[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：面積

0.1 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “$\cdot$” はベクトルの内積（スカラー積）, “ $\times$ ” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad 曲面\ \boldsymbol{S}\ :\ 2x+y+2z=6,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.2 ２次の正方行列 A による１次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること.

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を求めよ．また，この４つの点を頂点とする四角形の面積が，１次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad-bc|$ で与えられる.

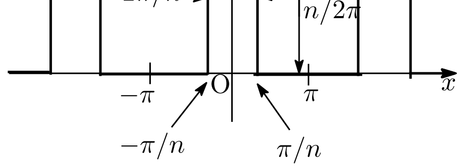
(2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2+s^2=1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を求めよ. また，この４つの点を頂点とする四角形の面積が, １次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ.

(3) $A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対称行列である．A を直交行列を用いて対角化せよ.

(4) (3) と同じく，$A=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される４つの点の像を考える．この４つの点を頂点とする四角形の面積が, １次変換前と比較して１次変換後に何倍になるかを求めよ.

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.3 右図のような周期 2π の周期的パルス列 $f(x)$ を考える．パルスの幅は $2\pi/n$，高さは $n/2\pi$ で与えられ，面積は常に１である（ただし n は２以上の整数）．この波形は y 軸に関して軸対称なので，次式のようなフーリエ級数に展開することができる.



以下の設問に答えなさい.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

(1) $n = 2$ のとき, a_k $(k \geqq 1)$ を求めなさい.

(2) 2 以上の整数 n について, a_k $(k \geqq 1)$ を n の関数として表しなさい.

(3) (2) の結果において, n を ∞ に漸近させると, 与えられたパレス列は デルタ関数列になる. この条件における a_k を求めなさい.

(北海道大 2021) (m20210103)

0.4 (1) 直線 $y = x + 1$ と曲線 $y = x^2 - 1$ の交点の座標を求めよ.

(2) (1) の直線と曲線で囲まれた図形の面積を求めよ.

(北見工業大 2013) (m20130205)

0.5 関数 $r = f(\theta)$ に関する常微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = a$$

に関し，次の問に答えよ．ただし，a は正の定数である．

(1) 上の常微分方程式の一般解を求めよ．

(2) 一般解の積分定数を次の条件によって決定せよ．

$$\theta = 0 \text{ において } \quad f = 2a, \quad \frac{df}{d\theta} = 0$$

(3) θ の範囲を $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ とする．(r, θ) を極座標とするとき，方程式 $r = f(\theta)$ で表される図形の概形を描け．

(4) 前問の図形によって囲まれる面積を求めよ．

(岩手大 1996) (m19960302)

0.6 3 次元空間内の 3 点 A, B, C の各々の座標を $(a, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ を 2 辺とする平行四辺形を $ACBD$ とするとき，点 D の座標を求めよ．

(2) $\angle ACB$ を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(4) $\triangle ABC$ に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(岩手大 1997) (m19970304)

0.7 次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004） (m20040302)

0.8 xyz 空間に 3 点 $A(-1,\ 0,\ -3)$, $B(2,\ 2,\ -4)$, $C(-3,\ 1,\ 0)$ がある．次の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角 θ を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(2) 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(3) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式を求めなさい．

(4) (3) で求めた平面が，球 $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=r^2 \quad (r>0)$ に接しているとき，r の値を求めなさい．

(岩手大 2009)　　(m20090302)

0.9 xyz 空間の点 $P(0,0,t)$ を通り, ベクトル $\vec{a}=(2,2,1)$ に垂直な平面 α と方程式

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z=11$$

で表される球 S について, 次の問いに答えなさい. ただし, $t>0$ とする.

(1) 平面 α の方程式を t を用いて表しなさい.

(2) 球 S の中心の座標と半径を求めなさい.

(3) 球 S の中心から平面 α までの距離を, t を用いて表しなさい.

(4) 球 S と平面 α が交わってできる図形は円になる. この円の面積を 9π とするとき, t の値を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100301)

0.10 xy 平面上の曲線 C が極座標では

$$r=1+\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表されるとき, 次の問いに答えなさい.

(1) 曲線 C の概形を図示しなさい.

(2) 曲線 C の囲む面積 S を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100305)

0.11 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）$\mathrm{rank}\,(A)$ が 3 であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{e}_x{}'=A\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y{}'=A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，2 つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190302)

0.12 3 次元直交座標系 (x,y,z) において $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2kz+14=0$ が球を表すとき，次の問いに答えなさい．ただし，k は実数とする.

(1) k の範囲を求めなさい.

(2) この球は，xy 平面と交わらないことを示しなさい.

(3) この球が，yz 平面，zx 平面 と交わり，かつ，yz 平面との切口の面積が，zx 平面との切口の面積の 2 倍となるときの k の値を求めなさい．

(岩手大 2020) (m20200301)

0.13 2 つの曲線 $y = 4x - x^2$ と $y = x - 4$ がある．このとき以下の設問 (1),(2) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (2) の下の空白部分に記入しなさい．

(1) 上記の 2 直線で囲まれた図形を図示しなさい．

(2) (1) の図形の面積を求めなさい．

(秋田大 2014) (m20140401)

0.14 曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ がある．このとき，以下の設問 (1),(2) に答えなさい．

(1) 上記の曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形を図示しなさい．

(2) 上記の曲線 $y = x^3 + 2x^2 - 3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(秋田大 2015) (m20150401)

0.15 xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x(a-x),\ 0 \leq z \leq by^2$$

ただし，a, b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1) G を平面 $x = \dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2) G の体積 V を求めよ．

(3) a と b に関係 $b = e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994) (m19940501)

0.16 関数 $f(x) > 0$ は閉区間 $[a, b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a, 0)$ と動点 $P(x, 0)$ をとる．ただし，$a < x \leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な 2 直線と曲線 $y = f(x)$ との交点をそれぞれ B, Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 弧 BQ の長さを求める式を書け．

(2) 曲線 $y = f(x), x$ 軸，直線 AB，直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け．

(東北大 1994) (m19940502)

0.17 xy 平面上に 2 点 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ がある．原点 O と点 P, Q は同一直線上にはなく，また $d \neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P, R を通る直線と x 軸との交点 $S(e, 0)$ の x 座標 e を a, b, c, d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0, d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994) (m19940504)

0.18 点 $X(x, y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x', y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x, y, x', y' を r, α, θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1, y_1)$，点 $B(x_2, y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|, \quad S' = \frac{1}{2}|x_1'y_2' - x_2'y_1'|$$

を用いて，$S = S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y' = 1$ 上に位置し，$S' = \dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1' = 0,\ x_2' > 0,\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.19 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005)　　(m20050505)

0.20 x と y を実数とし，関数 $f(x, y)$ を　$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$　と定義する．
不等式 $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x, y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．　(2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z = f(x, y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.21 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\[2ex] y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t=\dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m=0,1,2,3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.22 xyz 空間に，点 $P(0,0,5)$ を通る直線 ℓ と，点 $Q(0,4,2)$ を中心とする半径 r（ただし $r>0$）の球面 S がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 球面 S と接する直線 ℓ が存在するための r の範囲を求めよ.

(2) $r=1$ とし，点 P に点光源を置いたとき，xy 平面上にできる球面 S の影を領域 R とする，領域 R を表す不等式を求めよ.

(3) 領域 R の面積を求めよ.

(東北大 2011)　　(m20110501)

0.23 数列 $\{a_n\}\,(n=1,2,3,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ とする．このとき．$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ によって定められる数列 $\{b_n\}$ が公比 β の等比数列となるような α と β をすべて求めよ.

(2) $(n+2)a_{n+2}-2(n+1)a_{n+1}\cos\theta+na_n=0$ であるとき，a_1 と a_2 を用いて $a_n\,(n \geqq 3)$ を表せ, ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

(3) $a_1=1,\ a_2=i\,$(ただし $i=\sqrt{-1}$) とし，複素平面上で原点を O，複素数 a_n を表す点を A_n とする．a_n が (2) の式で表されるとき，三角形 $OA_nA_{n+1}\,(n \geqq 3)$ の面積を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120501)

0.24 x を正の実数とし，関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する.

$$f(x)=\frac{\log x}{x^2}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の増減表を書き，関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) $y=f(x),\ y=0,\ x=b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ．ただし，b は $b>1$ を満たす実数とする.

(東北大 2013)　　(m20130501)

0.25 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする.
このとき，以下の問に答えよ.

(1) $t=\dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ.

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.26 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する.

$$f(x) = \frac{-ax^2 - (a-1)}{x^2+1} \qquad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ．ただし，$y = f(x)$ は x 軸と 2 つの交点 A および B をもつものとする.

(1) $y = f(x)$ が x 軸と 2 つの交点をもつ a の条件を示し，交点 A, B の x 座標 x_A, x_B (ただし $x_A > x_B$) 求めよ.

(2) $y = f(x)$ の増減表を示し，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) 交点 A, B における接線の方程式を求め，その接線 2 本の交点の座標を求めよ.

(4) $y = f(x)$ と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_1 と，(3) で求めた 2 本の接線と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_2 を求め，S_1 と S_2 の大小関係を示せ.

(東北大 2014)　　(m20140501)

0.27 $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される xy 平面上の曲線について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする.

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として示せ.

(2) この曲線の概形を描き，曲線の全長を求めよ.

(3) この曲線が囲む面積を求めよ.

(東北大 2015)　　(m20150503)

0.28 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq 1,\ \sqrt{2}x^2 \leqq y\right\}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 領域 D の面積 S を求めよ.

(2) 領域 D の重心の座標を求めよ．ここで，領域 D の重心の座標 $(\overline{x},\ \overline{y})$ は以下の式で表される.

$$(\overline{x},\ \overline{y}) = \left(\frac{1}{S}\iint_D xdxdy\,,\ \frac{1}{S}\iint_D ydxdy\right) \qquad S: \text{領域 } D \text{ の面積}$$

(東北大 2016)　　(m20160502)

0.29 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ.

(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ.

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ.

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.30 xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が，実数 t を媒介変数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し，曲線 C の概形を図示せよ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.31 点 O を原点とする xyz 空間の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．また，点 A，点 B を直径の両端とする球面を S とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 AB 上に点 P があり，点 A と点 P の間の距離を s とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を求めよ．

(2) 球面 S 上の点 Q の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とし，球面 S の方程式を示せ．

(3) $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$，$\boldsymbol{b} = (0, 2, 1)$ のとき，点 $D(0, 0, d)$ を通り球面 S と接する直線を ℓ とする．ただし，d は $d > 1$ を満たす実数である．

(a) 直線 ℓ と xy 平面の交点を T とする．点 T の座標を $(p, q, 0)$ と表すとき，p および q が満たす方程式を求めよ．

(b) 点 T の軌跡が閉曲線となる d の範囲を示し，その閉曲線によって囲まれた xy 平面上の領域の面積を求めよ．

(東北大 2021)　　(m20210504)

0.32 点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする xyz 空間において，中心を点 $C(0, 0, 1)$，半径を $1/2$ とする球面 S_1 がある．点 $A(0, 0, 2)$ を通る直線を z 軸まわりに回転して得られる円錐面 S_2 が，球面 S_1 に接している．ただし，$z \leqq 2$ とする．

(1) 円錐面 S_2 と球面 S_1 の接点のひとつを B とするとき，$\cos\angle CAB$ を求めよ．

(2) 円錐面 S_2 上の任意の点を $P(x, y, z)$ とするとき，円錐面 S_2 の方程式を求めよ．

(3) 円錐面 S_2 と xy 平面で囲まれた閉曲面を S とする．以下のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の面積分 I を求めよ．

$$\boldsymbol{F} = (x^3 z)\,\mathbf{i} + (x^2 yz)\,\mathbf{j} + \{(x^2 + y^2)z^2\}\,\mathbf{k}$$

$$I = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

ただし，$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は x, y, z 軸方向の基本ベクトルであり，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S 内部から外向きに取るものとする．

(東北大 2022)　　(m20220506)

0.33 n 次元における半径 r の “球” の “体積” を考えましょう．３次元においては半径 r の球の体積は，原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です．３次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，１次元における半径 r の “球” の “体積” は，原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，２次元における半径 r の “球” の “体積” は，原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では４次元において,「半径 r の “球” の “体積”」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 n でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998）　(m19980601)

0.34 (1) $y^4 = x^4(1-x^2)$ は x-y 平面で閉じた曲線になる．この曲線のおおよその形を描け．

(2) この曲線に囲まれた領域の面積を計算するには積分 $4\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が必要である．関数 $f(x)$ を求めよ．

(3) 上の積分を実行せよ．

(お茶の水女子大 1999）　(m19990604)

0.35 平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 2010)　(m20100603)

0.36 次式で決まる曲線で囲まれる面積について考察せよ．以下の (1) から (3) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．ただし，x と y は実数とする．

$$y^2 - x^2(x+a) = 0$$

(1) $a=1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(2) $a=-1$ のときの曲線の概形をグラフに示す.

(3) $a=1$ のときの曲線によって囲まれた領域の面積を求める．積分の計算においては $t=\sqrt{x+a}$ とおいて置換積分を行ってよい.

(お茶の水女子大 2011)　(m20110603)

0.37 極座標表示で表された曲線 : $r = 1+\cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ.

(1) 曲線の長さを求めよ.

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　(m20110606)

0.38 3 次元空間におけるデカルト座標系で表される，点 $O(0,0,0)$，点 $A(1,2,3)$，点 $B(-3,1,-2)$ について，以下を求めよ.

(1) $\angle AOB$ の大きさ　(2) $\triangle AOB$ の面積

(お茶の水女子大 2016)　(m20160616)

0.39 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1+\cos\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ.

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ.

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　(m20200611)

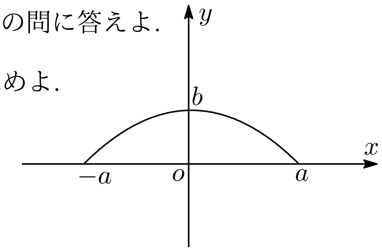
0.40 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{u}$ の組をすべて求めよ.

(2) 2 点 P, Q と原点 O を頂点とする三角形 OPQ の各頂点の位置ベクトルが A によって一次変換されるとき, その三角形の面積が何倍になるか答えよ.

(東京大 2001)　　(m20010701)

0.41 図の曲線は点 $(0,b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.



(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.

(東京大 2002)　　(m20020702)

0.42 1 の n 乗根は, 方程式

$$z^n = 1 \qquad (\ n \text{ は自然数 })$$

をみたす n 個の複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ により与えられる. ここで, 各 n 乗根 z_i の偏角 $\arg z_i$ は, $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \cdots < \arg z_n < 2\pi$ をみたしているとする. また, 複素数平面において, $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対応する点をそれぞれ $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 原点を O とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 を複素数平面上に図示せよ. また, 三角形 $P_1P_2P_3$ の面積 S_3 を求めよ.

(2) 複素数平面上において, 1 の 3 乗根に対応する点 P_1, P_2, P_3 と原点が O がつくる三つの三角形, すなわち OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1 の重心をそれぞれ G_1, G_2, G_3 とする. 三つの重心が作る三角形 $G_1G_2G_3$ の面積 A_3 を求めよ.

(3) 前問 (2) と同様にして, 1 の n 乗根に対応する点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と原点が O がつくる n 個の三角形の重心 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ を考える. n 角形 $P_1P_2\cdots P_n$ の面積 S_n と n 角形 $G_1G_2\cdots G_n$ の面積 A_n の比 $r_n = \dfrac{A_n}{S_n}$ を求めよ.

(4) 前問 (3) で求めた面積比 r_n の $n \to \infty$ のときの極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ.

(東京大 2007)　　(m20070703)

0.43 2つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S \ : \ x(s,\theta) = (s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について, 以下の設問に答えよ. α は 0 以上の定数とする.

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により, 曲線 C

$$C \ : \ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

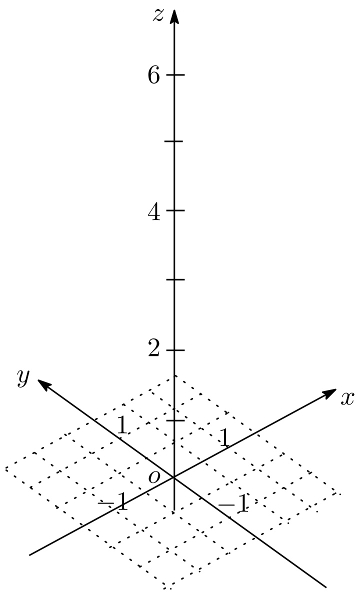
を得る. $\alpha = 1$ の場合について, 下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ.

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする. P における接線の方程式を導出せよ.

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする. θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき, Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ.

(4) $\alpha = 0$ のとき, 曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する. $\alpha = 1$ としたとき, 曲面 S の面積は, 単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ. ただし, 次の不定積分の公式を使ってよい.

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.44　行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1)　$\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2)　xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4)　極限値 $L=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.45　(1)　閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

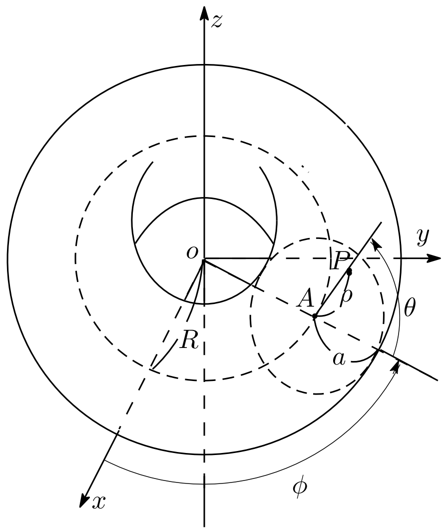
$$V=\frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ．　ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素である．

(2)　下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり，z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる．　このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり，この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R>a)$．　トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と，トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする．　点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R,ρ,ϕ,θ を用いて書き表せ．

(3)　同図のトーラスの表面 $(\rho=a)$ においてベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ．　この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ．　なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.46 半径 r の円周に内接する正 m 角形 $(m \geqq 3)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この正 m 角形の面積 A_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．ただし，下記の関係を用いてよい．

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(2) この正 m 角形を底面とする高さ h の正 m 角柱を考える．図 1 は，$M = 6$ の場合の例である．この側面は m 個の長方形（$2m$ 個の直角三角形）で構成される．側面の総面積 B_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(3) この正 m 角柱の底面を面内で角 π/m だけ正 m 角形の中心で回転して得られる高さ h の多面体を考える．この多面体は，正反 m 角柱と呼ばれる．図 2 は，$m = 6$ の場合の例である．この側面は $2m$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 C_m を求め，m が無限大のときの極限を算出せよ．

(4) 正反 m 角柱の高さを h/n $(n \geqq 2)$ にして n 段積み重ねることを考える．図 3 は $M = 6$, $n = 2$ の例である．この側面は $2mn$ 個の二等辺三角形で構成される．側面の総面積 D_{mn} を求めよ．さらに，$n = m^2$ の場合を考え，m が無限大のときの D_{mn} の極限を算出せよ．

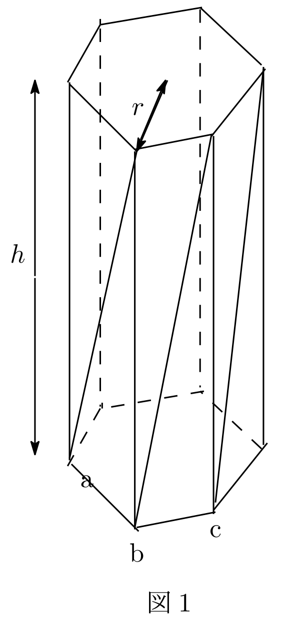


図 1

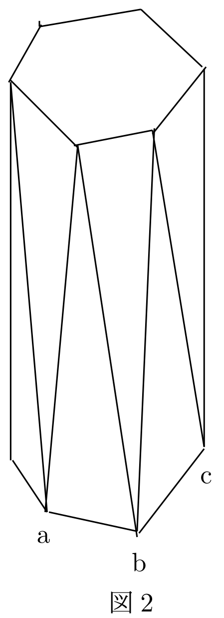


図 2

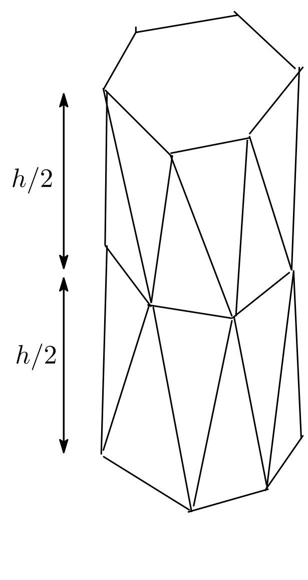


図 3

(東京大 2013)　　(m20130703)

