 + \cdots$$

を行い，係数 a, b, c を求めなさい．ただし，θ は定数とする.

(三重大 2022) (m20223102)

0.68 関数 $f(x)=2^x$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ と n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ をマクローリン (Maclaurin) の定理によって

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+R_{n+1}$$

の形で表すとき，a_1，a_n，剰余項 R_{n+1} を求めよ．

(神戸大 1996)　(m19963803)

0.69 $|x|<1$ とし，$f(x)=\log(1+x)$ と定める．以下の各問に答えよ．

(1) $n\geq 1$ のとき，$f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く．$f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を書け．

(神戸大 2009)　(m20093803)

0.70 $f(x,y)=\sin(xy)$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) f の 1 階と 2 階の偏導関数を全て求めよ．

(2) f のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(3) f の極値を調べよ．

(神戸大 2017)　(m20173809)

0.71 (1) $x>0$ において，不等式 $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ を証明せよ．

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し，はじめの 4 項を書け．

(3) 前問 (2) の結果をも使って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ を求めよ．

（鳥取大 2001)　(m20013903)

0.72 関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & (x\neq 0\ のとき)\\ 1 & (x=0\ のとき)\end{cases}$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) e^x のマクローリン展開を書け．

(2) $a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ を $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ により定める．$a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ の値を求めよ．

(3) $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　(m20164002)

0.73 (1) 関数 $g(x)=\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\begin{pmatrix}2n-2\\ n-1\end{pmatrix}x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.74 a を実数，r を正の実数とする．座標平面において，y 軸上の点 $(0, a)$ を中心とし半径が r である円を C とする．以下の問いに答えよ.

(1) 円 C の下半分を表す方程式を $y = f(x)$ の形で表せ.

(2) (1) で求めた $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．ただし，剰余項は不要である.

(3) 円 C が $x = 0$ の近くで最も良く放物線 $y = x^2$ を近似するような a と r の値を求めよ.

(広島大 2018)　　(m20184102)

0.75 $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x-y}}$ のマクローリン展開（点 $(0, 0)$ におけるテイラー展開）を x, y に関して 2 次の項（x^2, y^2, xy の項）まで求めよ.

(広島市立大 2006)　　(m20064202)

0.76 (1) $h(x) = x^2 \sin^2 x$ の 1 次導関数 $h'(x)$，2 次導関数 $h''(x)$，3 次導関数 $h'''(x)$ を求めよ.

(2) x の関数 $\log(1+x)$ の n 次導関数を求めよ．ただし，$x > -1$ とする.

(3) $\log \dfrac{1-x}{1+x}$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，$|x| < 1$ とする.

(広島市立大 2009)　　(m20094201)

0.77 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし，$y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0\,, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

(4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.

(5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005)　　(m20054311)

0.78 関数 $f(x) = \cos(3x^2)$ をマクローリン展開しなさい.

(山口大 2009)　　(m20094314)

0.79 次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ は, $|x| < K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式（すなわち, $x = 0$ を中心とする n 次のテーラー展開式）を求めよ（証明は不要）.

(2) $|x| < 1$ における関数 $f(x) = (1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.

(3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005)　　(m20054503)

0.80 $x > -1$ で定義された関数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ. ただし, 3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け.

(3) (2) の結果を利用して, $(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.81 a を正の定数, e を自然対数の底とし, $f(x) = e^{ax}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して, $f(x)$ の n 次（n 階）導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開（x の巾 (べき) 級数の形での展開）を求めよ.

(3) N を自然数とするとき, 次の級数の和を求めよ. $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{(n-N)!}$

(九州大 2007)　　(m20074710)

0.82 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを用いて, ネイピアの数 e を小数点以下第 3 位まで計算せよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054935)

0.83 (1) $f(x) = \exp(x)$ のとき, $f'(x)$ と $f''(x)$ はどのように表されますか.

(2) $f(x) = \exp(x)$ のとき, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ はどうなりますか.

(3) マクローリンの定理は次式で表される.

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,x^2/2! + \cdots$$
$$\cdots + f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}/(n-1)! + f^{(n)}(\theta x)\,x^n/n! \quad (0 < \theta < 1)$$

$f(x) = \exp(x)$ をマクローリンの定理を用いて第 4 項まで示しなさい.
（マクローリン展開）ただし, $\exp(x) = e^x$ である.

