[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：長さ

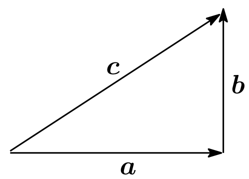
0.1　$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ をベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の内積とし，$||\boldsymbol{a}||$ を $\boldsymbol{a}$ の長さとする．このとき $||\boldsymbol{a}||^2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ であり，また，零ベクトル $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交すれば $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ であった．

(1)　$\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3},2)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1,2)$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．

(2)　$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ とする．$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が直交するとき

$$||\boldsymbol{c}||^2=||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2 \quad \text{（ピタゴラス（三平方）の定理）}$$

を示せ．



(北見工業大 2008)　(m20080204)

0.2　xyz 空間内に 4 点 $A(-3,-3,1)$, $B(2,-8,1)$, $C(-2,-3,-2)$, $D(2,1,4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

(1)　4 点 A, B, C, D を通る球 S の方程式を求めなさい.

(2)　球 S の中心を P とするとき，ベクトル $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい.

(3)　点 C を通り，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ に垂直な平面 α の方程式を求めなさい．また，平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{2}=z-2$$

との交点の座標を求めなさい.

(4)　点 D から平面 α に直線を引き，α との交点を E とするとき，線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい．このとき，線分 DE の長さを求めなさい.

(岩手大 2012)　(m20120301)

0.3　平面 $2x+y+2z=0$ と球面 $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい．ただし，空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には，その証明もしなさい．

(秋田大 2003)　(m20030403)

0.4　次の $\boxed{}$ 内に当てはまる整数を入れよ.

曲線 $y=\dfrac{2}{3}(1+x\sqrt{x}\,)$ の区間 $0\leqq\ x\leqq\ 3$ における，この曲線の弧の長さは $\dfrac{\boxed{}}{3}$ である.

注意：log は自然対数で，e は自然対数の底とする．π は円周率とする.

(秋田大 2007)　(m20070405)

0.5　平面上に 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ があるとする．ただし，これらのベクトルの大きさ（長さ）はいずれも 0 ではなく，互いに平行ではないとする．また，t を実数とする．以下の問いに答えなさい.

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|$ が最小になるときの t の値を，内積を用いて表しなさい.

(2)　(1) で求めた t の値が 0 であるとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の図形的関係を答えなさい.

(秋田大 2017)　(m20170401)

0.6　関数 $f(x)>0$ は閉区間 $[a,b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a,0)$ と動点 $P(x,0)$ をとる．ただし，$a<x\leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な 2 直線と曲線 $y=f(x)$ との交点をそれぞれ B,Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　弧 BQ の長さを求める式を書け.

(2) 曲線 $y=f(x), x$ 軸，直線 AB, 直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け．

(東北大 1994)　　(m19940502)

0.7 滑らかな曲線 $y=f(x)$ 上の第 1 象限にある 1 点 P における法線が x 軸と交わる点を N とし，次の問いに答えよ．

(1) 長さ PN を求めよ．

(2) PN と点 P の y 座標の平方の比が一定値 k であるとき，点 $(0,1/k)$ を通る曲線の方程式を求めよ．

(東北大 1995)　　(m19950502)

0.8 点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|, \quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1,y_1,x_2,y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.9 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える．　球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き，　その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする．　この時, 各ベクトルの成分は
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$,　　$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$,　　$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$,
$\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$　と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　　(m20040503)

0.10 $\mathbb{R}^3$ において x , y の標準内積を (x,y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \;:\; x \mapsto (x\,,\,\phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005)　　(m20050506)

0.11 t, x, y を実数, A を実数の定数とし, 以下の問いに答えよ.

(1) 置換 $t = x + \sqrt{x^2 + A}$ を用い, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\,dx$ を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + A}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0,\ y \geqq 0$. 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ の長さを求めよ.

(東北大 2009)　　(m20090503)

0.12 xy 平面上の点 P の座標 (x, y) が, 実数 t を媒介変数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t)\cos t \\ y(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の増減表を作成し, 曲線 C の概形を図示せよ.

(2) 曲線 C の長さを求めよ.

(3) 曲線 C と直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$ によって囲まれる領域の面積 A を求めよ.

(東北大 2019)　　(m20190501)

0.13 n 次元における半径 r の “球” の “体積” を考えましょう. 3 次元においては半径 r の球の体積は, 原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です. 3 次元以外でも同様に考えてみましょう. 例えば, 1 次元における半径 r の “球” の “体積” は, 原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり, 2 次元における半径 r の “球” の “体積” は, 原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね.

(1) では 4 次元において,「半径 r の “球” の “体積”」を自分で定義して, それを具体的に求めてください. 答えが一意的に決まるとは限りません. 自由に発想して下さい. また, 計算が最後まで終了しなくても, 自分で考えた事・アイディアなど, 自由に述べてください.

(2) さらに一般に, 任意の正整数次元 n でも同様に考えてください.