0.47 複素変数 $z = x + iy$（x, y は実数）から複素変数 $w = X + iY$（X, Y は実数）への写像 $w = f(z)$ を考える．以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z) = z^2$ のとき，z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(2) $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき，z 平面上の単位円周 $|z| = 1$ と単位円の内部 $|z| < 1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

(3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ のとき，z 平面上の領域 $1 \leq |z| \leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140704)

0.48 3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1) (a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

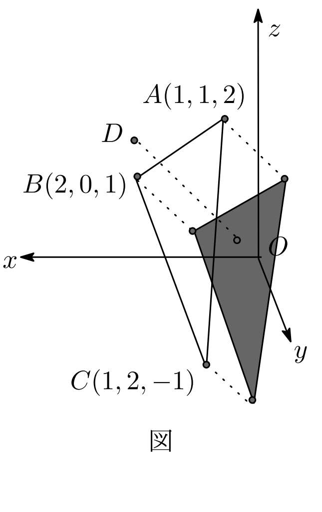
(b) 頂点 A と頂点 B, C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2) 下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1,1,2)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,-1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1,1,1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1,-1,-1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

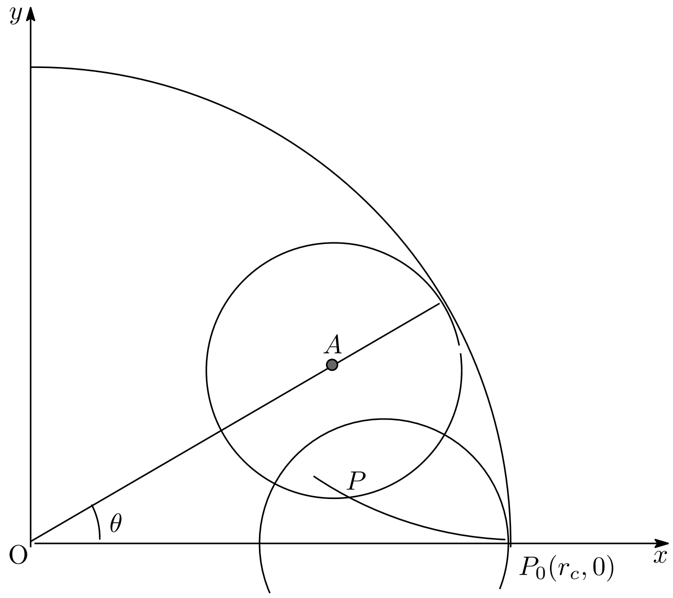
(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．
ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x + 3d_y + d_z - 9 > 0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.49 図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3) $r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.50 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$
$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2 + z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r, θ, z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r\frac{\partial\phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \overrightarrow{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$
$$\overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)$$

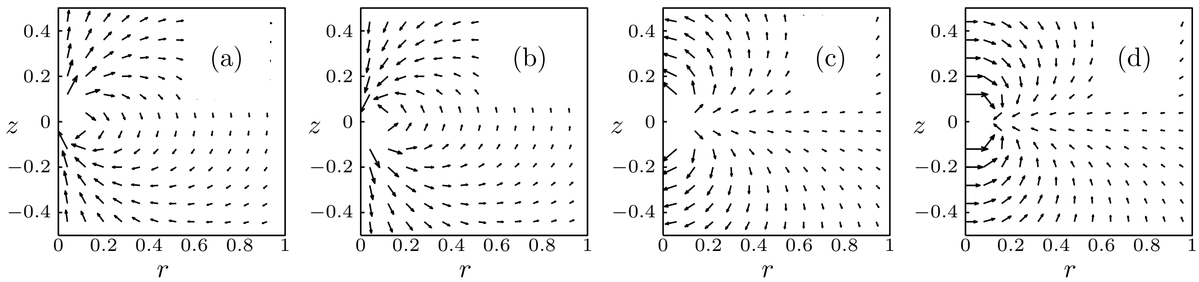
(1) $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える ($z_0 > 0$)．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば $r_0,\ z_1,\ z_2$ を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.51 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$,　$\theta = \beta$　$(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

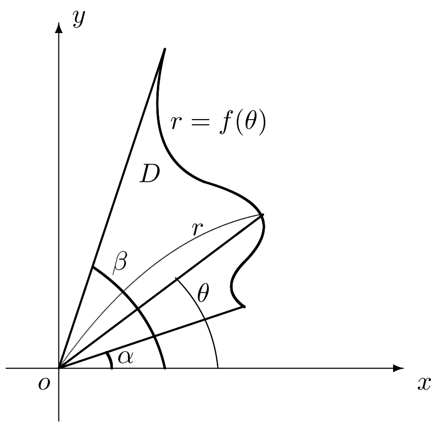
および，連続曲線

$r = f(\theta)$　$(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

で与えられることを示せ．



(東京工業大 2000)　　(m20000802)

0.52 関数

$$u = x^2 - xy + y^2 \ , \qquad v = x^2 + xy + y^2$$

によって定められる (x, y) 平面から (u, v) 平面への写像 F を考える．(x, y) 平面の円の内部

$$D \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

の F による像 $E = F(D)$ の面積を求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941002)

0.53 定義域を $0 \leqq u \leqq 2\pi,\ 0 \leqq v \leqq 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u, v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.54 関数 $y = f(x)$ のグラフ C が　$(x, y) = (\sin t,\ t\cos t)$,　$(0 \leq t \leq \pi/2)$　と表されるとする．$t = \pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0, y_0)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x_0)$ を計算し，点 P における C の接線の方程式を求めよ．

(2) $f''(x_0)$ を計算せよ． (3) 曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ．

(電気通信大 2007) (m20071004)

0.55 関数 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とするとき，$f(x,y)=0$ を $r,\ \theta$ の式で表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,y):f(x,y)\leqq 0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ の面積 S を求めよ．

(電気通信大 2015) (m20151003)

0.56 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 A$(2,1,3)$, B$(1,1,2)$, C$(3,0,1)$, D$(2,-1,2)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ．

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ．

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ．

(電気通信大 2021) (m20211001)

0.57 3次元空間において，点 $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,1)$ を含む平面を α とする．次の問に答えよ．

(1) 平面 α と xy 平面のなす角を θ ($0<\theta<\pi/2$) とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ．

(3) 平面 α と原点を中心とする半径 1 の球との交わりを xy 平面に正射影して出来る図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1993) (m19931102)

0.58 xy 平面上の点 $P(x,y)$ が， $t\geqq 0$ の範囲で，次の連立微分方程式に従って移動する．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-|y| \\ \dfrac{dy}{dt}=-|x| \end{cases}$$

ここで， $t=0$ で， $x=1$, $y=3$ とする．

(1) 第 1 象限 ($x>0$, $y>0$) で， x と y を t で表せ．

(2) 第 1 象限で点 P の描く曲線の方程式を求めよ．また，$x=0$ となるときの y と t を求めよ．

(3) 第 2 象限 ($x<0$, $y>0$) で， x と y を t で表せ．また，第 1 , 第 2 象限で点 P の描く曲線の概略を図示せよ．

(4) 点 P の描く曲線と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(横浜国立大 1994) (m19941101)

0.59 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1,λ_2 を求め，λ_1,λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1,ν_2 を求めよ．さらに，ν_1,ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997) (m19971203)

0.60 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図 2 のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

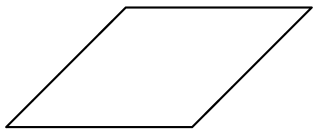


図 1

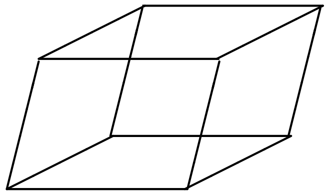


図 2

(千葉大 2000） (m20001202)

0.61 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2+y^2 \leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$（ただし，$a>0$）について，以下の問に答えなさい．

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい．

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい．

(千葉大 2017) (m20171203)

0.62 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ について以下の問いに答えよ．

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ．

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ．

(3) 楕円面を平面 $z=z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし，$-c<z_0<c$ である．

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ．

(筑波大 2000） (m20001304)

0.63 面積が a 平方センチメートルの正方形がある．この正方形の四隅から合同な 4 つの正方形を切り取り，残りの部分を折り曲げて接合することにより，上部の開いた箱を作ることにする．箱の容量（体積）を最大化するためにはどうすればよいか．また $a=36$ のときの最大容量を求めよ．

(筑波大 2001) (m20011301)

0.64 $x^2+(y-b)^2=a^2$ (ただし, $a>0,\ b>0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える．

(1) 体積を求めよ． (2) 表面積を求めよ．

(筑波大 2001) (m20011305)

0.65 (x,y) 直交座標系において $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}\quad(\alpha>0)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2003)　(m20031304)

0.66 次式をグラフに描いたときに，この曲線と x 軸で囲まれる面積を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で求めよ.

$$y=x^3-6x^2+11x-6$$

(筑波大 2003)　(m20031305)

0.67 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $f(x,y)=\tan x+\tan y-\tan(x+y)\quad(0\leq x<\pi,\ 0\leq y<\pi)$ の極値を求めなさい.

(2) 半径 r の円に外接する三角形のうち，最小の面積をもつのはどのような場合か．また，その最小値はいくらか.

(筑波大 2003)　(m20031311)

0.68 $2\leq x\leq 2$ で定義された関数

$$f(x)=\begin{cases} 2\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2}\leq x\leq 2\right) \\ 0 & \left(0\leq x\leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.

(2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい.

(3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

（筑波大 2004）　(m20041306)

0.69 $f(x)=x\ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\ln x$ を求めよ.

(2) $x\geq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y=f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3) x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004）　(m20041308)

0.70 xy 平面上に 2 本の曲線 $y=x^2-1$ と $y=-(x-k)^2+(k+1)$ が与えられているとする.

(1) これらが 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ.

(2) k が上で求めた範囲の値のとき, 2 曲線で囲まれた図形の面積が最大となるような k の値, および面積の最大値を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を公式として用いてよい.

（筑波大 2004）　(m20041311)

0.71 曲線　$y=2x^2\sqrt{x}-5x^2\quad(x\geq 0)$　について, 次の問いに答えよ.

(1) y が最小値をとる x の値と, その最小値は何か?

(2) y の変曲点における x の値は何か?

(3) y が上に凸である x の範囲と, 下に凸である x の範囲を示せ.

(4) y のグラフの概形を描き, その上に, x 軸と交わる点, 最小値をとる点, 変曲点の座標をそれぞれ示せ.

(5) このグラフの x 軸の下にある部分と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ.

(筑波大 2005)　(m20051302)

0.72 関数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x$ について，以下の設問に答えよ．

(1) 第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の原始関数を 1 つ答えよ．

(3) $x \leq 0$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた全領域の面積が有限か否か，理由をつけて答えよ．

(筑波大 2006)　(m20061314)

0.73 曲線 $y = x^2$ 上の点 (t, t^2) における接線を $C(t)$，直線 $x = 2$ の $y > 0$ の部分を m とする．

(1) $C(t)$ の方程式を求めなさい．

(2) $C(t)$ と m が交点をもつための t の範囲を求めなさい．

(3) $C(t)$, m および x 軸で囲まれてできる三角形の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ を t の式で表しなさい．

(4) $S(t)$ の最大値を求めなさい．

(筑波大 2006)　(m20061321)

0.74 関数 $f(x) = x \cdot \ln x \quad (x > 0)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ.　(2) 関数 $f(x)$ の極値と増減を求めよ.

(3) $x \to +0$ および $x \to +\infty$ における関数 $f(x)$ の極限値を求めよ.

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ.

曲線 $y = x \cdot \ln x$ と x 軸と $x = a \quad (0 < a < 1)$ とで囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおく.

(5) $S(a)$ を求めよ.　(6) $S(a)$ の極限値 $\displaystyle\lim_{a \to +0} S(a)$ を求めよ.

参考： グラフの描画には自然対数の底として $e = 2.72$ の値を用いなさい.

(筑波大 2007)　(m20071314)

0.75 4 次関数 $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + ax + b$ のグラフは 2 点 $x = \alpha,\ \beta \quad (\alpha < \beta)$ で x 軸と接する.

(1) a, b, α, β を求めよ.　(2) $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

(筑波大 2007)　(m20071334)

0.76 従来型テレビの画面の縦横比は３：４であり，新型テレビでは９：１６である．これについて，以下の問いに答えよ.

(1) 従来型テレビの３：４の映像全体を新型テレビの画面全体に引き伸ばして映すには，縦横いずれの方向に何倍拡大する必要があるか.

(2) デジタル一眼レフカメラで撮影した画像の縦横比は２：３である．この画像の縦横比を変えずに，できるだけ大きくテレビ画面に映す場合，画面全体に対する余白の面積比はいくらか．従来型テレビ，新型テレビのそれぞれの場合について求めよ.

(筑波大 2008)　(m20081332)

0.77 次の連立不等式で示される領域 S について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} 3x+2y \leqq 18 \\ x+2y \leqq 10 \\ x \geqq 0 \\ 0 \leqq y \leqq 4 \end{cases}$$

(1) S の面積を求めよ．

(2) S 中で $x+y$ の値を最大にする点での x と y の値を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081334)

0.78 3 次関数 $f(x)=x^3-x^2-74x+144$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(-5), f(0), f(5)$ のそれぞれの値を求めよ．

(2) $f(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸，直線 $x=-1$, $x=1$ が囲む面積を求めよ．

(筑波大 2008) (m20081338)

0.79 (1) 関数 $y=\sin^2 x$ のグラフを (x,y) 平面上に描きなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か．定義を述べなさい．

(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である．この面積を km^2 の単位で表しなさい．

(筑波大 2012) (m20121313)

0.80 デカルトの葉形と呼ばれる平面曲線 $C : x^3-3xy+y^3=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) C の特異点をすべて求めよ．

(2) C 上の点 (x,y) に関する xy の極値をすべて求めよ．

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおき，C の極方程式を求めよ．

(4) C は第 1 象限で，ある図形を囲むがその図形の面積 S を求めよ．
(ヒント：極方程式を用いて，$t=\tan\theta$ とおけ)

(筑波大 2015) (m20151303)

0.81 $x^2+3y^2=3$ で与えられる楕円 E について，以下の問いに答えよ．計算過程も示せ．

(1) $(x,y)\in R^2$ が楕円 E 上を動くとき，実関数 $f(x,y)=xy^3$ がとりうる最大値と最小値を求めよ．

(2) 楕円 E の周と内部 $(x^2+3y^2\leq 3)$ で $0\leq y\leq x$ を満たす領域の面積を求めよ．

(3) x 軸を実軸，y 軸を虚軸とする複素平面を考える．この複素平面において楕円 E を反時計回りに一周する閉路を C とする．このとき $z=x+iy$ に関する積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^5}e^{-z}dz$ の値を求めよ．

(筑波大 2015) (m20151310)

0.82 曲線 $A : y=x\cdot e^x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 A, x 軸 $(y=0)$，そして $x=a$ $(a<0)$ により囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} S(a)$ の値を求めなさい．

(筑波大 2016) (m20161307)

0.83 D を xy 平面上の領域とするとき，曲面 $z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in D\big)$ の面積は

$$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+1}\ dxdy$$

で表される．このことを用いて半径 R の球の表面積の公式を導け．

(埼玉大 1998） (m19981401)

0.84 周の長さ l が一定の扇形のうちで，面積が最大になる場合の中心角 x を求めなさい．

（埼玉大 2001） (m20011402)

0.85 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について考える.

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}x\\3\\-1\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時, x の値を求めよ.

(埼玉大 2007) (m20071405)

0.86 (1) 関数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ の導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ の第 4 次導関数 $f^{(4)}(x)$ を求めなさい.

(3) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)}{\log(\cos 3x)}$$

(4) xy 平面において $y=\dfrac{1}{\sin x}$ のグラフで与えられる曲線と 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{2\pi}{3}$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

(埼玉大 2009) (m20091401)

0.87 原点 O と 2 点 $A(1,4,2)$, $B(-2,2,3)$ において, $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ として以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ の成分を求めよ.

(2) 原点 O, 点 A および点 B で作られる三角形の面積を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ.

(埼玉大 2015) (m20151406)

0.88 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ を基本ベクトルとする xyz 空間上のベクトル場 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A}\cdot dS$ を, 発散定理を用いて求めよ. S は原点を中心とする半径 1 の球面とする.

(埼玉大 2016) (m20161405)

0.89 半径 a の円の面積を二重積分を用いて求めよ.

ただし, $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ x^2+y^2\leqq a^2\right\}$ とする.

(埼玉大 2019) (m20191404)

0.90 (1) x^3-2x^2-x+2 を因数分解せよ．

(2) 2 つの関数 $y=x^3-3x^2+3x-1$ と $y=-x^2+4x-3$ の交点を求めよ．

(3)　2 つの関数 $y=x^3-3x^2+3x-1$ と $y=-x^2+4x-3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(群馬大 2003)　　(m20031503)

0.91　次の 3 つの不等式が与えられているとき，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} ax-y & \geqq & 0 \\ x-3y & \leqq & 0 \\ 4x+3y & \leqq & 30 \end{cases}$$

(1)　この 3 つの不等式をすべて満たす領域の面積が 15 であるとき，a の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(2)　(1) で求めた a の値のとき，この 3 つの不等式をすべて満たす領域の中で，x と y の組がともに整数となるものは何組あるか．

(3)　(1) で求めた a の値のとき，この 3 つの不等式をすべて満たす x と y の組で，$-x+y$ が最小となる x と y を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091502)

0.92　二次曲線 $y=2x^2+5x+3$ を考える．

(1)　二次曲線上の点 $P(-2,1)$ における法線（点 P を通り，点 P における接線と垂直に交わる直線）の方程式を求めよ．

(2)　(1) の法線と二次曲線の交点の座標を求めよ．

(3)　(1) の法線と二次曲線により囲まれる面積を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091504)

0.93　次の 3 つの直線が与えられたとき．以下の 3 つの問に答えよ．

$$\begin{cases} y & = & ax+b \\ y & = & \dfrac{1}{2}x \\ y & = & 3x \end{cases}$$

(1)　この 3 つの直線で囲まれる面積が 10 であり，2 つの直線 $y=ax+b$ と $y=\dfrac{1}{2}x$ が垂直に交わるとする．このとき a と b の値を求めよ．ただし，$b>0$ とする．

(2)　(1) で求めた a と b の値のとき，この 3 つの直線で囲まれる領域の中で，x 座標と y 座標がともに整数となる点はいくつあるか．ただし，境界上の点を含む．

(3)　(1) で求めた a と b の値のとき，直線 $y=ax+b$ が $x=2$ において，2 次曲線 $y=cx^2+8$ と接するとする．このとき，c の値を求めよ．

(群馬大 2011)　　(m20111502)

0.94　長方形 $ABCD$（ 辺の長さが $AB=CD=4cm$，$BC=DA=2cm$ ）がある．点 P が頂点 A を出発して秒速 $1cm$ で長方形の辺の上を一周する（ 頂点 B,C,D を通り，A に戻る ）．PA を一辺とする正方形の面積を $y\,cm^2$ とする．

(1)　5 秒後の y はいくつか．

(2)　出発してから x 秒後の y を x の式で表し，図示せよ．

(群馬大 2013)　　(m20131502)

0.95　放物線 $y=4x^2+x+3$ と直線 $y=kx+2k+1$ がある．

(1) 直線が放物線の接線となる場合の，定数 k を求めよ．

(2) 2 本の接線の交点と 2 つの接点を結んで作られる三角形の面積を求めよ．

(群馬大 2013)　　(m20131503)

0.96 2 つの曲線 $y=-x^2+2x+18$,　 $y=x^3+2x^2-11x+3$ がある．

(1) 2 つの曲線の交点の座標を全て求めよ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めよ．

(群馬大 2015)　　(m20151501)

0.97 2 つの曲線 $y=x^2$ と $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$ とする) が，$x=-1$, $x=0$, $x=2$ の 3 点で交わっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) b と c をそれぞれ a の式で表せ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積を a の式で表せ．

(3) 2 つの曲線の $x=-1$ における接線が直交するときの a を求めよ．

(群馬大 2016)　　(m20161501)