(4) 上記のマクローリン展開を第 4 項まで計算して, $\exp(1)$ を小数点以下 2 桁まで求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074902)

0.84 関数 $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 自然数 $n \geq 2$ について, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ のマクローリン展開を

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

とするとき，a_0，a_1，a_2，a_3 および a_n は何か．ただし，$-1 < x < 1$ とする．

(佐賀大 2009)　　(m20094905)

0.85 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを参考に $e^{0.2}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094924)

0.86 $f(x) = \cos 3x$ を, マクローリン展開の公式

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$

を用いて x の 2 次式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (a_0〜a_2は係数) で近似することを考える．

(1) 2 次式中の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ．

(2) 近似式を利用して $\cos 0.6$ の近似値を計算せよ．

(佐賀大 2010)　　(m20104919)

0.87 $x = 0$ を含む開区間で無限回微分可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は以下のようになる．

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

これを参考に $\mathrm{e}^{0.1}$ の値を小数点以下第 4 位まで計算せよ．

(佐賀大 2013)　　(m20134920)

0.88 次の関数をマクローリン展開して係数 a_n を求めよ．

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

(佐賀大 2015)　　(m20154909)

0.89 関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開 ($x = 0$ を中心とするテイラー展開) を 3 次の項まで求めなさい．

(佐賀大 2018)　　(m20184902)

0.90 次の関数を x^3 の項までマクローリン展開しなさい．

(1) e^x　　(2) $\sin x$

(佐賀大 2018)　　(m20184924)

0.91 以下の問いに答えよ．ただし，a は正の定数とする．

(1) a^x の微分を求めよ．

(2) $\tan^{-1} x$ の微分を求めよ．

(3) $f(x, y) = \dfrac{\tan^{-1} x}{a^y}$ の x 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と y 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ．

(4) $\cos x$ をマクローリン展開せよ．

(長崎大 2009)　　(m20095007)

0.92 次の関数について, x^3 の項まで Maclaurin（マクローリン）の級数展開で表せ.

$y = \sqrt{1-x^2}$

(長崎大 2010)　　(m20105005)

0.93 2^x を x^3 の項までマクローリン展開せよ.

(長崎大 2011)　　(m20115003)

0.94 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ の第 2 階導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し，2 次の項まで求めよ.

(長崎大 2011)　　(m20115009)

0.95 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1+2x}$ $\left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$，$f''(0)$，$f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1)，(2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.96 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

と定義する.

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(2) $f(x)$ の $x = 0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0)$，$f''(0)$，$f^{(3)}(0)$，$f^{(4)}(0)$ を求めなさい.

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい.

(大分大 2012)　　(m20125107)

0.97 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は，　$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$　で与えられる．ただし，$f^{(n)}(0)$ は $x = 0$ における $f(x)$ の n 階導関数である．$x \to 0$ のとき，$e^x \sin x$ の漸近展開を x^3 の項まで求めよ.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075507)

0.98 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ （ただし，$x < 1$）の x^3 までのマクローリン展開を求めなさい.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115512)

0.99 関数 $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ について，x^3 までのマクローリン展開を求めなさい.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165502)

0.100 関数 $e^x \sin x$ に関するマクローリン展開について，x^3 の項まで書きなさい．e は自然対数の底とする.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185515)

0.101 (1) 関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ に対して，1 次から 3 次までの導関数を求めなさい.

(2) (1) で求めた導関数を用いて，関数 $f(x) = \cos 2x + \sin(-3x)$ について　x^3 までのマクローリン展開を求めなさい.

(室蘭工業大 2022)　　(m20225504)

0.102 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ をマクローリン展開せよ．ただし，収束域は考慮しなくて良い.

(香川大 2017)　　(m20175701)

0.103 (1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ．ただし，剰余項および収束域は求めなくてよい.

(2) 次の極限を求めよ.　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019)　　(m20195701)

0.104 関数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け.

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ．ただし，$x = \tan t$ なる変数変換を用いて，積分計算の過程も示せ.

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は　$f(x) \cong 1 - x^2 + x^4$　であることを導け.

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け.

$$\tan^{-1} x \cong x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ ただし，} |x| < 1\ )$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.105 (1) $\log(1+x)$　$(-1 < x < 1)$ の第 n 次導関数を求めよ.

(2) $\log(1+x)$　$(-1 < x < 1)$ のマクローリン展開を求めよ.

(3) $\log 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{2^n} + \cdots$ を示せ.

(島根大 2010)　　(m20105802)

0.106 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする.

$$(*)\ \ f''(x) = f(x)\,,\ \ f(0) = 1,\ f'(0) = 0$$

次の問いに答えよ.

(1) $\left(f(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 = 1$ を証明せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(島根大 2013)　　(m20135802)

0.107 次の問いに答えよ，

(1) $(1+x)^{1/10}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ.

(2) $(1.2)^{1/10}$ の近似値を小数第 3 位まで正確に求めよ.

(島根大 2014)　　(m20145803)

0.108 関数 $f(x) = \arcsin x$　$(-1, x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする. ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である. このとき, 0 以上の整数 n に対し,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2 f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015)　　(m20155806)

0.109 $f(x) = -\log\cos x$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ.

(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき, $f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ.

(4) 曲線 $y = f(x)$ の, $0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ.