0.98 蓋(ふた) のない t 個の箱 b_1, b_2, $\cdots$, b_t が置いてある．いずれの箱も高さは同じである．箱 b_n の幅と奥行きはともに a_n cm であり，$a_1=10$, $a_t=30$, $a_n=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots,t)$ とする．このとき，石を投げて箱に入れるゲームを考える．石がいずれかの箱に入る確率は $\dfrac{5}{6}$ それぞれの箱に石が入る確率は上面の面積に比例しているとする．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

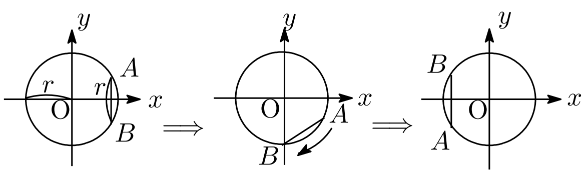
(2) すべての箱の上面の面積の合計を求めよ．

(3) 投げた石が箱 b_1 に入る確率を求めよ．

(4) 箱 b_n に石が入ったときの得点を p_n としたとき，$p_1=10$, $p_n=p_{n-1}-1$ $(n=2,3,\cdots,t)$ とする．いずれの箱にも入らなかったときの得点を 0 点とする．このとき，石を投げて得られる得点の期待値を求めよ．

(群馬大 2016)　　(m20161502)

0.99 原点を中心とする半径 $r(r>0)$ の円の円周に両端が接する長さ r の線分 AB がある．図のように AB がはじめ y 軸と平行に置かれ，線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び y 軸と平行になるまで移動する．このとき次の問に答えよ．



(1) 線分 AB が通る領域を図示し，その面積を求めよ．

(2) (1) の図形を y 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ．

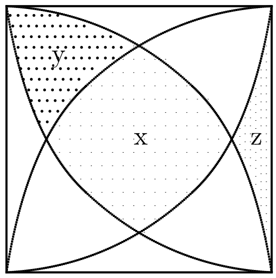
(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

0.100 右下の図形は 1 辺の長さ 1 の正方形の中に，各頂点を中心として半径 1 の円弧を 4 つ描いたものである．図の x, y, z それぞれの領域の面積をやはり x, y, z で表す．

(1) 次の各式の空欄を埋めて， x, y, z の満たす連立方程式を作れ．ただし，π は円周率である．

$$\begin{cases} \square x + \square y + \square z = 1 \\ \square x + \square y + \square z = \dfrac{\pi}{4} \\ x + 2y + z = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$

(2) x を求めよ．



(図書館情報大 1999)　　(m19991601)

0.101　1 辺の長さが 6 で，2 本の対角線の長さが 2 だけ違うひし形の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001601)

0.102　(1) 辺の長さが a の正方形の四隅を図 (A) のように切り落としてできる正 8 角形の辺の長さを求めよ．

(2) 同じ正方形の各辺の中点に頂点を持つ正 8 角形（図 (B)）の面積は，図 (A) の正 8 角形の面積の何倍か．

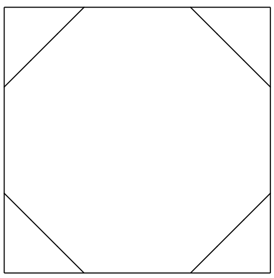


図 (A)

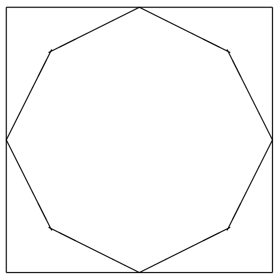


図 (B)

(図書館情報大 2000)　　(m20001602)

0.103　(1) 半径 r の円盤を，円盤と同じ中心をもつ 3 つの同心円で切って 4 つの部分に分ける（一番内側は円形，他の 3 つはドーナツ型になる）．各部分の面積が互いに等しくなるようにするには，3 つの同心円の半径をいくらにすればよいかを答えよ．

(2) 底面の半径が r，高さが h の円錐を水平に切って体積が等しい n 個の部分 $(n \geq 2)$ に分けたとき，一番上の小さい円錐のすぐ下にある円錐台の厚さを求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001606)

0.104　(1) 正確に長方形の形をした土地があり，その縦・横の長さを測ったところ，小数点以下を四捨五入して $517m$ と $483m$ であった．この土地の正確な面積は何 m^2 以上，何 m^2 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ．

(2) 正確に直方体の形をした箱があり，その縦・横・高さの長さをミリ単位で測ったところ，小数点以下を四捨五入して $200mm$, $300mm$, $500mm$ であった．この箱の正確な体積は何 cm^3 以上，何 cm^3 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ（単位の違いに注意）．

(図書館情報大 2000)　　(m20001607)

0.105　2 つの放物線 $y = x^2$ と $x = 8y^2$ の交点を求めよ．また，その 2 つの放物線に囲まれた部分の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001610)

0.106　(u, v) 平面における正方形 $A = \{(u, v) | 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1\}$ が，

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

で表される写像により,(x,y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x,y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B xdxdy$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041701)

0.107 $x>0,\ y>0$ とする. $a>0,\ 0<b<1$ のとき, 以下の各問に答えよ.

(1) 変数変換 $u=xy,\ v=\log\dfrac{y}{x}$ のヤコビ行列式 $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ を求めよ. log は自然対数である.

(2) 直線 $y=ax,\ y=(a^2+1)x$, および曲線 $xy=b,\ xy=b^2$ で囲まれた領域 $D_{a,b}$ を xy–座標平面に図示せよ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_{D_{a,b}} dxdy$ に (1) の変数変換を用いて, 領域 $D_{a,b}$ の面積 $S(a,b)$ を求めよ.

(4) $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{\partial S}{\partial b}=0$ となる点 (a,b) を求めよ. その点で $S(a,b)$ が極値をとるかどうか判定せよ.

(茨城大 2008)　　(m20081702)

0.108 次の関数を考える.

$$f(x,y)=x^2+y^2-(x^2+y^2)^2$$

$0\leqq t$ に対して $D(t)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq 1,\ f(x,y)\geqq t\right\}$ とするとき, 次の小問 (1), (2) および (3) に答えよ.

(1) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ を用いて, 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(2) 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域の面積を $F(t)$ とするとき, $F(t)$ を求めよ.
ただし, 平面上の集合 $D(t)$ が表す領域が空集合である場合や正の面積を持たない場合の t では $F(t)=0$ とする.

(3) 次の等式を示せ.

$$\int_0^\infty F(t)dt=\iint_{D(0)} f(x,y)dxdy$$

(茨城大 2018)　　(m20181703)

0.109 $-\infty<x<\infty$ である x に対して, $\tan y=x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と表わす. 以下の各問に答えよ.

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\,x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ.

(2) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P=\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3) 関数 $y=x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の微分を求めよ.

(4) 曲面 $z=\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の, xy 平面上の有界閉領域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.110 θ と ϕ を実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$ を考える．以下の小問に答えよ．

(1) 行列の積 AB を計算し，その結果を行列 A, B と同じ形に変形せよ．

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルは規格化しなくてもよい．

(3) 行列 A により xy 平面上の 4 点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換される点を求め，θ を正として図示せよ．また変換後の点が囲む面積を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181802)

0.111 任意の点 $P(x, y)$ が以下の関数により点 $Q(u, v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ． ただし，x, y は任意の実数とする．

$$u = \frac{2}{\pi}x$$
$$v = y \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ．

(2) 点 P が $(0, 1) \to \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right) \to \left(\frac{3\pi}{2}, 3\right) \to (0, 3) \to (0, 1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ．

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ．

(山梨大 2023)　　(m20231803)

0.112 (1) $y = |x - 1|$ のグラフを描け．

(2) $y = \big||x - 1| - 1\big|$ のグラフを描け．またこのグラフと軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $y = \Big|\big||x-1|-1\big|-1\Big|$ のグラフを描け．またこのグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

(新潟大 2002)　　(m20022001)

0.113 極座標表示の曲線 C ： $r = 1 + \cos\theta$　$(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の各問に答えよ．

(1) xy 座標で表したとき，x と y の最大値，最小値を求めよ．また，C の概形を描け．

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) C の長さを求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092009)

0.114 座標平面において，曲線 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする． このとき，次の各問いに答えよ．

(1) F の概形をかけ．

(2) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ．

(3) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$　$(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122016)

0.115 半径 a の円に内接する正三角形の面積を求めよ．

(新潟大 2014)　　(m20142016)

0.116 (1) 関数 $f(x) = \exp(2x)$ 上の x 座標が負である点 P における接線と， 両座標軸とで囲まれる図形の面積を S とする．点 P の x 座標を p とし，S を p で表せ．

(2) 前問 (1) において p の関数 S の最大値を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = \exp(ax)$ とその逆関数 $g(x) = \dfrac{1}{a}\log x$ のグラフが $x = e$ で接する（すなわち，この点で接線を共有する）ように定数 $a(\neq 0)$ の値を求め，この 2 曲線と x 軸，y 軸の囲む部分の面積を求めよ．

(新潟大 2017) (m20172001)

0.117 放物線 $y = -mx^2 + nx$ は第一象限で直線 $x + y = 4$ と接点 $P(t,\ -mt^2 + nt)$ で接する． ただし，$m > 0,\ n > 0$ である．次の (1),(2) に答えよ．

(1) $m,\ n$ を t の関数として表せ．

(2) 放物線と x 軸で囲まれる面積が最大になるときの $m,\ n$ とその面積を求めよ．

(新潟大 2017) (m20172016)

0.118 三角形 ABC と点 P が $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて表せ．

(2) 点 P が三角形 ABC の内部にあることを示せ．

(3) 面積の比 $\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA$ を求めよ．

(新潟大 2019) (m20192011)

0.119 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と座標軸に囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(新潟大 2020) (m20202002)

0.120 中心 O，半径 1 の円がある．円外の点 P からこの円に 2 本の接線を引き，O と接点 A, B とで作られる 3 角形 OAB の面積を S とする．P が動くときの S の最大値，およびその値を与える点 P と O との距離 $\overline{OP}$ を求めよ．

(長岡技科大 1994) (m19942102)

0.121 $a > 0,\ b > 0$ とする．定点 (a, b) を通り x 軸の正の部分および y 軸の正の部分と交わる直線を考える．この直線が x 軸 ，y 軸と交わる点をそれぞれ P, Q とする．次の各問いに答えよ．

(1) この直線と原点 O との距離の最大値を求めよ．

(2) 三角形 OPQ の面積の最小値を求めよ．

(長岡技科大 1997) (m19972101)

0.122 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の $y > 0,\ z > 0$ の部分を M とし，$A(1, 0, 0),\ B(-1, 0, 0)$ とする．M 上の点 $P(x, y, z)$ から xy 平面に下ろした垂線の足を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABQ の面積 S を $x,\ y$ で表せ．

(2) 三角錐 $PABQ$ の体積 V を $x,\ y$ で表せ．

(3) P が M 上を動くとき，V の最大値を求めよ．

(長岡技科大 1999) (m19992101)

0.123 xy 平面で, 2 曲線 $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$ で囲まれる部分を S とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) S の概形を描き, その面積を求めよ．

(2) S を y 軸の回りに回転させてできる回転体を V とする. V の体積を求めよ．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, V の $t \leqq y \leqq t+1$ にある部分の体積の最大値を求めよ.

（長岡技科大 2004） (m20042101)

0.124 xyz 空間に 4 点 $O(0,0,0),\ A(1,-2,-1),\ B(-2,-5,0),\ C(2,1,0)$ をとる．以下の問に答えよ．

(1) 直線 AB と yz 平面との交点を求めなさい．

(2) 3 点 A, B, C を通る平面と x 軸との交点を求めなさい．

(3) 三角形 OBC の面積を求めなさい．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2006) (m20062102)

0.125 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線の交点 A, B の座標を求めなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(3) 点 P が曲線上の A と B の間を動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2006) (m20062103)

0.126 座標平面に 2 点 $A(3,0)$, $B(0,4)$ をとる．点 P が円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値と最小値を求めなさい．

(長岡技研大 2007) (m20072103)

0.127 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい．

(2) 区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a,b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和 $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_{k-1})+f(a_k)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$ を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい．

(長岡技科大 2007) (m20072104)

0.128 $0<t<1$ として，空間の 4 点

$$A(t,\sqrt{1-t^2},0),\ B(t,-\sqrt{1-t^2},0),\ C(-t,0,\sqrt{1-t^2}),\ D(-t,0,-\sqrt{1-t^2})$$

を考える，以下の問いに答えなさい．

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい．

(2) $\triangle CDE$ の面積 S を t で表しなさい．

(3) 四面体 $ABCD$ の体積 V を t で表しなさい．

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい．

(長岡技科大 2008) (m20082103)

0.129 (1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めなさい．

(2) xy 平面で，$t \leqq x^2+y^2 \leqq 2t$ を満たす部分を D_t とする．D_t の概形をかき，その面積を求めなさい．

(3) t が正の実数の範囲を動くとき，2 重積分 $V(t) = \iint_{D_t} e^{-x^2-y^2} dxdy$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092103)

0.130 曲線 $y = e^x$, 直線 $y = 3$ および y 軸で囲まれた部分 S の面積を A とする.

(1) S の概形を描き, その面積 A を求めなさい.

(2) $0 < t < \log 3$ とする. S のうちで $t \leqq x \leqq 2t$ の範囲にある部分の面積 $A(t)$ を求めなさい.

(3) t が前問の範囲を動くとき, $A(t)$ の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102102)

0.131 xy 平面上において, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ で表される領域を D とし, $-x \leqq y \leqq -x+1$, $x \leqq y \leqq x+1$ で表される領域を E とする. 以下の問いに答えなさい.

(1) E の概形を描き, その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\iint_D x^2\, dxdy$ を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\iint_E (x+y)^2\, dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102103)

0.132 3 辺の長さが 1 である台形の面積の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2011)　　(m20112103)

0.133 xy 平面において，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq 1$ で表される領域を D とする．以下の問いに答えなさい.

(1) D の概形をかき，その面積を求めなさい.

(2) 2 重積分 $\iint_D x\, dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2012)　　(m20122102)

0.134 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える． $\mathrm{A}(r, 0)$ とし，円周上に点 B を $\angle\mathrm{AOB} = 30^\circ$ になるようにとる．　下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014)　　(m20142104)

0.135 関数 $y = \sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする．下の問いに答えなさい.

(1) 図形 S を図示し，面積を求めなさい.

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい.

(長岡技科大 2015)　　(m20152103)

0.136 xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．　x 軸上に点 $T(t, 0)$, $0 < t < 1$ をとる．点 T を通る直線 ℓ と円 C との交点を A, B とする．ただし, 直線 ℓ は点 O を通らないとする. $\triangle OAB$ の面積を S とするとき，下の問いに答えなさい.

(1) 直線 ℓ と点 O の距離を h とするとき，h の取りうる値の範囲を t で表しなさい.

(2) 前問の h を用いて S を表しなさい.

(3) S の最大値 $f(t)$ を t で表しなさい.

(長岡技科大 2016)　　(m20162102)

0.137 a, h を正の定数とし, 関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=h-a(x^2+y^2)$ とする. $f(x,y) \geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし, その面積を S とする. また, xyz 空間で, 曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする. 下の問いに答えなさい.

(1) D を xy 平面上に図示しなさい. また, S を a と h で表しなさい.

(2) $V=\dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい.

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

0.138 3次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とします. x,y,z は直交座標系の座標で, $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は, 規格化された基底ベクトルです. 3次元ベクトル場

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\, U(r)$$

について以下の問に答えなさい. ここで,

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\ ,\ \ U(r)=\exp(-ar)$$

で, a は定数です.

(1) div $\boldsymbol{A}$　　(2) rot $\boldsymbol{A}$

(3) 3次元ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を, 中心が座標の原点で半径が R の球の球面上を面積分した値 B を求めなさい.

$$B=\oint \boldsymbol{A}\cdot da$$

(金沢大 2005)　　(m20052210)

0.139 位置ベクトル $\boldsymbol{r}=xi+yj+zk$, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 曲面 S の面要素を dS, dS に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として以下の問いに答えなさい.

(1) $\nabla\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を計算しなさい. ただし $y\neq 0$ とする.

(2) 原点 O を含まない閉曲面 S に対して, 以下の面積分を求めなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS$$

(3) 原点 O を含む半径 a の球面 S に対して, 次の式が成り立つことを示しなさい.

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}dS=4\pi$$

(4) (3) の関係式が, 原点 O を含む任意の閉曲面 S に対して成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2015)　　(m20152210)

0.140 平面 $x+y+z=1$ が座標軸と交わる点を A,B,C, 3点 A,B,C を結ぶ線分で囲まれた三角形を S とする. ベクトル関数 $\boldsymbol{A}=2x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ の S 上での面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を計算しなさい. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S の単位法線ベクトルで, 原点から S へ引いた垂線の向かう向きとする.

(金沢大 2016)　　(m20162211)

0.141 (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれれとも異なるとする．$Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{ (t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ.

(金沢大 2019) (m20192207)

0.142 次の問いに答えよ.

(1) 正の数 A, B および実数 α に対して，$\boldsymbol{R}^2$ 内の集合

$$\left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ A(x-\alpha)^2 + By^2 \leqq 1 \right\}$$

で表される図形の面積を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ 内の集合

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \ \middle|\ \frac{x^2}{4} + 4y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$$

と平面 $H = \left\{ (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \ \middle|\ x + z = 1 \right\}$ の共通部分 $H \cap E$ で表される図形の面積 S を求めよ.

(金沢大 2021) (m20212210)

0.143 (1) $\alpha > 1$ のとき，関数 $f(x) = (x + |x|)^{\alpha}$ は $\boldsymbol{R}$ 上の C^1 級関数であることを証明せよ.

(2) 集合 $\left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ \dfrac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq -2 \right\}$ の面積を求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(x^2\right)}$$

(金沢大 2022) (m20222201)

0.144 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい.

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである.

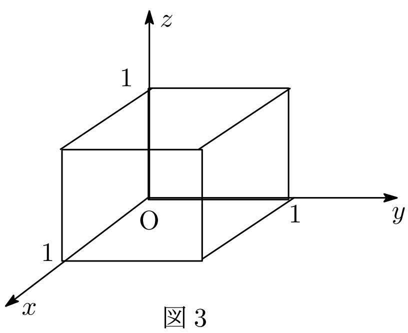


図 3

(金沢大 2022) (m20222213)

0.145 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004） (m20042306)

0.146 $a>0$ とし, $D=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2 \leqq \frac{3}{4}a^2\right\}$ とする. R^3 内の曲面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \quad (x,y)\in D$$

の面積を求めよ.

(富山大 2004) (m20042316)

0.147 関数 $y=\sin x+\cos x \ \ (0 \leqq \ x \leqq \ 2\pi)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) y の導関数を求め, 関数 y の増減と極大値, 極小値を調べよ.

(2) 関数 y のグラフを描け, 関数 y と x 軸との交点の座標も明らかにせよ.

(3) x が 0 から $\frac{3\pi}{4}$ の範囲で, 関数 y と x 軸で囲まれる面積を求めよ.

(富山大 2006) (m20062306)

0.148 $y=\sqrt{x-a}$, $(a>0, \ x\geq a)$ で与えられる曲線 C と C 上の点 $P(p,q)$ で接し, 点 $(0,b)$ を通る直線 L を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) 直線 L の方程式を a,b,p 用いて表せ.

(2) p と q を a と b で表せ.

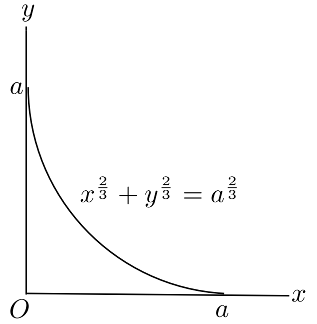
(3) 上の結果を用いて, 直線 L と曲線 C および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ. ただし, $b=0$ とする.

(富山大 2013) (m20132305)

0.149 曲線 : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \quad (x \geqq \ 0, \ y \geqq \ 0, \ a>0)$ に関する次の問いに答えよ.

(1) この曲線は $0 \leqq \ t \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たす t を用いて, $x=a\sin^3 t$ と表すことができる. 同様に y を t で表せ.

(2) 曲線と x 軸, y 軸が囲む領域の面積を π と a を用いて表せ.



(富山大 2014) (m20142305)

0.150 xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと．

(1) 頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ．

(2) 点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ．

(3) (2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ．

(4) 三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152308)

0.151 関数 $f(x)$ が $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - x^3$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．計算の概略も示すこと．

(1) $f(x) = 0$ となる最大と最小の x の値を求めよ．

(2) 極大値と極小値をすべて求めよ．さらに $f(x)$ の概形も描け．

(3) $f(x)$ が x 軸とつくる閉じた図形の面積を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152309)

0.152 θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ．

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.153 次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021)　　(m20212304)

0.154 3 つの点 $A(0,1,1)$, $B(-1,-1,2)$, $C(2,3,1)$ を頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

(福井大 2000)　　(m20002412)

0.155 3 直線 $4x - 3y + 3 = 0$, $x - 4y + 4 = 0$, $-3x - y + 14 = 0$ によって作られる三角形について，次のものを求めよ．

(1) 面積　　　　(2) 外心の座標

(福井大 2003)　　(m20032402)

0.156 半径 r の円の面積を積分により計算し, その値が πr^2 となることを証明しなさい.

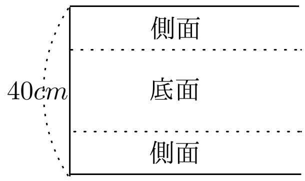
（福井大 2004）　　(m20042409)

0.157 次の二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣接する 2 辺とする平行四辺形がある. この平行四辺形の面積を求めよ. ただし, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は, 各々 x, y, z 方向の基本ベクトルである.

$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1$,　　$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$

(福井大 2005)　　(m20052407)

0.158 幅 $40cm$ のアルミ板を図の点線のように折り曲げて,
水路を作りたい. 水路の断面積が最大になるようにする
には, 端から何 cm のところで折り曲げればよいか.
また, このときの断面積を求めよ.



(福井大 2005)　　(m20052416)

0.159 2 つの放物線 $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$ で囲まれた部分の面積を求めよ. （途中の計算式も書くこと）

(福井大 2007)　　(m20072405)

0.160 関数 $y = e^{-x}\sin x$, $x \geq 0$ について以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 4\pi$ の範囲で, この関数の概形を示せ. このとき $y = e^{-x}$ の概形も示せ.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) k を整数とする時, $k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ の範囲で, この関数のグラフと x 軸とに囲まれた部分の面積を求めよ.

(4) $x \geq 0$ の範囲で, グラフと x 軸との間に囲まれた面積の総和を求めよ.

(福井大 2008)　　(m20082418)

0.161 (1) 内径が a, 外径が b である球殻の体積を, 極座標系での 3 重積分を使って表し, その値を求めよ. ただし, 極座標 (r, θ, ϕ) は, 直角座標 (x, y, z) を使って,

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.162 $y^2 = ax$ と $x^2 = ay \quad (a > 0)$ で囲まれた面積を求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102405)

0.163 2 つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して次のものを計算して求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$　　(2) 列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積

(福井大 2010)　　(m20102408)

0.164 次の関数 $r = a(1 + \cos\theta)$, $(a > 0)$ で囲まれた部分の面積 A を求めよ.

(福井大 2010)　　(m20102417)

0.165 曲線 $\boldsymbol{A} : y = \sin 2x$ と曲線 $\boldsymbol{B} : y = a\sin x$ がある.
$0 < a < 2$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で以下の問いに答えよ.

(1) 右の枠内に曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の概形を描け.

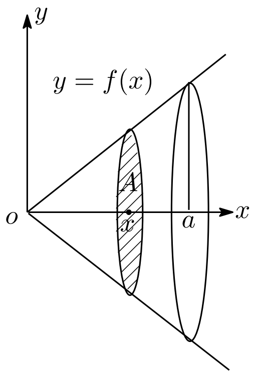
(2) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と x 軸で囲まれた面積を求めよ.

(3) 曲線 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で囲まれる面積が, (2) で求めた面積の 2 分の 1 のときの定数 a を求めよ.

(福井大 2011)　　(m20112416)

0.166 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x$ がある．この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体（回転体）の体積を，次の問いにしたがって求めよ．

(1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき，
$x = x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ．

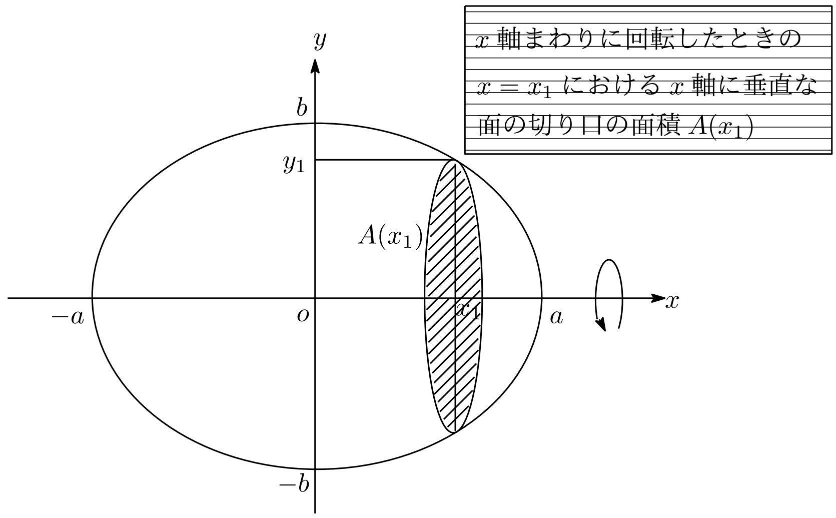


(2) 関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq a$ において x 軸のまわりに回転するときに生じる立体の体積 V を求めよ．体積 V は (1) で求めた面積 A を $0 \leq x \leq a$ の範囲で積分することで求めることができる．なお，円錐の体積を求める公式を使ってはいけない．

(福井大 2012)　　(m20122407)

0.167 右下図に示すように，2 次元 $x - y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ．

(1) この楕円の方程式を書け．



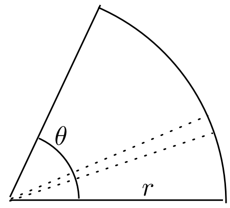
次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体の体積を求める．　各問いに答えよ．

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x = x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ．

(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと．

(福井大 2013)　　(m20132408)

0.168 右の扇形の半径 r と角度 θ を 3 回ずつ計測して表の結果を得た．
ただし，角度の単位の 1 分 ($'$) は 1 度 ($^\circ$) の 1/60，1 秒 ($''$) は 1 分 ($'$) の 1/60 を表すものとする．



r	$10.52m$	$10.54m$	$10.56m$
θ	$48^\circ\ 27'\ 21''$	$48^\circ\ 27'\ 28''$	$48^\circ\ 27'\ 23''$

(1) ある量の i 回目の観測値を x_i, n 回計測したときの最確値を $\overline{x}$ とするとき,
$\overline{x}$ は関数 $f(\overline{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ を最少化する値として算出されるとする．最確値 $\overline{x}$ を求める式を誘導しなさい.

(2) (1) の結果を用いて半径と角度の最確値を求めよ.

(3) 角度の最確値を度 ($^\circ$) の単位で小数第 4 位までの小数で示せ．また，同じ角度をラジアン単位で示せ．だたし，円周率は π とする.

(4) (3) で求めた度の単位の角度の値から，もとの度分秒の単位で角度を表す方法の手順を説明しなさい.

(5) この扇形の面積を，図に点線で示す微小な中心角を持つ扇形の集まりと考えた積分によって求めなさい.

(福井大 2013)　　(m20132418)

0.169 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 1)$ からなる正方形がある．関数 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ.

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.170 関数 $y = e^{-x}\cos x,\quad 0 \leq x \leq 2\pi$ について，以下の問に答えよ.

(1) この関数の概形を示せ.

(2) この関数と x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ.

(福井大 2015)　　(m20152417)

0.171 縦，横，高さがそれぞれ x, y, z である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L, 表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら x, y, z の値を変化させると，x, y, z がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして， 以下の (1)〜(3) に答えよ.

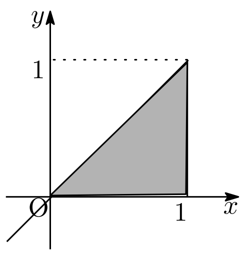
(1) 表面積 S を x, y, L のみを用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ.

(3) 上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの x, y, z の値，および S の最大値を，L を用いて表せ.

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.172 下図の灰色で塗られた領域の面積を式 (A) の形に表したとき，$\boxed{①}$ から $\boxed{④}$ にあてはまる値や式を答えよ（積分の計算を行う必要はない）.



$$\int_{\boxed{③}}^{\boxed{④}} \left\{ \int_{\boxed{①}}^{\boxed{②}} dy \right\} dx \qquad (A)$$

(福井大 2018)　　(m20182421)

0.173 xy 平面上の座標 (m,n) (m と n は整数) を，サイコロの目に従って右方向と上方向へ移動する点 P が存在する (図 1 参照)．この点 P は，サイコロを振って出た目が整数 D 以下の場合には右方向へ 1 移動して座標が $(m+1,n)$ となる．一方，出た目が D より大きい場合には，上方向へ 1 移動して座標が $(m,n+1)$ となる．

また，点 P から x 軸におろした垂線と x 軸との交点を点 Q，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を点 R とし，座標 $(0,0)$ を原点 O とする．

サイコロの各目が出る確率を $\dfrac{1}{6}$ とするとき，以下の (1)〜(3) に答えよ．

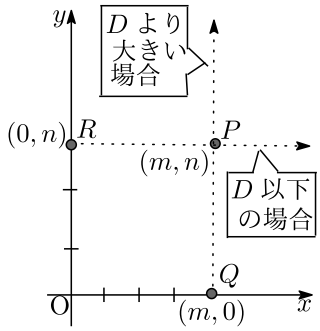


図 1：xy 平面上の点 P

(1) $D=4$ の場合を考える．すなわち，サイコロを振って 1 から 4 の目が出たら点 P が右方向に 1 移動し，5 か 6 の目が出たら上方向に 1 移動する．いま，原点 O に位置する点 P がサイコロを 2 回振ったときに座標 $(2,0)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 4 以下の目が出た回数，4 より大きい目が出た回数をそれぞれ示せ．

(b) サイコロを 2 回振ったときに，点 P が座標 $(2,0)$ に位置する確率を求めよ．

(2) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを 3 回振ったときに座標 $(2,1)$ へ移動したとする．このとき，

(a) 例えば，1 回目に D 以下の目（右へ移動），2 回目に D 以下の目（右へ移動），3 回目に D より大きい目 (上へ移動）が出ると，点 P は座標 $(2,1)$ へ移動する．このように，原点 O から $(2,1)$ へ点 P が移動する経路の総数を答えよ．

(b) サイコロを 3 回振ったときに; 点 P が座標 $(2,1)$ に位置する確率を D を使って表せ．

(3) 原点 O に位置する点 P が，サイコロを L 回振ったときに座標 (s,t) (s と t は整数) へ移動したとする．このとき，

(a) 座標 (s,t) の y 座標 t を L と s を使って表せ．

(b) サイコロを L 回振ったときに，点 P が座標 (s,t) に位置する確率を D,L,s を使って表せ．

(c) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積を s と L を使って表せ．さらに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる点 P の座標が 1 つだけ存在することを示し，面積が最大になるときの点 P の座標と面積を求めよ．

(d) L が偶数のときに，四角形 $OQPR$ の面積が最大となる座標に点 P が位置する確率を D と L を使って表せ．

(福井大 2018)　　(m20182423)

0.174 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x,y,z とし，直方体の体積を定数 $C>0$ とおく．
このとき，z を x,y,C を用いて表せ．ただし，$x>0$, $y>0$, $z>0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x,y)$ とする．$f(x,y)$ を x,y,C を用いて表せ．

(3) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\qquad f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

である．

(4) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> 定理
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x,y)$ について，
> $$g_x(a,b)=0,\quad g_y(a,b)=0$$
> のとき，
> $$D=\{g_{xy}(a,b)\}^2-g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)$$
> とおくと，$g(x,y)$ は $x=a,\ y=b$ において，$D<0$ かつ $g_{xx}(a,b)>0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x,y)$ は (4) で求めた x,y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.175 次式で表される曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

$$x=2(t-\sin t)$$
$$y=2(1-\cos t)$$
ここで，$0\leq t\leq 2\pi$

(福井大 2021)　　(m20212422)

0.176 空間のベクトル $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(3,-1,-2)$，$\vec{c}=(-1,2,-2)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する長さ 1 のベクトルを求めよ．

(3) $\vec{a},\ \vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(4) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2012)　　(m20122505)

0.177 空間内に 4 点 $A(1,1,1),\ B(2,3,2),\ C(-2,0,3),\ D(0,2,5)$ をとる．3 点 A,B,C を含む平面を π とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 平面 π の方程式を求めよ．

(2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ．

(3) 点 D と平面 π との距離を求めよ．

(4) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(静岡大 2013)　　(m20132501)

0.178 (1) 関数を $x=a\sin t,\ y=b\cos t$ とするとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) 次の関数の概略図を描け．

(a) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　(b) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　(c) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

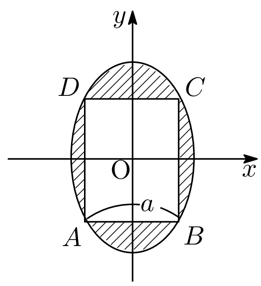
(3) ある曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012603)

0.179　2 次曲線 $y=(x+3)(x-1)$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012604)

0.180　図に示すような楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接する長方形 $ABCD$ を考える．$AB=a$ とし，楕円と長方形で囲まれた部分の面積を S とするとき，S を a を用いて表せ．



(岐阜大 2006)　　(m20062608)

0.181　表面積一定の直方体で体積最大なものは立方体であることを示せ．

(岐阜大 2008)　　(m20082618)

0.182　実平面上の x-y で表される直交座標系がある． その上で定義される関数 $f=3x^2+3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ とする． $OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\,dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\,dS}$$

は，いくらになるか計算せよ．なお式中の dS は面要素である．

(岐阜大 2009)　　(m20092601)

0.183　xy 平面に直線の方程式 ①，②，③ を用いて三角形を描くとき，次の問いに答えよ．ただし，直線の方程式は ① $x-y+1=0$，② $2x+y-4=0$，③ $x+3y+3=0$ とする．

(1)　直線の方程式 ①，②，③ の傾きと y 軸の切片を求めよ．

(2)　直線の方程式 ①，②，③ を用いて xy 平面に三角形を図示せよ．

(3)　問 (2) で図示した方程式 ① と ② の交点を A，③ と ① の交点を B，② と ③ の交点を C とし，交点 A,B,C の座標を求めよ．

(4)　交点 A,B,C で囲まれた三角形（$\triangle ABC$）の面積を求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092615)

0.184　$f(x)=x\log x\ \ (x>0)$ とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\log x$ は x の自然対数である.

(1)　x を未知変数とする方程式 $f(x^2)=f(x)$ を解け.

(2)　$y=f(x)$ のグラフの概形を凹凸も考慮して描け.

(3)　不等式 $2f(x)\leqq -\log 2$ を満たす x の範囲を求めよ.

(4)　関数 $y=2f(x)$ と直線 $y=-\log 2$ のグラフで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102601)

0.185　$a,b>0$ とする．xy 平面の第 1 象限において $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1$ が表す曲線を C とする．

また，x 軸，y 軸および C で囲まれる閉領域を A とする．以下の問に答えよ．

(1) $x = a\cos^4 t. \ y = b\sin^4 t$ とする．このとき，$\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ の値を求めよ．また，$\dfrac{dx}{dt}$ を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C を $y = y(x)$ と表し，$y'(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$ とする．このとき，$\lim\limits_{x\to a-0} y'(x)$ および $\lim\limits_{x\to 0+0} y'(x)$ を求めよ．

(3) A の概形を描け．

(4) A の面積を求めよ．

(岐阜大 2016)　　(m20162601)

0.186 x，y，z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の重心を G，$\overrightarrow{OG} = \boldsymbol{g}$ としたとき，$\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表せ．

(2) $\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ．

(3) 四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962707)

0.187 以下の問いに答えよ．

(1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, d\theta$ とする．この式の右辺に部分積分の公式を適用することにより，n が 2 以上の整数ならば $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ なる関係が成立することを示せ．

(2) 解答用紙中に記したア～エのうち，次の媒介変数表示で与えられる曲線

$x = a\cos^3\theta$，$y = a\sin^3\theta$ （ただし，$a > 0$ ）の概略を描いた図として最も適当なものを選び，図の記号ア，イ，ウ，エのいずれかに○を付けよ．(図略)

(3) また，この曲線によって囲まれる図形の面積 S を求めよ．なお，問 (1) で求めた関係を利用すると計算が容易になる．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982707)

0.188 以下の問に答えよ．

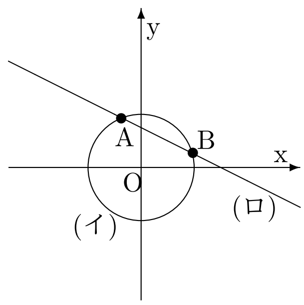
(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，円と直線の交点をそれぞれ A，B とする．

$x^2 + y^2 = 5$ $\cdots$ （イ）

$x + 2y = 3$ $\cdots$ （ロ）

(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 線分 AB の長さを求めよ．



(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている．

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\cdots$ （ハ）

$x + 2y + 3z = 7$ $\cdots$ （ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982710)

0.189 以下の連立不等式が表す領域の面積 S を求めよ．

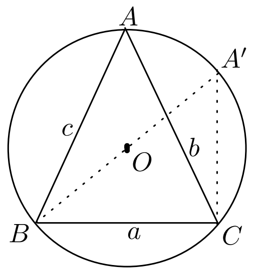
$$\begin{cases} x+y \leq 3 \\ xy \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

(豊橋技科大 1999)　　(m19992703)

0.190 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a, b, c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A, B, C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき，$\angle BA'C = \angle BAC$, $2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ．

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S = \dfrac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ．

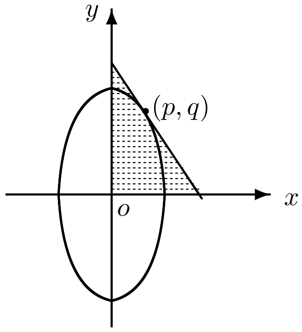


(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.191 以下の各問いに答えよ．

(1) $4x^2 + y^2 = 4$ で表される楕円上の点 (p, q) における接線の方程式は，$4px + qy = 4$ となることを示せ．

(2) $p > 0, q > 0$ のとき，問 (1) の接線と x 軸および y 軸で囲まれる面積（下図の斜線部）を最小にしたい．この面積が最小になる楕円上の点 (p_0, q_0) を求める場合の計算方法を示し，その点 (p_0, q_0) の値を示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002704)

0.192 以下に示す関数について次の各問に答えよ．

$$f(x) = \cos x + x \sin x$$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) $[-2\pi,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ の極値を求め，増減表を作成せよ．また，この関数の概形を描け．

(3) $[-2\pi,\ 0]$ および $[0,\ 2\pi]$ の区間における関数 $f(x)$ のそれぞれの最小点を結ぶ，直線の式 $g(x)$ を求めよ．そして，この直線 $g(x)$ と関数 $f(x)$ で囲まれる領域の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012706)

0.193 2 直線 $A : y = mx$, $B : y = -mx$ $(m > 0)$ と，y 軸上 $(y > 0)$ に中心をもつ円を考える．

(1) 半径 r_0 の円を 2 直線に接するように描くとき，その中心の座標 $(0, y_0)$ を求めよ．

(2) 上の円の下に，この円と 2 直線に接するように半径 r_1 の円を描くことができる．この円の半径 r_1 を求めよ．

(3) 上の操作を順次行えば，無限個の円を描くことができる．$r_0 = 1$ から始めたとき，すべての円の面積の総和を求めよ．

(豊橋技科大 2001)　　(m20012708)

0.194 空間の直交座標軸上に 3 点 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 2)$ がある. 以下の各問いに答えよ.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\overrightarrow{AC}$ を成分で表し, それぞれの大きさを求めよ.

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ.

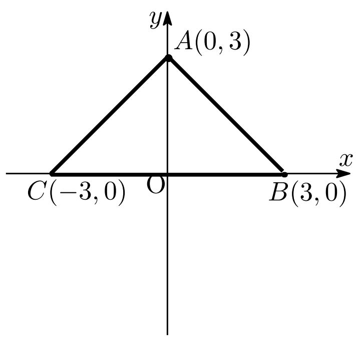
(3) 3 点を通る平面を α とするとき, 原点 O から α に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ.