(島根大 2018)　　(m20185806)

0.110 次の微分方程式について, 以下の設問に答えよ.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\frac{df(x)}{dx} - 8f(x) + g(x) = 0$$

(1) 関数 $g(x) = 0$ の場合において, 微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x}$ の場合において, 微分方程式を満たす関数 $f(x)$ の一般解を求めよ.

(3) 設問 (2) において, $x = 0$ のときの関数 $f(x)$ およびその 1 階導関数 $f'(x)$ の値がそれぞれ次のように与えられたとき, 関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(0) = -\frac{1}{18},\ f'(0) = \frac{13}{18}$$

(4) 設問 (3) において求めた関数 $f(x)$ を x の 2 次の項までマクローリン展開せよ.

(島根大 2020)　　(m20205801)

0.111 $f(x) = \cos x$ について以下の問いに答えよ. ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする.

(1) マクローリン展開を用いて $f(x)$ を 2 次式で近似せよ.

(2) $f(x)$ および $f(x)$ を 2 次式で近似した曲線を図示せよ.

(首都大 2010)　　(m20105906)

0.112 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ について以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.02)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125906)

0.113 関数 $f(x) = e^x\sin x$ について, 以下の問いに答えなさい.

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(2) (1) の結果を利用して $f(0.03)$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2013)　　(m20135906)

0.114 次の文章中の $\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑤}$ に入れるのに最も適当な分数を答えなさい.

(1) $\dfrac{1}{\cos x}$ のマクローリン展開を x^4 の項まで求めると, $1+\boxed{①}x^2+\boxed{②}x^4$ が得られる.

(2) $\tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めると, $x+\boxed{③}x^3+\boxed{④}x^5$ が得られる.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^3}$ の極限値は, $\boxed{⑤}$ である.

(首都大 2014)　　(m20145906)

0.115 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2015)　　(m20155906)

0.116 次の文章中の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ に入れるのに最も適当な数を答えなさい.

$-\log(1-3x)$ のマクローリン展開を x^3 の項まで求めると, $\boxed{ア}x+\boxed{イ}x^2+\boxed{ウ}x^3$ が得られる.

(首都大 2016)　　(m20165906)

0.117 関数 $f(x)=e^x\cos x$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2017)　　(m20175903)

0.118 関数 $\sqrt{1+x}+\log(1+x)$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(首都大 2018)　　(m20185906)

0.119 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開を求めなさい. ただし, $-1<x<1$ とする.

(首都大 2019)　　(m20195905)

0.120 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めなさい.

(東京都立大 2020)　　(m20205905)

0.121 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

で与えられる, $f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ. ただし, x の 7 次の項までを具体的に記述して, それ以上の高次の項は $\cdots$ で省略してよい.

(滋賀県立大 2009)　　(m20096001)

0.122 関数 $f(x)$ のマクローリン展開は次で与えられる.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

(1) 関数 $f(x)=(1+x)\sin x-x\cos x$ のマクローリン展開を書き下せ. ただし, x^4 の項までを明確に求め, それよりも高次の項は $\cdots$ と略してよい.

(2) (1) の結果を使って, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin x-x\cos x}{x^2}$$

(滋賀県立大 2010)　　(m20106002)

0.123 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を, 4 次の項まで求めなさい.

(2) 曲線 $x^4+3x^2+2xy^2+4y^3-10=0$ の $(x,y)=(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+x+1}\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le x+1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096502)

0.124 $f(x,y)=\log(1+x+y^2)$ のマクローリン展開を, 2 次の項まで求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106508)

0.125 $f(x)=x\sin x \quad (-\infty<x<\infty)$ のマクローリン展開を 3 次の項まで求めなさい.

(和歌山大 2012) (m20126503)

0.126 次の関数のマクローリン展開を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(和歌山大 2013) (m20136503)

0.127 指数関数と三角関数のマクローリン級数を利用して，次の極限を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x-\sin x}$$

(和歌山大 2014) (m20146504)

0.128 次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開（x=0 のまわりのテイラー展開）を x^3 の項まで求めなさい.

$$f(x)=e^{2x+1}$$

(和歌山大 20221) (m20216502)

0.129 関数 $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ のマクローリン展開を $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とするとき，係数 a_n を求めよ.

(和歌山大 2022) (m20226502)

0.130 (1) 級数の和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(k+2)}{(k+3)!}$ を求めよ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ.

(2) $f(x)=e^{2x^2}$ のマクローリン級数を x^3 の項まで求めよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}$ を求めよ.

(3) 初期値問題 (a) と微分方程式 (b) の解が一致するよう α を定め，(b) の一般解を求めよ.

(a) $\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$, $y(0)=e^{-1}$ (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+\alpha y=8e^{-x}$

(京都府立大 2008) (m20086701)

0.131 関数 $f(x)=\log(1+x)$ に対して, 3 次までのマクローリン展開を求めよ.

(東京工科大 2010) (m20106904)