（豊橋技科大 2004）　　(m20042706)

0.195 行列 F によって点 (x, y) を点 (x', y') に移す次の 1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

がある. この 1 次変換が, 点 $(2, -1)$ を点 $(4, 4)$ に, 点 $(-1, 3)$ を点 $(-2, -7)$ にそれぞれ移すとき, 以下の各問いに答えよ.



(1) 行列 F を求めよ.

(2) 行列 F の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) 下図の点 A, B, C に対して, 行列 F による 1 次変換を n 回行って移る点をそれぞれ A_n, B_n, C_n とする. $n = 1$ および $n = 2$ のとき, 三角形 $A_1B_1C_1$ と三角形 $A_2B_2C_2$ を各頂点の座標を入れて図示せよ.

(4) 三角形 $A_nB_nC_n$ の面積を S_n とするとき, S_n を n を用いて表せ.

(豊橋技科大 2004)　　(m20042707)

0.196 3 次元直交座標系における点 A , B , C の位置ベクトルをそれぞれ

$$\boldsymbol{a} = (1, 4, 3)\ ,\ \boldsymbol{b} = (2, 3, 1)\ ,\ \boldsymbol{c} = (3, p, q)$$

とする. $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p, q の関係式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから, もう一つの p, q の関係式を求めよ.

(3) 以上の関係式から p, q の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ.

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ.

(8) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2005)　　(m20052704)

0.197 以下に示す関数について次の問いに答えよ． $f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\lim_{q \to \infty} S(q)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006) (m20062706)

0.198 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ.

(3) 接線 h と直線 $x = 0$, $x = 1$, および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする.

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ.

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と接線 h，および直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2007) (m20072703)

0.199 媒介変数 t を用いて表される次の曲線について, 以下の問いに答えよ.

$$x = \sqrt{3}\,\sin t$$
$$y = \sqrt{3}\,\cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ただし, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$ である.

(1) $t = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}$ のそれぞれに対応する x y 座標上の点 A, B および C の座標を示せ.

(2) この曲線は点 A, B および C を通る楕円の一部を表している. この曲線と x 軸, y 軸の正の部分で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2010) (m20102704)

0.200 (1) 次の不定積分を解け.

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

(2) $x = 2(\theta - \sin\theta)$, $y = 1 - 2\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について以下の問いに答えよ.

(a) $y \geqq 0$ となる θ の範囲を求めよ.

(b) $y \geqq 0$ の範囲の曲線と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(豊橋技科大 2011) (m20112706)

0.201 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{2x-9}{(x-2)(x+3)}\,dx$$

(2) 楕円 $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$ の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれた領域の面積 S を求めたい．以下の問いに答えなさい.

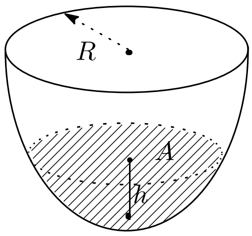
(a) 領域における x の最大値を答えよ.

(b) 面積 S を定積分を含む式で表せ.

(c) 面積 S を計算せよ.

(豊橋技科大 2012)　　(m20122705)

0.202 半径 R の上に開いた半球があり，上面が地面に対して平行になるように置かれている．この半球に水が入っており（下図の斜線部分），半球の底から測った水面の高さを h とする．次の問いに答えよ．ただし，$h \leq R$ とする.



(1) 水面の面積 A を h の関数として表せ.

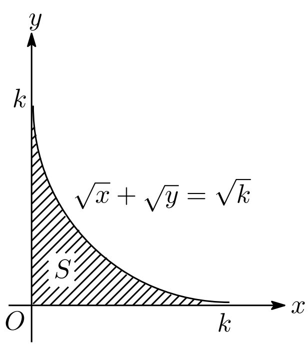
(2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ.

(3) 最下部に微小な小穴を開けた．単位時間当たりの水の体積 V の変化，すなわち dV/dt を示せ．ただし，小穴の大きさは十分に小さく，小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい.

(4) (3) の状況において，流体に関する基本定理から，単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積（体積速度）は $Sk\sqrt{h}$ で表される（S は微小な小穴の面積，k は正の定数）．単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が，半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて，高さ h と時間 t の関係式（微分方程式）を示せ．さらに，$t=0$ において $h=R$ であったとし，水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132703)

0.203 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}\quad (k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け.



(2) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ.

(3) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4$ と表されることを示せ.

(4) 立体 V の体積を求めよ.

(豊橋技科大 2014)　　(m20142701)

0.204 $x-y$ 平面上の 2 つの曲線 $y=f(x)=a-\cos 2x$ と $y=g(x)=2\sqrt{2}\sin x$ に関する以下の問いに答えよ．ただし，a は定数である.

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の導関数 $f'(x)$ と $g'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x)=g'(x)$ となる x を求めよ．ただし，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする.

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において接するとき，a の値を求めよ.

(4) (3) のように 2 つの曲線が接するとき，$x \geqq 0$ かつ (3) の接点までの範囲で y 軸と 2 つの曲線が囲む面積を求めよ．

(豊橋技科大 2015)　　(m20152701)

0.205 xy 平面上の曲線 $y = \cos(x - \pi) + 1 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = 0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.206 xy 平面上の二つの曲線 $y = \sin x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y = -\sin 2x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = \sin x$ と曲線 $y = -\sin 2x$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ．

(3) 領域 R の面積 S を求めよ．．

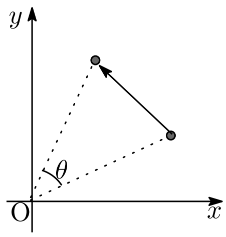
(4) 曲線 $y = \sin x$ と 曲線 $y = |\sin 2x|$ の交点を $0 < x < \pi$ の範囲で求めよ．

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182704)

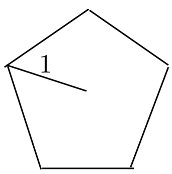
0.207 xy 平面上において，原点 O を中心に反時計回りに θ の回転を行う一次変換は下図の行列 A_θ で表される．この行列を利用して三角関数の計算を行うとともに，図形の面積の値を求めたい．以下の問いに答えよ．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



(1) ${A_\theta}^2$, ${A_\theta}^3$ を計算し，$\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．また，$A_{n\theta} = (A_\theta)^n$ であることを利用して $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$, $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を α とおく．半径 1 の円に内接する正五角形の面積を α を用いて表せ．

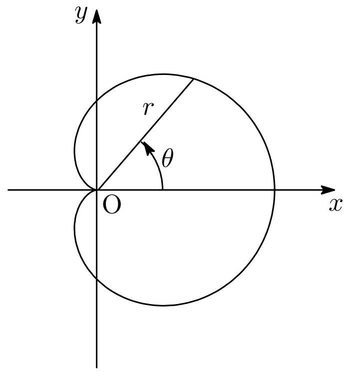


(3) (1) の結果を用いて $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値をそれぞれ求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の面積の値を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192703)

0.208　極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について，以下の問いに答えよ．



(1)　曲線上の点の座標 (x, y) を，θ を用いて表せ．

(2)　曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする．点 P における曲線の接線の方程式を，x と y を用いて表せ．

(3)　曲線に囲まれた領域の面積を求めよ．

(4)　曲線の全長を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202703)

0.209　次に示す関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 10$$

(1)　関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, 7)$ における接線 $y = g(x)$ と曲線 $y = f(x)$ が囲む領域のうち，領域 $\{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\}$ に含まれる部分の面積を求めよ．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212704)

0.210　次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ．　$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$

(1)　曲線の長さを求めよ．

(2)　曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その 2 点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0, y_0) で表し，$x_0 y_0 \neq 0$ とする．

(3)　曲線が囲む図形の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032801)

0.211　行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1)　A を適当な正則行列 P によって対角化せよ．

(2)　A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）．

(3)　A によって 1 次変換　$f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$　を定める．
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ．

(4)　頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032802)

0.212 $\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{g}(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする． 以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}'$ と記すこととする．

(1) $\boldsymbol{f}(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合，$\boldsymbol{f}(t)$ と $\boldsymbol{f}'(t)$ は直交することを証明せよ．ただし，$|\boldsymbol{f}(t)| > 0$, $|\boldsymbol{f}'(t)| > 0$ とする．

(2) 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}(t)$ とするときに，位置ベクトルが $\boldsymbol{g}'(t)$ となる点を点 B とする．もし，$\boldsymbol{g}(t)//\boldsymbol{g}''(t)$ が成り立つならば，三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{g}(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし，O は原点とする．また，$(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' \times \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}'$ の公式を用いてよい．

(名古屋大 2011)　　(m20112804)

0.213 曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ の xy 平面の上にある部分の面積を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012903)

0.214 点 $\mathrm{P}(x, x^2)$ は，放物線 $y = x^2$ 上の点で 2 点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(3, 9)$ の間にある．このとき，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積の最大値を求めよ．

(三重大 2002)　　(m20023104)

0.215 曲線 $f(x) = x^3 - a^2x$ と直線 $g(x) = a^2x$ がある（a は正の定数）．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ の概略図を描け（x 軸との交点と極大・極小点を明示せよ）．

(2) $f(x)$ と $g(x)$ の交わる 3 つの交点 $A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$ を求めよ $(x_1 < x_2 < x_3)$．

(3) 3 つの交点のうち，点 A_2 点 A_3 と曲線によって囲まれる面積 S を求めよ．

(三重大 2003)　　(m20033105)

0.216 空間ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (4, 1, 2)$ について，以下の値を求めよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$

(2) ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣りあう 2 辺とする平行四辺形の面積 S

(三重大 2003)　　(m20033109)

0.217 以下の式で表される，二つの 3 次関数について， (1)〜(3) のすべてに答えよ．

$$y = -2x^3 + 8x^2 - 6x \qquad ①$$

$$y = x^3 - 2x^2 + ax \qquad ②$$

(1) ①，②で表される 2 本の曲線は，原点 $(0, 0)$ で交差する．このほかに，ただ 1 点で両者が接するような， a の値を求めよ．以下の問題で， a はこの値を取るとする．

(2) ①の関数の増減表は，以下のようになる．

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'				0				0			
y		0		$\dfrac{40-28\sqrt{7}}{27}$		0		$\dfrac{40+28\sqrt{7}}{27}$		0	

表中の空欄に適切な内容を記入し，増減表を完成せよ．記入内容は以下の通りとする．

(a) x の行の空欄には，適切な数値を記入する（分数・無理数を含む可能性がある）．

(b) y' の行の空欄には，正負のいずれの値を取るかを示す $-$ または $+$ を記入する．

(c) y の行の空欄には，グラフの傾きを表す $\searrow$ または $\nearrow$ を記入する．

また，xy 平面上に，①,② の曲線の概形を描き，以下の座標を記入せよ．

(a) 曲線同士の交点・接点

(b) x, y 軸との交点

(c) （もしあれば）極大点・極小点

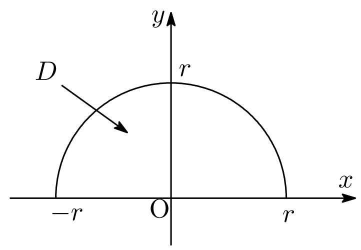
(3) 曲線①,②で囲まれた図形の面積を，積分を用いて求めよ．

（三重大 2004）　(m20043106)

0.218 平面図形 D が xy 平面内に存在するとき, 図形 D の図心の y 座標を $\overline{y}$ とすると,

$\overline{y} = \dfrac{1}{S}\displaystyle\iint_D y dxdy$ （ただし, S は図形 D の面積）

で与えられる. これを用いて, 図に示すような半円（半径 r）の図心の y 座標を求めよ.



（三重大 2004）　(m20043107)

0.219 直交デカルト座標系における基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ のとき, 内積（スカラー積）$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ および $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の交角の余弦を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ の $\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ 上への正射影を求めよ.

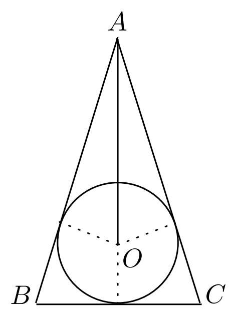
(3) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ のとき, 外積（ベクトル積）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ. また, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ を 2 辺とする三角形の面積を求めよ.

（三重大 2004）　(m20043114)

0.220 図のように $AB = AC$ となる二等辺三角形 ABC が, 半径 1, 中心 O の円に外接する. 次の問に答えよ.

(1) $AO = x$ として, 二等辺三角形 ABC の面積 S を x で表せ.

(2) 面積 S が最小となる場合の各辺の長さを求めよ.



（三重大 2005）　(m20053106)

0.221 円に内接する四角形 $ABCD$ があり, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 2$, $DA = 1$ のとき, 次の問に答えよ.

(1) $\cos A$ の値を求めよ.

(2) 四角形 $ABCD$ の面積を求めよ.

（三重大 2005）　(m20053115)

0.222 1 辺が 10cm の正方形を底面にもつ，高さ 15cm の四角錐の容器を上下逆さまに置く．この容器に毎秒 0.5cm^3 の割合で水を静かに注ぐとき、以下の問に答えなさい．

(1) t 秒後の水面の深さを y(cm)，水面の 1 辺の長さを x(cm) としたとき，水面の面積 $S(\text{cm}^2)$ と水の体積 $V(\text{cm}^3)$ を x, y であらわせ．また，x と y の関係を示しなさい．

(2) 水面の 1 辺の長さ x(cm) を t で表しなさい。

(3) 水面の面積 $S(\mathrm{cm}^2)$ を t で表し、S の増加する割合を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063108)

0.223 空間ベクトル $\boldsymbol{m} = (1, -3, 1)$ と $\boldsymbol{n} = (3, 2, -2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ の値を求めなさい.

(2) $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 点 $A = (1, 4, 0)$ を通り，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ に平行な平面の方程式を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063110)

0.224 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x \quad (0 \leqq x \leqq 4)$ がある. いま, 原点を通る直線を引いたところ, この直線は原点を含めて 3 点で曲線と交わり, 直線と曲線で囲まれた 2 つの領域ができた. この 2 つの領域の面積が等しいとき, この直線の方程式を求めなさい.

(三重大 2010)　　(m20103102)

0.225 ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x\,,\ A_y\,,\ A_z)$ とベクトル $\boldsymbol{B} = (B_x\,,\ B_y\,,\ B_z)$ が与えられている. 以下の問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ によって構成される平行四辺形の面積を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ がなす角度を θ とした場合に，$\cos\theta$ の値を求めよ.

(三重大 2012)　　(m20123103)

0.226 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0, 1, 2)$ と点 $B(3, 3, 0)$ がある. このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ.

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ.

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ. ただし，正規化しなくて良い.

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.227 確率密度関数に関する以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x) = k\,(1 - |x|)$ 　（ただし, $|x| \leqq 1$）が確率密度関数となるように，定数 k の値を定めよ. ここで，確率密度関数 $f(x)$ と x 軸の間の面積は 1 であるという性質がある.

(2) X を確率変数とするとき，(1) に示す確率密度関数 $f(x)$ から求められる確率 $P(-0.3 \leqq X \leqq 0.8)$ を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133115)

0.228 xyz 空間に 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 2)$, $B(3, 4, 3)$ がある. このとき，以下の問いに答えなさい.

(1) $\angle AOB = \theta$ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい.

(3) 平面 OAB の方程式を求めなさい.

(三重大 2014)　　(m20143103)

0.229 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$, $x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，
極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.230 3 次元直交座標系の xyz 空間に点 A$(0,\ 1,\ 1)$，点 B$(-a,\ 0,\ 1)$，点 C$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$ がある．ただし，a は正の実数で，$0\leqq\ t<2\pi$ である．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\angle ACB=\theta$, $t=\pi$ とした場合，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる a を求めなさい．

(2) (1) の条件において，$\triangle ABC$ の面積を求めなさい．

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とする．点 C について t を変化させたとすると，$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{AC}$ が垂直となるような a がただ一つ決まる場合の $\cos t$ と $\sin t$ を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163102)

0.231 (1) 曲線 $y=\log_e x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線が曲線 $y=ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ．

(2) この接線，曲線 $y=ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163112)

0.232 (1) $2x+y+2z=3$ で表される平面 A と，$x^2+y^2+z^2=5^2$ で表される球面 S がある．球面 S を平面 A で切ったとする．このとき，この平面 A で切った球面 S の切り口部分の面積を求めなさい．

(2) $x+y+z=1$ で表される平面 A と，$2x+y+z=1$ で表される平面 B の交線の方程式を求めなさい．

(3) ある平面に点 A,B,C があり，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ が (a,b)，ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が (c,d) と表されるとき，三角形 ABC の面積を求めなさい．

(三重大 2017)　　(m20173102)

0.233 3 次元空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 となるベクトルを全て求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からなる行列 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix}$ の固有値を求めよ．

(三重大 2018)　　(m20183101)

0.234 xyz 直交座標系であらわされる空間の xy 平面上に楕円 E,

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$$

がある．楕円 E を底面とし，z 軸上の点 $(0,0,2)$ を頂点とする錐体（楕円錐）P について以下の問いに答えなさい．ただし，$0 \leqq z \leqq 2$ とする．

(1) 錐体 P の方程式を x,y,z を用いてあらわしなさい．

(2) 楕円 E 上の点 $(0,2,0)$ をとおり，$\overrightarrow{n}=(0,1,3)$ を法線とする平面 α の方程式を示しなさい．

(3) 平面 α による錐体 P の切断面の外周上の任意の点を X とする．平面 α 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ と X との距離 R（$\overrightarrow{\mathrm{XA}}$ の大きさ）は定数になる．R を求めなさい．

(4) 平面 α による錐体 P の切断面の面積 S を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203108)

0.235 a を正の定数とする．$xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1\ :\ y=-\frac{x^2}{2}+a \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$C_2\ :\ y=-\log x \quad (\ x>0\ )$$

について考える．いまこれらの曲線はただ 1 つの共有点を持つとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 直線 $y=a$ と C_2 の交点の座標を求めよ．

(3) C_1 , C_2 と直線 $y=a$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2007)　　(m20073203)

0.236 $xy-$ 平面上の 2 つの曲線

$$C_1\ :\ y=\sin x \qquad (0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$$
$$C_2\ :\ y=\sin(x-a) \qquad (0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$$

について考える．ただし，a は正の定数で，$0<a \leqq \pi$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $a=\frac{\pi}{2}$ のとき，C_1, C_2 のグラフの概形を描け．

(2) $0<x \leqq\ 2\pi$ の範囲において，C_1 と C_2 の二つの交点の x 座標を，それぞれ t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ とする．t_1, t_2 を a で表わせ．

(3) $t_1 \leqq\ x \leqq\ t_2$ の範囲で，C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

(奈良女子大 2008)　　(m20083203)

0.237 関数 $f(x)=e^x-e^{-x}$ のグラフ G に関して次の問いに答えよ．

(1) 原点におけるグラフ G の接線 L の方程式を求めよ．

(2) 接線 L は，グラフ G と原点以外で交わらないことを示せ．

(3) グラフ G，接線 L および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093203)

0.238 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y=\log x\ \ (x>0)$$

と，原点を通り C に接する直線 ℓ に対して，次の問に答えよ．

(1) 曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ.

(2) 曲線 C, 直線 ℓ および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2011) (m20113203)

0.239 xy平面上の曲線

$$C : y = e^x + x$$

に対して, 次の問に答えよ.

(1) 原点を通り曲線 C に接する直線 ℓ を求めよ.

(2) 曲線 C, 直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2012) (m20123208)

0.240 xy平面上の曲線

$$C : y = e^x$$

と, 点 $(a, 0)$ を通り曲線 C に接する直線 ℓ に対して, 次の問に答えよ. ただし a は実数である.

(1) 直線 ℓ を求めよ.

(2) 曲線 C, 直線 ℓ および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(奈良女子大 2013) (m20133203)

0.241 xy平面上の曲線

$C : y = xe^{-x}$

について次の問に答えよ.

(1) C 上の点 $(a,\ ae^{-a})$ における C の接線の方程式を求めよ. ただし a は実数とする.

(2) C 上の点 $(1,\ e^{-1})$ における C の接線を ℓ とする. C, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(3) y 軸上の点 $(0, b)$ を通る C の接線がちょうど 2 本存在するための, b のみたすべき条件を求めよ.

(奈良女子大 2014) (m20143207)

0.242 $xy-$ 平面上の曲線

$C : y = \log(1+x^2)\ \ (x \geqq\ 0)$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して, 次の問に答えよ. だだし, 対数は自然対数とする.

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) 曲線 C の概形をかけ.

(3) 曲線 C, 接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(奈良女子大 2015) (m20153208)

0.243 関数 $f(x) = x^2(1-x)^4$ と $g(x) = x^4(1-x)^2$ を, $0 \leqq x \leqq 1$ において考える. 以下の問いに答えよ.

(1) f の増減を $0 \leqq x \leqq 1$ において調べ, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ. さらに, $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ.

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq f(x)$ かつ $0 \leqq y \leqq g(x)$ の表す領域の面積を求めよ.

(奈良女子大 2018)　　(m20183203)

0.244　a を正の定数として，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx$ の値を以下の手順で求めよう．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy$$

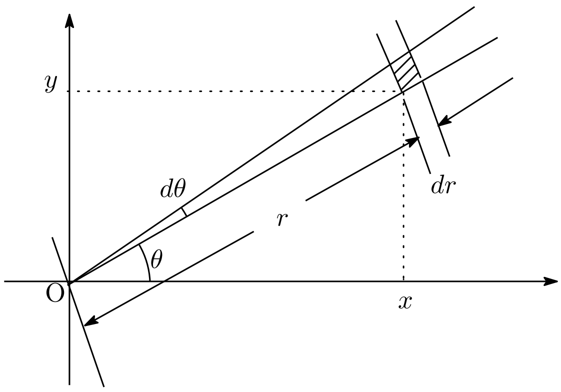
であるから，

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ay^2)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a(x^2+y^2)\right] dxdy$$

という面積分を実行し，その結果の平方根をとればよい．このとき，点 (x, y) の位置ベクトルを $\overrightarrow{r}$ として，$r = |\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{r}$ と x 軸のなす角を θ とおく．

(1)　x および y を r と θ の式で表せ．

(2)　下図の斜線部の微小面積を，r, dr, θ, $d\theta$ のうち必要なものを用いて表せ．



(3)　I^2 を xy 直交座標による面積分から r と θ で表される極座標での面積分に変換せよ．

(4)　前問の面積分を実行し，それにより I の値を求めよ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183205)

0.245　関数 $r = a(1+\cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1)　この閉曲線の長さ L を求めよ．

(2)　この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.246　N を 0 または正の整数をとる確率変数とする．ポアソン分布では $N = n$ となる確率が次の分布関数で与えられる．

$$p(N = n) = a^n e^{-a}/n!$$

(1)　ポアソン分布の平均値 $<n> = \sum_0^\infty np(N=n)$ が a となることを示せ．

(2)　面積 S の運動場に全部で M 粒の雨滴が落ちたとする．運動場の微少な部分（面積 A）に落ちた雨滴の数を L とするとき，その確率分布 $p(L = l)$ は $p = A/S$ として次の 2 項分布で与えられる．

$$p(L = l) = [M!/l!(M-l)!]p^l(1-p)^{M-l}$$

$a = (M/S)A$ を導入し，適切な極限を考えることにより 2 項分布からポアソン分布を導け．

(京都大 2002)　　(m20023307)

0.247 行列 A に対して, その行列式の値を $|A|$, その絶対値を $abs|A|$ と表記する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

(2) 点 $P(x_1, y_1)$ と原点を通る直線の方程式を行列式を用いて表現せよ.

(3) 平面上の 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積 S は以下のように表現できることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} abs \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

（京都大 2004）　　(m20043303)

0.248 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C \ : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ.

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ.

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ.

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け.

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.249 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．２つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)〜(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ.

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.250 半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}$ を求めよ.（3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい.）

(京都大 2010) (m20103302)

0.251 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x=r(t-\sin t),\ y=r(1-\cos t)\quad(0\leq t\leq 2\pi)$ で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a,0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x=a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012) (m20123303)

0.252 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている. $\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す. これらを用いて, 集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta)=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x}\leq 1\}$$

と定義する. ここに, $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i$$

である. このとき, 次の (1)〜(4) に答えよ.

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ.

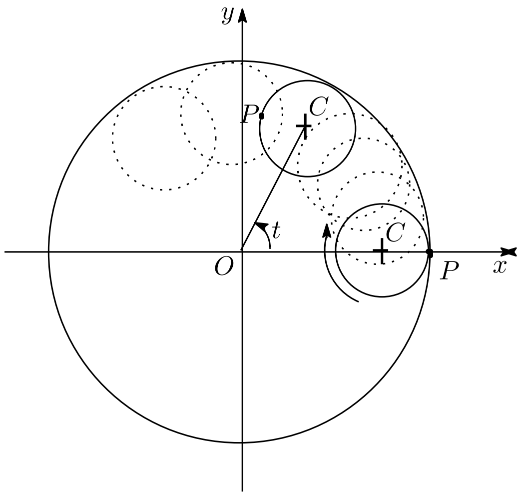
(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け.

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ.

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し, その面積を求めよ. ここに, $\boldsymbol{x}\in\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは, $0\leq\theta_0\leq\pi/2$ なる θ_0 があって, $\boldsymbol{x}\in\Omega(\theta_0)$ となることである.

(京都大 2015) (m20153305)

0.253 原点を中心とした半径 a の大円がある. 大円の中に半径 $a/4$ の小円があり, 初期状態において座標 $(a,0)$ にある点 P で大円に内接している. 小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると, 小円は反時計回りに大円の内側を移動する. 点 P は小円の移動と回転に従って移動する. 大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする. このとき, (1)〜(6) に答えよ.



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.254 $y = ax^2$ と $y = x + k$ $(k > 0\ ,\ a > 0)$ があり，負の交点を A，他方を B とする．原点 O と A と B を通る円がある．O 以外での x 軸と交わる円の交点を C とする．このとき CB は x 軸と垂直である．次の各問に答えよ．

(1) a と k の関係を求めよ．

(2) 円の方程式を a で表せ．

(3) 四角形 $OACB$ の面積は円の内接四角形の最大の面積の何倍か．

(大阪大 1997)　　(m19973501)

0.255 xy 平面上で，曲線 C は媒介変数 θ を用いて，

$$x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta$$

$$y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta$$

で表される．ただし, $a > 0$ とする．

この曲線 C によって表される図形について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概略図を示せ．

(2) 曲線 C に囲まれる図形の面積を求めよ．

(大阪大 2005)　　(m20053502)

0.256 2 つの曲線 $(y-a)^2 = a(a+x)$, $(y-a)^2 = a(a-x)$ がある．ただし，$a > 0$ とする．

次の問に答えなさい．

(1) 2 つの曲線の交点を求めなさい．また 2 つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x-y$ 平面において，2 つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2 つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい.

(4) 2 つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに 1 回転させた時にできる立体の体積を求めなさい.

(大阪大 2006)　　(m20063504)

0.257 (1) xy 平面上において曲線 $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ により囲まれる領域の面積を求めよ.

(2) x, y が $2x^2 - 2xy + y^2 = 2$ を満たすとき, $x + y$ の最大値, 最小値を求めよ.

(大阪大 2007)　　(m20073501)

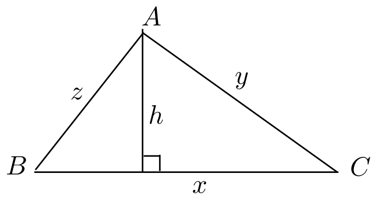
0.258 a を正定数とする. 3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える.

$BC = x$, $CA = y$, $AB = z$ とする. 頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする. 次の問いに答えよ.

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を, x および h を用いて表せ.

(2) 体積 V を x, y の関数として表せ. 同時に, 変数 x, y の動きうる領域 D を図示せよ. 必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい.

(3) x, y が領域 D 内において変動するとき, V の値が最大となるときの x, y の値およびそのときの V の値を求めよ.



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.259 ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q} = (q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積, 外積をそれぞれ $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$ と表す. 以下の問いに答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C} = (C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 3, 5)$, $\boldsymbol{b} = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{c} = (8, 3, 2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ.

(3) 空間内に直交座標系をとる. $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする.

$$\boldsymbol{e}_r = \cos u\, \cos v\, \boldsymbol{i} + \sin u\, \cos v\, \boldsymbol{j} + \sin v\, \boldsymbol{k}$$

とおく. 正の定数 R に対して, 原点を中心とした半径 R の球面 S は, 次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる.

$$\boldsymbol{r} = R\mathbf{e}_r,\ \ 0 \leqq u \leqq 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが, 点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める. このとき, ベクトル $\boldsymbol{F} = \dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して, S における次の面積分を求めよ.

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.260 (1) ある病気の検査をすると，この病気の罹患者が陽性（その病気である）と判定される確率は 2/3 である．一方，非罹患者が誤って陽性と判定される確率は 1/3 である．また，母集団に対してこの病気に罹患している割合は 1/10 とする．

(a) この母集団から無作為に選ばれた A さんが，検査により陽性と判定された．このとき，A さんがこの病気に罹患している確率を求めよ．

(b) A さんが同じ検査を何度も受ける．このとき，最低何回連続して陽性と判定されると，A さんの罹患確率が 9/10 以上となるか求めよ．ただし，この検査により陽性と判定されるかどうかは，検査ごとに互いに独立であるとする．

(2) 農作物 A, B の収穫量は，その年の夏の暑さのみに依存して変動する．A の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 20 トン，平年並みの場合は 8 トン，冷夏の場合 0 トンとなる．B の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 0 トン，平年並みの場合は 10 トン，冷夏の場合 38 トンとなる．来年の夏が猛暑，平年並み，冷夏となる確率がそれぞれ 1/2, 1/4, 1/4 と予想されている．

(a) 来年の A と B の単位面積あたりの収穫量の期待値と分散をそれぞれ求めよ．

(b) 暑さに左右されず，安定した収穫量が得られるように A と B の作付面積の比を決定したい．いま，総作付面積のうち，A を作付ける割合を x，B を作付ける割合を $1-x$ とするとき，単位面積あたりの A と B をあわせた収穫量の期待値と分散を求めよ．また，分散が最も小さくなる割合 x を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193504)

0.261 原点を中心とした半径 r $(r \neq 0)$ の球面 S は媒介変数 u, v（ラジアン単位）を用いて，

$$\boldsymbol{r}\big(=\boldsymbol{r}(u,\ v)\big) = r\,\boldsymbol{i}_r = r\cos u\cos v\,\boldsymbol{i}_x + r\sin u\cos v\,\boldsymbol{i}_y + r\sin v\,\boldsymbol{i}_z$$

$$(0 \leqq u \leqq 2\pi,\ -\pi/2 \leqq v \leqq \pi/2)$$

と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{i}_x$, $\boldsymbol{i}_y$, $\boldsymbol{i}_z$ は x, y, z 座標のそれぞれの基本ベクトルであり，$\boldsymbol{i}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルである．

(1) $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$ を r, $\boldsymbol{i}_r$, v で表せ．

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{R} = \dfrac{u^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ とするとき，$\boldsymbol{R}$ の球面 S に沿う面積分，

$$\iint_S \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S の外向きの単位法線ベクトルとする．

(大阪大 2021)　　(m20213502)

0.262 3 次元空間の原点 O と 3 点 A, B, C を，$(0,0,0)$, $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$, とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ を用いて示せ．

(2) 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて示せ．

(大阪府立大 2008)　　(m20083604)

0.263 x, y は次のような変数 θ の関数である．

$$x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta) \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq\ 2\pi)$$

2 次元直交座標系 $(x,\ y)$ において, x, y が表す曲線（サイクロイド）と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(大阪府立大 2010)　　(m20103613)

0.264 $r:[a,b]\ \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，$a\leq\theta\leq b$ を α とする．ここで $0\leq a\leq b\leq\pi/2$．曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$，α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A}=\int_a^b f(r)d\theta\ , \qquad \mathcal{L}=\int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta)=1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.265 xz 平面において，曲線 $z=\sqrt{8-x^2}$ 　(ただし $0\leqq x\leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z=x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) V の体積を求めよ．

(4) $\displaystyle\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ の値を求めよ．

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.266 xy 平面上の閉領域 D を

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqq 1\right\}$$

と定め，

$$z=x^2-y^2 \qquad ((x,y)\in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V=\int_D|x^2-y^2|dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021)　　(m20213806)

0.267 二次方程式 $ax^2+x+b=0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x,y)=ax^2+xy+by^2+x+y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 二変数関数 $f(x,y)$ が極値をとる点 (x,y) を，a, b を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため，$x=x(a,b)$, $y=y(a,b)$ とかける．特に $x>0$ かつ $y>0$ となるような a, b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a,b)$ とする．このとき $V(a,b)$ は最大値を持つが，$V(a,b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ．

(神戸大 2022)　　(m20223803)

0.268 位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{j} + 3\vec{k}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{i}$, $\vec{j}$ および $\vec{k}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを，O は原点を表す．

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ．

(鳥取大 2007) (m20073913)

0.269 次の問に答えよ．

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ $\quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ．

(鳥取大 2011) (m20113904)

0.270 曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$ および直線 ℓ : $x = \dfrac{a}{2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) $x \geqq \dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(鳥取大 2013) (m20133901)

0.271 $n = 1, 2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ．

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ で与えられることを示せ．

(岡山大 2006) (m20064002)

0.272 xy 平面内で $x^2 + 3y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ を満たす領域の面積を求めよ．

(広島大 2014) (m20144102)

0.273 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C \ : \ \begin{cases} x = f(\theta) \cos\theta \\ y = f(\theta) \sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.274 (1) 方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ が表す座標平面上の 2 次曲線を図示せよ．

(2) (1) の 2 次曲線で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) (1) の 2 次曲線上での xy の最小値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184103)

0.275 $0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B \,\middle|\, x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $B(r)$ の体積を求めよ．

(2) $B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3) $B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.276 次の直線と円で囲まれた図形の面積を積分して求めなさい．

$$\begin{cases} y=x \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases}$$

(山口大 2005)　　(m20054302)

0.277 (1) $\log(1+x)$ を x の無限級数に展開しなさい．

(2) $f(x)=x^{\log x}$ の導関数を求めなさい．

(3) 半径 a の円の面積を積分を使って求めなさい．

(4) $0\leq x\leq 1$ において $0\leq x^4\leq x^2$ であることを用い，　$\dfrac{\pi}{4}<\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx<1$　を示しなさい．

(山口大 2008)　　(m20084301)

0.278 ベクトルに関する以下の問いに答えなさい．

(1) x,y,z の成分で表した 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=(4,5,6)$ と $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$ について，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_{\perp}$ に分解する．$\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{A}_{\perp}$ それぞれの x,y,z 成分を求めなさい．

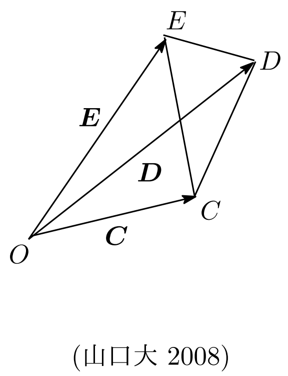
(2) 右図のように原点を O にとり，三角形 CDE の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ とする．ただし，$\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ は同一平面上にはない．

(a) 三角形 CDE を通る無限に広い平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ を用いて表しなさい．ただし，必要な変数は自分で定義しなさい．

(b) 三角形 CDE の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{C}\times\ \boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\times\ \boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\times\ \boldsymbol{C}\right|$$

と表せることを示しなさい．



(山口大 2008)　　(m20084302)

0.279 曲線 $y^3=x^4$, $x^3=y^4$ の原点 O 以外の交点を P とし，O より P に至る両曲線の弧で囲まれる図形の面積を求めなさい．

(山口大 2008)　　(m20084303)

0.280 $0 \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq r$ 区間（r：定数）で x 軸と y 軸, $x^2+y^2=r^2$ で囲まれる部分の面積 S が $\pi r^2/4$ であることを積分を用いて示しなさい.

(山口大 2010)　(m20104303)

0.281 次の曲線と直線とで囲まれた図形の面積を求めなさい.

$$\begin{cases} y^2 = 2x+5 \\ y = -x-1 \end{cases}$$

(山口大 2011)　(m20114303)

0.282 曲線 $y = x^3 - 12x + 16$ を D とする．曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(山口大 2012)　(m20124304)

0.283 半径が 1 である半円に内接する長方形の最大面積を求めなさい.

(山口大 2014)　(m20144303)

0.284 四角形 $ABCD$ は，円に内接し，$AB=6$, $BC=CD=3$, $\angle D = 60°$ である．この四角形 $ABCD$ の面積を求めなさい.

(山口大 2017)　(m20174303)

0.285 曲線 $y = 1-x^2$ について，次の問題に答えなさい.

(1) x 軸とこの曲線とで囲む図形の面積を求めなさい.

(2) この曲線の第一象限における長さを求めなさい.

(山口大 2017)　(m20174304)

0.286 $0 \leq x \leq \pi$ のとき，2 つの曲線 $y = -\sin x$ と $y = \sin 2x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい.

(山口大 2018)　(m20184304)

0.287 一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする.

さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする,

(1) 線分 AM, AN, MN の長さを求めなさい.

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい.

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい.

(山口大 2021)　(m20214303)

0.288 曲線 $5x^2 + 2xy + y^2 = 4$ の囲む面積を求めなさい.

(山口大 2021)　(m20214304)

0.289 (1) 次の不定積分を計算せよ．ただし，$x > 0$ で n は自然数とする.　$\displaystyle\int x^n \log x\,dx$

(2) 次の定積分を計算せよ.　$\displaystyle\int_0^\pi x \sin x\,dx$

(3) 3 点 $A=(-x_1, x_2, 0)$, $B=(0, x_2, x_3)$, $C=(x_1, 0, x_3)$ を頂点とする三角形の面積を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ．ただし，a は定数とする.　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k+a}$

(愛媛大 2008)　(m20084607)

0.290 a, b は実数で，$0 < a < 1$ を満たすとする．xy 平面において，2 つの関数のグラフ

$$C : y = \log x\ , \quad l : y = ax + b$$

がただ一つの共有点を持ったとき，次の問に答えよ．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) $b > 0$ となるような a の範囲を求めよ．

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，曲線 C，および 3 直線 l，$x = 0$，$y = 0$ で囲まれた部分の面積を求め，a のみを用いて表せ．

(愛媛大 2011) (m20114606)

0.291 a を正の整数とし，2 曲線 $C_1 : y = |x|e^{-x}$，$C_2 : y = ae^{-x}$ で囲まれた図形の面積を S とする．

(1) 関数 $y = |x|e^{-x}$ の増減，極値を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{S}{a^2}$ を求めよ．

(愛媛大 2015) (m20154608)

0.292 $a > 1$ とし，$f(x) = (e^x - 1)(e^x - a)$ とおく．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，および $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形をかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(3) S を (2) で求めた値とするとき，$\displaystyle\lim_{a \to 1+0} \frac{S}{(a-1)^3}$ を求めよ．

(愛媛大 2016) (m20164604)

0.293 円柱面 $x^2 + y^2 = 4$ の内部にある円柱面 $x^2 + z^2 = 4$ の表面積 S を求めよ，

(愛媛大 2017) (m20174610)

0.294 a, b は実数で，$a > 0$ とする．関数 $f(x) = \dfrac{bx + 1}{x^2 + a}$ が $x = -1$ で極値 $\dfrac{1}{2}$ をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の増減，極値および極限 $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べ，グラフの概形を描け．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(愛媛大 2017) (m20174611)

0.295 関数

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$$

がある．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(2) 直線 ℓ が以下の条件 (i), (ii) の両方をみたすとする．

(i) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ は 3 点で交わり，そのうち 1 点は (1) で求めた変曲点である．

(ii) 直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ の 3 つの交点の x 座標を小さい値から順に a, b, c としたとき，

$$\int_a^c f(x)dx = 20$$

である．

このとき，直線 ℓ を表す方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と (2) の直線 ℓ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を求めよ．

(愛媛大 2022)　　(m20224605)

0.296 xy 平面上の点 (x,y) と，uv 平面上の点 (u,v) との間に

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y$$

という対応関係がある．このとき，xy 平面上の 3 点 $A(0,0),B(1,0),C(1,\frac{\pi}{2})$ を頂点とする三角形 ABC を，上の対応関係によって uv 平面上に移した図形を P として，次の問いに答えよ．

(1) 図形 P がどのような図形であるかを示せ．

(2) 図形 P の面積を求めよ．

(九州大 2000)　　(m20004701)

0.297 S を平面上の円とする．

(1) A, B が S 上にあり，P が円弧 AB の上を動くとき，$\triangle APB$ の面積はいつ最大になるか答えよ．

(2) S に内接する n 角形 $(n\geqq 3)$ の面積はいつ最大になるか，理由を付けて答えよ．

(九州大 2003)　　(m20034701)

0.298 xyz 空間内の円柱面 $T:x^2+y^2=x$ と曲面 $S:z=\sqrt{x^2+y^2}$ について，次の設問に答えよ．

(1) T, S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ．

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034703)

0.299 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて
$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$
と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

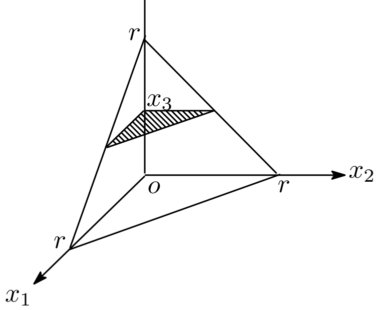
0.300 正の数 r と整数 $n\geqq 1$ に対して

$$K_n(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ |\ x_i\geqq 0\ \ (1\leqq i\leqq n)\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\leqq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.

$$|K_n(r)|=\int\cdots\int_{K_n(r)}1\ dx_1\cdots dx_n$$

次の問に答えよ.



(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.301 $f = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}z^2 - 1$ とする. 座標系の原点を O, x, y, z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i, j, k とし, 以下の問に答えよ.

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ.

(2) 曲面 $f = 0$ 上の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を, z_0 を用いて表せ.

(3) $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = 2\cos\theta$ とおく. ただし, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ である. 曲面 $f = 0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ.

(4) (3) と同じ表記の下で, $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする. $\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ. ただし, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$ である.

（九州大 2004）　　(m20044707)

0.302 2 変数関数 $z = x^2 - y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z = 0$ による切り口はどんな図形になるか, 方程式と図で説明せよ.

(2) $z = x^2 - y^2$ のグラフの表す曲面と, 柱面 $x^2 + y^2 = 1$ と xy 平面 $z = 0$ で囲まれる立体図形 : $0 \leqq z \leqq x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の体積を求めよ.

(3) $z = x^2 - y^2$ のグラフの作る曲面が, 柱面 $x^2 + y^2 = 1$ で切り取られる部分 : $z = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.303 3 次元空間内で

$$S\ :\ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える. ただし, D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である. このとき, S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2}\ dudv$$

で与えられる. ただし, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す. これを用いて以下の問いに答えよ.

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\ \ dxdy$$

であることを示せ.

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007)　　(m20074707)

0.304　xyz 空間において，　$z = e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1)　曲面 Σ と　$z = 0,\ x^2 + y^2 = na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2)　曲面 Σ と　$z = 0,\ x = a,\ x = -a,\ y = a,\ y = -a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = a,\ x = -a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3)　V を $V_1,\ V_2$ と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.305　3 次元空間において二つの曲面　$A\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,$　$B\ :\ x^2 + y^2 = x$　を考える．

(1)　これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ．

(2)　曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084711)

0.306　$f(x),\ g(x)$ を以下の関数とするとき，各問いに答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$g(x) = 1 - x^2$$

(1)　曲線 $f(x),\ g(x)$ および直線 $x = 1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(2)　(1) の領域の周囲の長さ L を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094706)

0.307　図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある. この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす. このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）. 棒の左端 P から距離 $t\ (0 < t < 1)$ だけ離れた棒上の点を R とする.

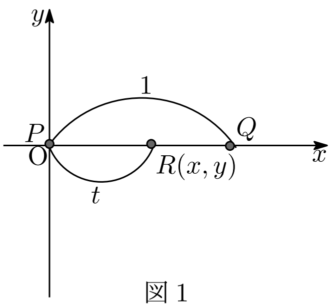


図 1

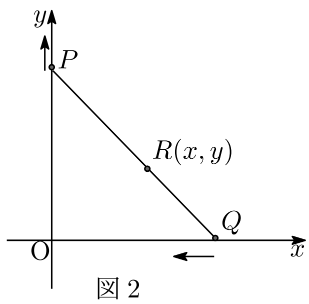


図 2

(1)　点 P が原点 O から点 $(0, 1)$ まで移動するとき, 点 R はどのような軌跡を描くか. 点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め, この軌跡の図形の名前を記せ.

(2)　(1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

(3)　(2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104702)

0.308　アステロイド $C\ :\ x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ に対し，各問いに答えよ．

(1)　曲線 C 上の点 (x, y) に対し，$x = \cos^3 t$ のとき，y を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ.

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ.

(九州大 2011)　　(m20114702)

0.309 直交座標を (x, y), 極座標を (r, θ) とするとき, 曲線 C : $r = 2(1 + \cos\theta)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 曲線 C と x 軸, y 軸との交点の直交座標を求めて, 曲線 C の概形を xy 平面上に描け.

(2) $r \leqq 2(1 + \cos\theta)$, $y \geqq 0$, $y \leqq -\dfrac{1}{2}x + 2$ で表される領域の面積を求めよ.

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ.

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.310 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ, xy 平面上にグラフをかけ. ただし, $e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.311 直交座標系の x, y, z 軸の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とし, 位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とする. 閉曲線 $C : \boldsymbol{r} = 2\cos\theta\boldsymbol{i} + 2\sin\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲線 C 上の点における大きさ 1 の接ベクトルを求めよ.

(2) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{4}x^2 y$ の 閉曲線 C に沿う線積分を求めよ.

(3) 閉曲線 C で囲まれた円板を S とし, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A} = -\frac{1+z}{x^2}\boldsymbol{i} + \frac{z^2}{xy}\boldsymbol{j} + (x^2 z - y)\boldsymbol{k}$$

とする. $(\bigtriangledown\varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi(\bigtriangledown \times \boldsymbol{A})$ の S 上の面積分を求めよ.

(九州大 2016)　　(m20164704)

0.312 直交座標系において, x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする. ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y^3 z/3)\boldsymbol{k}$ と, xy 平面, yz 平面, zx 平面で切り取られた平面 $2x + 2y + z = 2$ が作る三角形領域 S について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \boldsymbol{A}$ の S に対する面積分を求めよ.

(3) S を囲む閉曲線 C に対して, C を構成する三つの各線分の位置ベクトルをそれぞれ x と y で表せ.

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の C に沿う線積分を, 三つの各線分に沿う線積分を計算して求めよ. ただし, 線積分の方向は原点から見て時計回りの方向とする.

(九州大 2019)　　(m20194704)

0.313 $f(x, y) = \arctan\dfrac{x}{y}$ 　について考える.

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) 以下の条件下のもとで $f(x,y)$ の曲面積を求めよ．

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1$$

(九州大 2020)　　(m20204703)

0.314 以下のように XY 平面上の点 $(x_1,\ y_1)$ を点 $(x_2,\ y_2)$ へうつす線形変換 $(*)$ を考える．

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

(1) ア) 行列 M の行列式の値 $(\det M)$ を求めよ．

イ) x_2, y_2 を用いて，x_1, y_1 をそれぞれ書き表せ．

(2) 原点を中心とした単位円 C： $x^2+y^2=1$ を，線形変換 $(*)$ を用いて変形した閉曲線 D を考える．D を表す x, y の方程式を求めよ．

(3) 原点を中心とし，x 軸と y 軸に長短径をもつ楕円 E は以下の方程式で表される．

$$E\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

E を原点まわりに反時計方向に角度 θ だけ回転した楕円 E' を表す式を求め，以下の空白ア〜ウを埋めよ．

$$E'\ :\ \left(\boxed{\text{ア}}\right)x^2+\left(\boxed{\text{イ}}\right)xy+\left(\boxed{\text{ウ}}\right)y^2=1$$

(4) (3) の結果を用いて閉曲線 D が楕円であることを示し，その面積を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224705)

0.315 $y=ax^2$ $(a>0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上に点 $P(x_p, y_p)$ がある．また，点 P の接線と x 軸との交点を点 A とする．

(1) 点 P を中心点として x 軸に接する円を描く．この円に対して，原点 $(0,0)$ を通る接線 $(y=kx)$ を求めよ．

(2) 交点 A の x 座標値を求めよ．

(3) $y=ax^2$，点 P の接線，x 軸で囲まれる面積 S を求めよ．

(4) 点 P と x 軸の両方に接する円の中心点 $Q(x_q, y_q)$ の座標値 x_q を求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034909)

0.316 二次曲線 $y=ax^2+b$ と直線 $x=-1$，$x=1$ および $y=0$ とで囲まれる部分を面 D とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．ただし，a, b は定数であり，$a>0$，$b \geqq 0$ とする．

(1) 面 D の部分に斜線を施して図示しなさい．

(2) 二次曲線の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分を，曲線が x 軸に接するまで y 軸と平行に移動したとき，この曲線の移動部分がつくる面の面積 S を求めなさい．

(3) 面 D を y 軸を中心に回転させたときの回転体の体積 V_y，および x 軸を中心に回転させたときの体積 V_x を求めなさい．ただし，$a=b=1$ とする．

(4) $b=0$ のとき，$V_y=V_x$ が成り立つ a の値を求めなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034910)

0.317 極座標 (r, θ, ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め，これらの結果を用いて，半径 a の球の面積 S，および体積 V を計算しなさい．

(佐賀大 2003)　　(m20034933)

0.318 次の問に答えよ.

(1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする.　いま曲線が極座標 $r = f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta = \theta_1$ および $\theta = \theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \{f(\theta)\}^2\, d\theta$$

(2) 曲線 $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ の囲む面積を求めよ．ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(3) 極座標 r の直交座標の微分量（変分）について, その二乗和の平方根を考慮することにより $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ の境界線の全長を求めよ．ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005)　　(m20054925)

0.319 $y = x^2 - 1$ と $y = -2x + 2$ に囲まれた部分の面積を求めなさい.

(佐賀大 2007)　　(m20074904)

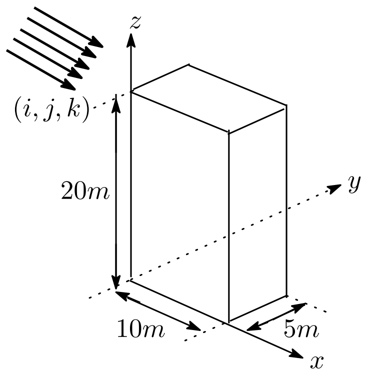
0.320 半径 R の円に内接する長方形のうち, 面積が最大なものを求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074916)

0.321 直方体のビルに太陽光があたっている.
ビルに対して, 右図のように $x-y-z$ 座標系を設定したときに, 太陽光はベクトル (i, j, k) と平行な方向に進行するものとする．ただし,

$i^2 + j^2 + k^2 = 1$

であるとする．このビルにできる影の面積を i, j, k により表せ．なお, 地表面は完全な平面になっているものとする, また, $i > 0$, $j > 0$, $k < 0$ とする.



(佐賀大 2007)　　(m20074929)

0.322 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ と両軸座標で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(佐賀大 2009)　　(m20094932)

0.323 次の曲線と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

$y = -x^2 + 3x$

(佐賀大 2010)　　(m20104926)

0.324 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれる領域の面積が πab で与えられることを定積分を用いて示せ.

(佐賀大 2013)　　(m20134902)

0.325 次の図形の面積を求めなさい.

(1) $y = 2x^2$ と $y = 2x + 4$ で囲まれた部分

(2) $y = (4 - x)\sqrt{x}$ と x 軸で囲まれた部分

(佐賀大 2013)　　(m20134927)

0.326 半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき, 円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし, $\theta = 0$ のとき, 点 P は原点に位置したとする.

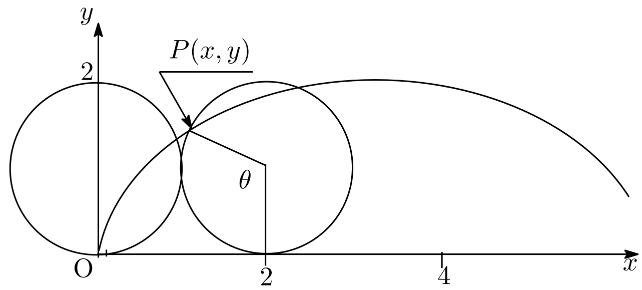
(1) 回転角が θ で与えられるとき, 点 P の x 座標と y 座標を求めよ.

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ.

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ.

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ.

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.327 (1) 平面上のベクトル $a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ が作る平行四辺形の面積を求めよ.

(2) 行列 A を n 次正方行列，行列 I を n 次単位行列とするとき，つぎを求めよ.

$$\begin{bmatrix} I - A & A \\ -A & I + A \end{bmatrix}^3$$

(佐賀大 2022)　　(m20224903)

0.328 一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える.

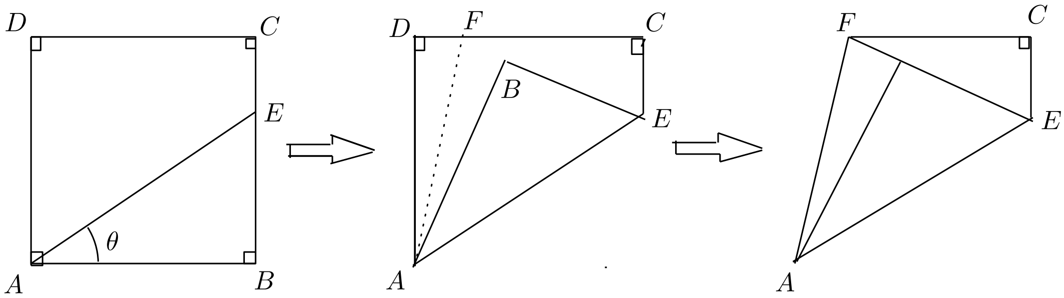


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ.

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか.

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.329 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0, 0)$ および点 $A(1, 1)$, 点 $B(x, y)$ を考える. また, 2×2 行列を $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $< \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} >$ で表す.

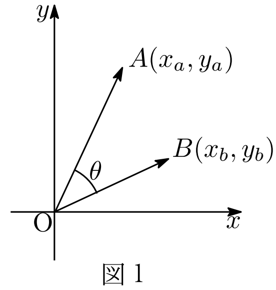


図 1

(1) $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x, y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される.
このことを用いて,

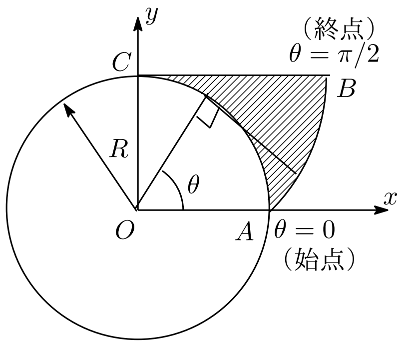
$$4S^2 = |M|^2$$

が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055004)

0.330 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.



(1) 図のように $\theta = 0$ の位置からはじめて $\theta = \pi/2$ まで糸が外れた. 円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき, 糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta = \pi/2$ まで糸を外す間に, 糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.

$$AB = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.

(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = R^2\left\{\int_0^{\pi/2} \left(\theta\sin\theta\cos\theta + \theta^2\sin^2\theta\right) d\theta - \frac{\pi}{4}\right\}$$

で与えられる. 右辺に含まれる定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007)　　(m20075002)

0.331 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx$

(2) 次の方程式で囲まれる面積を求めよ. ただし, a, b は定数である. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(長崎大 2007)　　(m20075011)

0.332 3 次曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ のグラフを描き, これと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(長崎大 2008)　　(m20085016)

0.333 ベクトル $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{b} = (3, -1, 2)$ の場合, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(長崎大 2008)　　(m20085018)

0.334 次の関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ に関する以下の設問に答えよ.

(1) y のグラフを描きたい. x 軸との交点を求めよ.

(2) y のグラフの概形を図示せよ.（特に極大値と極小値を求めなくてよい）

(3) $(0 \leq x \leq 2)$ の区間の面積を求めよ.

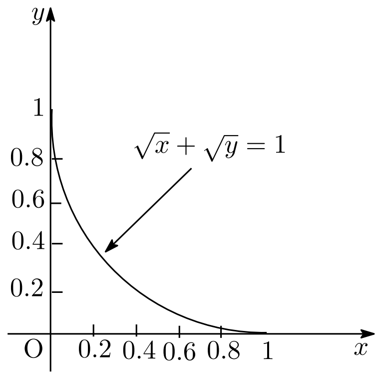
(4) 上で概形を図示した y のグラフと, $y = ax$ との交点について考える. a の値により交わる点が変化する. a の値と交点の数との関係について説明せよ.

(長崎大 2010) (m20105010)

0.335 右図に示すような曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ について, 以下の問題に答えよ.

(1) この曲線と直線 $x = 0,\ y = 0$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ.



(長崎大 2011) (m20115005)

0.336 $y = x^2 - \dfrac{4}{3}x - \dfrac{4}{3}$ と $y = -x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$ で示される二つの曲線がある.

(1) 二つの曲線の交点の座標を求めよ.

(2) 二つの曲線で囲まれた領域の面積を求めよ.

(大分大 2002) (m20025103)

0.337 W を荷重, ρ を密度, g を重力の加速度, $A(x)$ を面積とするとき, ある工学の問題において次式を満足する $A(x)$ を求めることが必要になる. 次の問に答えなさい. ただし, W , ρ および g は一定とする.

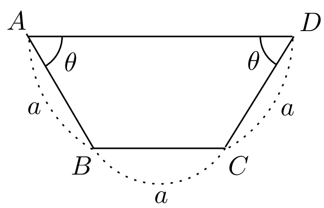
$$\sigma_0 A(x) = W + \int_0^x \rho g A(t)dt\ ,\quad A_0 = A(0) > 0\ ,\quad \sigma_0 = \frac{W}{A(0)}$$

(1) 上式の両辺を x で微分した式を求めなさい.

(2) (1) で得られた式を解いて, $A(x)$ を求めなさい.

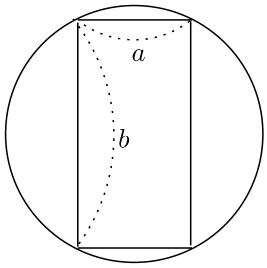
(大分大 2004) (m20045103)

0.338 図のような 3 辺 AB, BC, CD の長さが a の台形がある. この 3 辺の長さは変わらないとして, 台形の面積が最大となるような角度 θ を求めなさい.



(大分大 2013) (m20135101)

0.339 半径 r の円に内接する長方形がある. 長方形の面積が最大となるような辺の長さ a, b を, 円の半径 r を用いて表しなさい.



(大分大 2013) (m20135103)

0.340 ２つの放物線 $\alpha y^2 = \beta^2 x$ および $\beta x^2 = \alpha^2 y$ に関して次の問いに答えなさい．ただし，α と β はともに正の定数である．

(1) 共有点を求め，グラフを描きなさい．

(2) ２つの放物線で囲まれる部分の面積を求めなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095203)

0.341 関数 $f(x) = e^{-x}\sin x \quad (x \geqq 0)$ において，次の問に答えなさい．

(1) a と b を実数とし，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めなさい．

(2) n を自然数とし，区間 $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ において，曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(3) $f(x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ の値を求めなさい．

(熊本大 2011)　　(m20115202)

0.342 曲線 $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ と直線 $g(x) = -x + c \quad$ (c は定数) が第 1 象限で接しているとき定数 c の値を求め, さらに $f(x)$，$g(x)$ と縦軸 y で囲まれる面積 S_1 および $f(x)$，$g(x)$ と横軸 x で囲まれる面積 S_2 を求めなさい．

(鹿児島大 2005)　　(m20055406)

0.343 頂点の座標が, A 点 $(1, 0, 1)$, B 点 $(2, 0, 1)$, C 点 $(3, 3, 5)$ で与えられる $\triangle ABC$ の面積と法線方向の単位ベクトルを求めなさい．

(鹿児島大 2005)　　(m20055414)

0.344 ２曲線 $y = (x-2)^2$ と $y = -x^2 + 4x - 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2006)　　(m20065406)

0.345 高さ h，底面の半径 r，母線の長さ l の円錐の体積 V 及び表面積 S を求めよ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065409)

0.346 曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ のグラフを描きなさい．また，この曲線で囲まれた図形の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2007)　　(m20075407)

0.347 (1) 曲線 $y = x^2$ 上の点 $P(1, 1)$ における接線の方程式を求めなさい．また，そのグラフも描きなさい．

(2) 曲線 $y = x^2$ と (1) で求めた点 P での接線と x 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2008)　　(m20085406)

0.348 4 点 $A(1, 2)$，$B(3, -2)$，$C(x, y)$，$D(-2, 0)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ が平行四辺形である様に点 $C(x, y)$ の座標を求めなさい．また，その平行四辺形の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2008)　　(m20085407)

0.349 (1) $\displaystyle\int (2x^2 - 1/x)^2 dx$ を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$ を求めなさい．

(3) 楕円（長軸 a，短軸 b，$x = a\cos\theta$，$y = b\sin\theta$）の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095412)

0.350 原点 $O(0,0)$，点 $A(4,-1)$，点 $B(2,2)$ がある時，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めなさい．

(2) 角 AOB を θ とする時，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい．

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095419)

0.351 曲線：$y=x^2$ と直線：$y=2x$ によって囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009)　　(m20095420)

0.352 曲線：$y=x^2$ と, 曲線：$y=\sqrt{x}$ $(x>0)$ とによって囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2010)　　(m20105410)

0.353 曲線：$y=2x^2$ と，その曲線上の点 $P(1,2)$ での接線と，x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2011)　　(m20115413)

0.354 ベクトルに関する以下の各問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ について，$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}\neq 0$ が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，求める θ の範囲は $-\pi\leq\theta\leq\pi$ とする．

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.355 曲線：$y=x^2$ と曲線：$x=y^2$ で囲まれる領域の面積を求めなさい．また，その領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125420)

0.356 以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $y=\cos x\quad(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$ と x 軸で囲まれた面積を求めなさい．

(2) t の関数 $F(t)=\displaystyle\int_0^{10}z(x)\cos(t-x)dx$ の最大値が $\sqrt{\left\{\displaystyle\int_0^{10}z(x)\cos x dx\right\}^2+\left\{\displaystyle\int_0^{10}z(x)\sin x dx\right\}^2}$ となることを示しなさい．ただし，$z(x)$ は，x に関する任意の関数である．

(鹿児島大 2012)　　(m20125422)

0.357 曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) この曲線と，直線 $x=0$，直線 $x=1$ 及び x 軸とで囲まれた領域の面積 S を求めなさい．

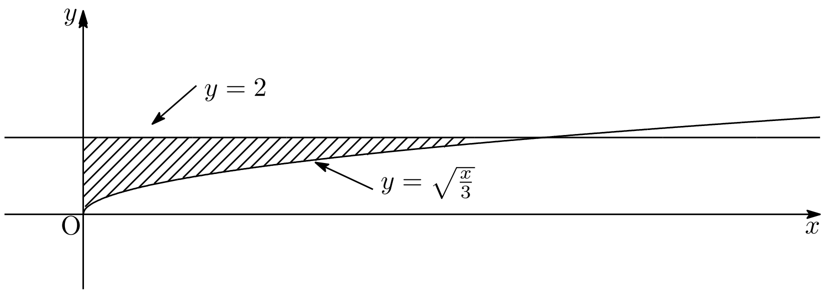
(2) $0\leq x\leq 1$ の範囲のこの曲線の長さ ℓ を求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135410)

0.358 直線 $y=2$ と曲線 $y=\sqrt{x/3}$ と y 軸によって囲まれる図形（下図の斜線部）の面積を求めたい．以下の (1),(2) に答えよ．

(1) 斜線部の面積を求めるための手順を簡潔に説明せよ．

(2) 斜線部の面積を求めよ．



(鹿児島大 2014)　　(m20145401)

0.359 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,2,1)$，点 $B(-1,1,2)$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と OB のなす角 θ を求めよ．

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(鹿児島大 2014)　　(m20145409)

0.360 xyz 直交座標系の原点を O とする．この空間内に 2 点 $A(1,2,0)$，点 $P(a,b,0)$ がある．以下の問いに答えなさい． ただし，点 P は 2 点 O，A を通る直線上にはないものとする．

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ のなす角度を θ としたとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 2 点 A，P を通る直線の方程式を求めなさい．

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP}$ の外積を求めなさい．

(4) 三角形 OAP の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145413)

0.361 曲線 $y=\sin^{-1}x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $y=\dfrac{\pi}{2}x$ について，以下の問いに答えなさい． ただし，$\sin^{-1}$ はアークサインとする．

(1) 上の曲線と直線が囲む領域を図示しなさい．

(2) 曲線と直線の囲む領域の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2014)　　(m20145415)

0.362 直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,0,1)$ および点 $B(-2,2,0$ がある．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle OAB$ において $\angle AOB$ を求めよ．また，$\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(2) 点 A，点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ

(3) 原点 O を中心とする半径 R の球面：$x^2+y^2+z^2=R^2$ が直線 ℓ と点 Q で接するとき，半径 R ならびに点 Q の座標を求めよ．

(鹿児島大 2015)　　(m20155404)

0.363 直交座標系で $\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{OQ}=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ とする． ただし，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は互いに平行ではない． $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ はいずれも零ベクトルではない．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155408)

0.364 曲線 $y^2 = -x$ と $\dfrac{y^2}{2} = -x - a$ とについて，以下の問いに答えなさい．ただし，$a > 0$ であり，かつ，a は実数であるとする．

(1) 手書きでグラフを描きなさい．

(2) 2 本の曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2015)　　(m20155411)

0.365 O を原点とする直交座標系の 2 点 $P,\ Q$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ a \end{bmatrix}$，$\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$ とする．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が直交するような a を求めなさい．

(2) 前問で求めた a の値を用いて，$\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい．

(鹿児島大 2016)　　(m20165408)

0.366 曲線 $y = |x^2 - 2|$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 手書きでグラフを描きなさい．

(2) 曲線と直線 $y = 3$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2016)　　(m20165410)

0.367 曲線 $x = y^2 + 1$ と直線 $x = -y + 3$ とについて以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線と直線のグラフを描きなさい．

(2) 曲線と直線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2017)　　(m20175411)

0.368 曲線 $y = \sin^2 x$ について以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で描きなさい．

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において，曲線と直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2018)　　(m20185411)

0.369 3 次元の直交座標系 $O - xyz$ において，点 $A(1, 2, -1)$，点 $B(2, 1, 1)$，点 $C(-1, 4, 5)$ がある．ただし，点 O は xyz 座標系の原点 $(0, 0, 0)$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を点 D とする．点 $A,\ D$ を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) 線分 $OA,\ OB,\ OC$ とこれらに平行な辺で囲まれる平行六面体の体積 V を求めよ．

(鹿児島大 2018)　　(m20185423)

0.370 O を原点とする直交座標系の 2 点 $P,\ Q$ の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 45° のときの　a の値を求めなさい．

(2) $a=2$ のときの $\triangle OPQ$ の面積 S を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185427)

0.371 曲線 $y = \sin x \cos x$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線のグラフを $0 \leq x \leq \pi$ の範囲でかきなさい.

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲において，曲線と直線 $y = \dfrac{1}{4}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2018) (m20185429)

0.372 点 $O(0,0,0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O{-}xyz$ において，点 $A(0,1,0)$，点 $B(1,0,2)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 点 A と点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

(2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ.

(3) 点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の長さ d を求めよ.

(鹿児島大 2021) (m20215404)

0.373 曲線 $y = \left| -x^2 + 2x + 3 \right|$ と直線 $y = 4$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 曲線と直線を 1 つのグラフに描きなさい.

(2) 曲線と直線で囲まれる部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2021) (m20215411)

0.374 直交座標系 $O - xyz$ において，点 $A(1,1,-1)$，点 $B(2,-2,1)$ および点 $C(-1,4,-3)$ がある．以下の問いに答えよ.

(1) 線分 AB と線分 AC を隣り合う 2 辺にもつ平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2) 点 A，点 B，点 C を通る平面の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2022) (m20225404)

0.375 座標平面上の点 $P(a,a)$，点 $Q(1,1)$，点 $R(3,2)$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ とベクトル $\overrightarrow{PR}$ が直交するときの a の値を求めなさい．ただし，$\overrightarrow{PQ}$ は零ベクトルではないものとする.

(2) $a = -1$ とするときの三角形 PQR の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225408)

0.376 c を正の実数とする． xy 平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{1}{c}x^2$ と $y^2 = cx$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの曲線を 1 つのグラフに描きなさい.

(2) 2 つの曲線で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2022) (m20225410)

0.377 直交座標系の任意の点 $P(x,y,z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える.

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x,y,z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ $(|\boldsymbol{n}|=1)$ を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\,dV = \iiint \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016) (m20165508)

0.378 (1) 次の関数のグラフを描け.

$$y=\frac{x^2-4}{|x-2|}$$

(2) 次の関数のグラフを描け.

$$y=x^2-|x^2-4|$$

(3) 縦の長さ x, 横の長さ y の長方形がある. 対角線の長さ l を一定として面積 S が最大になるようにするには x と y をどのようにすればよいかを説明せよ. また, そのときの面積はどうなるか, l を用いて表せ.

(香川大 2009) (m20095701)

0.379 $y=x^2$, $y=2x+8$ で囲まれる閉領域のうち, $x \geqq 2$ の領域の面積を求めよ.

(香川大 2019) (m20195703)

0.380 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの第 1 成分の大きさが 1 となるように定めよ.

(2) 設問 (1) で求めた固有ベクトルと, それらを行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換したベクトルを, 直交座標系 $O-xy$ 上に原点 O を始点として描け.

(3) ある四辺形を行列 $\boldsymbol{A}$ によって 1 次変換した像が, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1.-1)$ を頂点とする正方形になった. 変換前の四辺形のすべての頂点を求め, その四辺形を直交座標系 $O-xy$ 上に描け.

(4) 設問 (3) で求めた四辺形の面積を求めよ.

(島根大 2005) (m20055809)

0.381 次の問いに答えよ. a,b,c はすべて正の数とする.

(1) 3 次元空間において頂点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ をもつ三角形の面積 S を求めよ.

(2) 3 次元空間において頂点 $O(0,0,0)$, P, Q, R をもつ四面体の体積を V とする. (1) で求めた S と V との比 S/V を考える. a,b,c が $abc=1$ をみたしながら変化するときの S/V の最小値を求めよ.

(島根大 2008) (m20085803)

0.382 関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) $y=f(x)$ のグラフを xy 平面上に描け.

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる面積を求めよ. ただし, $x=\tan t$ なる変数変換を用いて, 積分計算の過程も示せ.

(3) x^4 までの項で表した $f(x)$ のマクローリン展開式は $f(x)\cong 1-x^2+x^4$ であることを導け.

(4) 設問 (3) の結果を利用して，次の近似式を導け．

$$\tan^{-1} x \cong x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \quad (\text{ただし，} |x| < 1)$$

(島根大 2008)　　(m20085809)

0.383 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ，$\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ がある．以下の設問に答えよ．ただし．互いに直交する x 軸，y 軸，z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ とする．

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b} - m\boldsymbol{a}$ が垂直となる m の値を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ への射影を求めよ．

(4) 外積 $\boldsymbol{a} \times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ の正弦，すなわち $\sin\theta$ を求めよ．

(6) ベクトル $\boldsymbol{c}$，ベクトル $\boldsymbol{d}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を S とすると，

$$S^2 = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})^2$$

となることを示せ．次に，ベクトル $\boldsymbol{a}$，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085810)

0.384 (1) 関数 $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ について，$f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ．また，3 以上の整数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $y = x^x$ $(x > 0)$ の極値を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x\, dx$ の値を求めよ．

(4) 曲線 $y = x\cos x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(島根大 2009)　　(m20095802)

0.385 平面座標系 $(o - xy)$ において，曲線 C を $y = x^2 - 4x + 3$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1 > x_2)$ を求めよ．

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を描き，頂点及び x 軸との交点を図示せよ．

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.386 xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.387 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y=x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である．残りの 2 つの点を $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ とするとき，点 $A(x_1,y_1)$ および点 $B(x_2,y_2)$ の座標を求めよ．ただし．$x_1<x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある．この 2 本の接線を ℓ_1, ℓ_2 とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3,y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4,y_4)$ とする．ただし，$x_3<x_4$ とする．このとき，接線 ℓ_1, ℓ_2 の方程式および接点 $Q(x_3,y_3)$, $R(x_4,y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5,y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195801)

0.388 デカルト座標系 (x,y) で，$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ と表現される曲線について以下の問に答えよ．

(1) 極座標系 (r,θ) での関係式に変換せよ $(r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta=y/x)$.

(2) グラフの概形を図示せよ．

(3) 曲線が囲む図形の面積（複数の図形がある場合はすべての合計）を求めよ．

(首都大 2004)　　(m20045905)

0.389 3 次元空間内に原点 $O(0,0,0)$ および

3 点 $A(0,\ 2+2\sqrt{3},\ 0)$,　$B(2-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$,　$C(2+2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ がある．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ．

(2) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(3) 四面体 $OABC$ において，三角形 ABC を底面としたときの高さを求めよ．

(東京都立大 2021)　　(m20215902)

0.390 関数 $f(x)=e^{-x}\sin\pi x (x \geqq 0)$ があるとき，以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を原点に近い方から $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ とするとき，1 番目の面積 S_1 を求めよ．

(3) n 番目の面積 S_n を求めよ．

(4) $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ の面積の総和を求めよ．

(宇都宮大 2004)　　(m20046104)

0.391 毎秒 $3cm^2$ の割合で面積が増加している円がある．この円の半径が $6cm$ になった瞬間における半径 r の変化率 dr/dt の値を求めよ．ただし，t は時間を表す．

(宇都宮大 2007)　　(m20076111)

0.392 平面上の，曲線 $y^2=x-1$，および，直線 $y=x-3$，について下の問いに答えよ．

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156103)

0.393 方程式 $(x^2-1)^2+y^2=1$ の表す曲線 C について，下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，円周率は π と表記し，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166103)

0.394 曲線 $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y=x,\ x=1,\ x=4$ で囲まれた図形を A とする．
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196103)

0.395 実数 $a>1$ として下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$，$S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206103)

0.396 半径 r の円に内接する長方形のうち，面積最大のものは正方形であることを証明し，そのときの面積を求めよ．

(工学院大 2003)　　(m20036202)

0.397 (1) 曲線 $y=\cos 2\pi x$ に $x=\dfrac{1}{6}$ で接する直線の傾き（勾配）を求めなさい．(図 2 参照)

(2) x,y 軸と曲線 $y=\cos 2\pi x$，直線 $x=\dfrac{1}{6}$ に囲まれる図形の面積を求めよ．

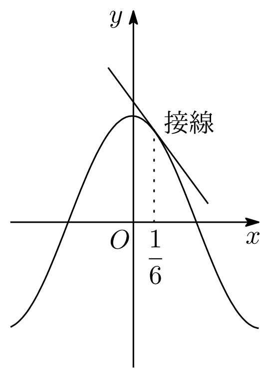
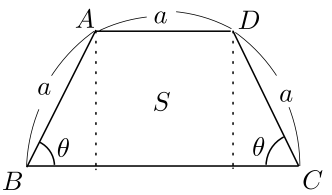


図 2:曲線 $y=\cos 2\pi x$

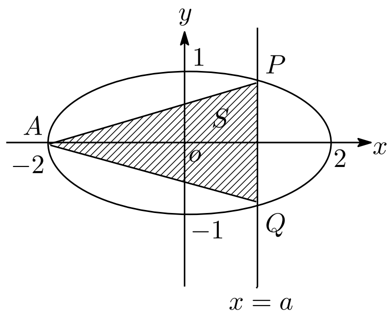
(工学院大 2003)　　(m20036208)

0.398 図のように辺 $AB = AD = DC = a$, $\angle ABC = \angle DCB = \theta$ の等脚台形がある．台形 $ABCD$ の面積 S を a, θ を用いて表せ．さらに面積 S を最大にするような θ の値を求めよ．



(工学院大 2004)　　(m20046211)

0.399 図のように楕円 $\dfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ と y 軸に平行な直線 $x = a$ が 2 点 P, Q で交わるとき，点 $A(-2, 0)$ を頂点とする三角形 APQ の面積 S が最大となるときの面積 S_{max} とそのときの a の値を求めよ．



(工学院大 2005)　　(m20056211)

0.400 曲線 $y = \dfrac{2}{3}x^{3/2}$ $(0 \leq x \leq 1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線と 2 つの直線 $x = 1$, $y = 0$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) この曲線の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2011)　　(m20116304)

0.401 次の曲線および直線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

$$y = \sqrt{x}\,, \qquad x = 4\,, \qquad y = 0$$

(東京海洋大 2012)　　(m20126410)

0.402 直線 $y = e$ と $y = (1 - e)x + 1$ および曲線 $y = e^x$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

(東京海洋大 2014)　　(m20146403)

0.403 (1) 曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ と直線 $x = 2$, $x = 5$, $y = 0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(2) 曲線 $y = \cos x$ の $-\dfrac{3}{4}\pi \leq x \leq \dfrac{3}{4}\pi$ の範囲と，直線 $y = 0$ で囲まれる面積を求めなさい．

(東京海洋大 2015)　　(m20156403)

0.404 次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

$$y = \sqrt{2x}\,, \quad x = 9\,, \quad y = 0$$

(1) この図形の面積を求めなさい．

(2) この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166403)

0.405 円筒形の容器がある．上面と底面に使われている板の単位面積当たりの重量は，側面に使われている板の 2 倍である．次の問いに答えよ．但し，容器の半径を $r(cm)$，高さを $h(cm)$，重量を $W(g)$，容積を $V(cm^3)$，側面に使われている板の単位面積当たりの重量を $m(g/cm^2)$，円周率を π とする．また，板の厚みは無視できるほど薄いとする．

(1) W を r, h, m 及び π を用いて表せ.

(2) V を r, h 及び π を用いて表し，次に，W を r, V, m 及び π を用いて表せ.

(3) V を一定として，最も小さい W でこの容器を作った時の r と h の比を求めよ.

(東京海洋大 2017)　(m20176404)

0.406 次の式で表されるる 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ について次の問いに答えよ．ただし，a は負の定数である.

$$f(x) = x^3 - 5x \qquad g(x) = -x^2 + a$$

(1) $a = -4$ の時，2 曲線のグラフの概形を描け.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を微分せよ，

(3) 2 曲線が接する時の接点の x 座標と a の値を求めよ.

(4) 2 曲線が接する時，接点とは別に存在する交点の x 座標を求めよ.

(5) 2 曲線が接する時，この 2 曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ.

(東京海洋大 2021)　(m20216403)

0.407 円筒形の容器がある．上面と底面に使われている板材の単位面積当たりの重量は，側面に使われている板の 3 倍である．次の問いに答えよ．ただし，容器の半径を r(cm)，高さを h(cm)，重量を W(g)，容積を V(cm^3)，側面に使われている板の単位面積当たりの重量を w(g/cm^2)，円周率を π とする．また，板の厚みは無視できるほど薄い.

(1) W を r, h, w および π を用いて表せ.

(2) V を r, h, π を用いて表せ.

(3) V を一定として，最も小さい W でこの容器を作った時の r と h の比を求めよ.

(東京海洋大 2021)　(m20216404)

0.408 直線 $y = e$ と $y = x + 1$ および曲線 $y = e^{-x}$ で囲まれた部分の面積を求めなさい.

(東京海洋大 2022)　(m20226408)

0.409 正方形 $ABCD$ を底面とした四角錐 O-$ABCD$ において，$OA = 1$, $AB = 2$, $BC = 2$ とする．また，$OA \perp AB$, $OA \perp AD$ とする．このとき，次の各問いに答えなさい.

(1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と外積の大きさ $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$ を求めなさい.

(2) 線分 OD を 2 : 3 に内分する点を E，線分 OC の中点を F とする．また，3 点 A, E, F を含む平面と辺 OB またはその延長と交わる点を G とする．このとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表しなさい.

(3) 三角形 AEF の面積を求めなさい.

(和歌山大 2015)　(m20156501)

0.410 (1) $y = x^x \quad (x > 0)$ のとき，導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) 曲線 $y = 2x - \dfrac{x^2}{2}$ と直線 $y = \dfrac{x}{2} - 2$ で囲まれた領域の面積を求めよ.

(琉球大 2009)　(m20096801)

0.411 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が，条件 $f(0) = -3$, $f(1) = -\dfrac{9}{4}$, $f'(2) = 10$, $f'(3) = 20$ をすべて満たすとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ の値を求めよ.

(2) $y = f(x)$ の極値を求め，そのグラフをかけ.

(3) $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

(富山県立大 2017)　　(m20177103)