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980601)

0.14 v_1, v_2, v_3 を 3 次元内積空間 $\mathbb{R}^3$ の長さ 1 のベクトルで，どの 2 つも互いに直交するものとする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトル x は，

$$x = (x, v_1)v_1 + (x, v_2)v_2 + (x, v_3)v_3$$

と表されることを示せ．ただし，$(\quad , \quad)$ は $\mathbb{R}^3$ の内積を意味する．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル a, b を

$$a = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

$$b = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$$

と表すとき，$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを示せ．

（お茶の水女子大 2001）　(m20010606)

0.15 極座標表示で表された曲線 : $r = 1 + \cos\theta \ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ について，以下の各問に答えよ．

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2011)　(m20110606)

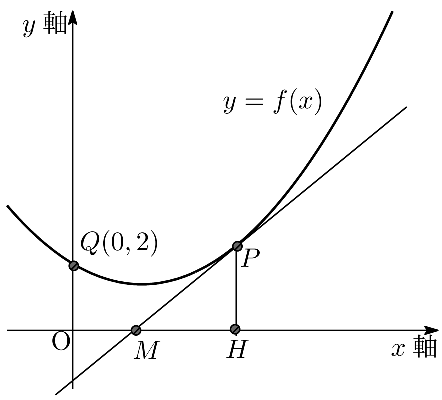
0.16 a を正の定数とするとき，極形式 $r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で囲まれる領域について，以下の各問いに答えよ．

(1) 囲まれる領域の周の長さを求めよ．

(2) 囲まれる領域の面積を求めよ．

(お茶の水女子大 2020)　(m20200611)

0.17 ある曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を点 M，点 P から x 軸に垂直に下した点を点 H とする．線分 MH の長さが一定に値 k となった．点 $Q(0, 2)$ を通るこの曲線の式を求めよ．



(お茶の水女子大 2021)　(m20210602)

0.18 極座標に関する以下の各問に答えよ．

(1) 極座標を用いて $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

(2) 次の広義積分 I について，極座標の考え方を用いることで I^2 を求めよ．また，I を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210607)

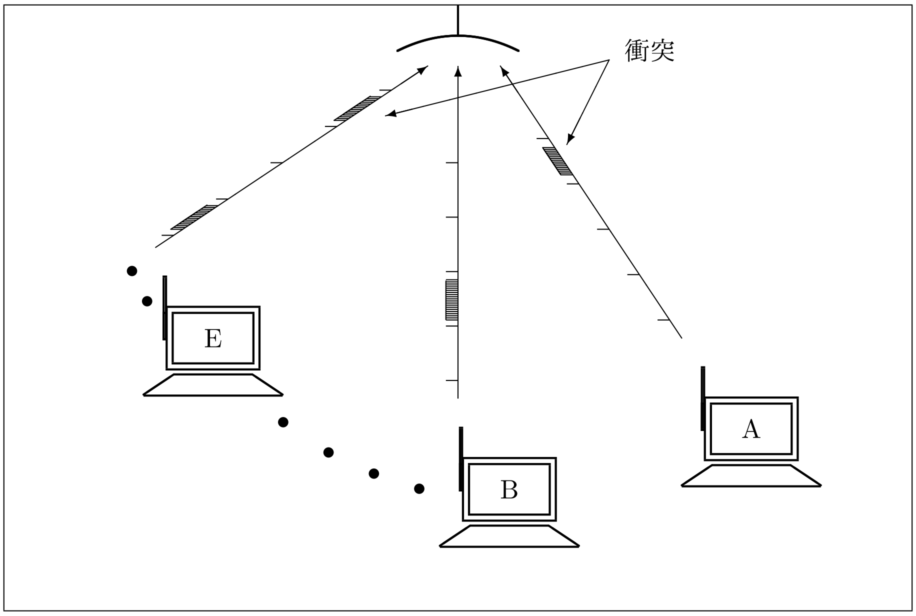
0.19 複数のコンピュータが長さ 1 秒の無線信号を中央のアンテナに送信するネットワークを考える（下図参照）．無線信号の交信は 1 秒ごとに行われ， $T-1$ (秒) から T (秒) の間に生起した無線信号は T (秒) の時点で送信される．また，2 台以上のコンピュータが同時に無線信号送信を行った場合には信号衝突（送信失敗）が起こり，後の時点で再送される．ここで，コンピュータ A 以外のコンピュータから生起された無線信号は，再送信号までも含めて次式の確率で送信されるものとする．このとき，以下の問に答えよ．なお， $P_r[k,n]$ は n 秒の間に k 個の無線信号が生起する確率であり， G は定数である．

$$P_r[k,n] = \frac{(Gn)^k}{k!}\exp(-Gn)$$

(1) コンピュータ A が無線信号を送信した際，信号衝突が起こらない確率を求めよ．

(2) コンピュータ A の信号送信が $j-1$ 回の信号衝突の後で成功する確率，すなわち送信回数が j 回となる確率を求めよ．

(3) 無線信号の送信回数の期待値を求めよ．



(東京大 1997)　　(m19970705)

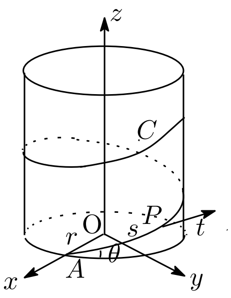
0.20 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ．

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし， $\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする．

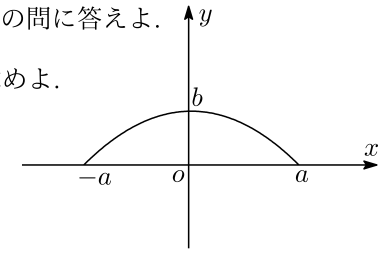
(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ．

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．



(東京大 1998)　　(m19980703)

0.21　図の曲線は点 $(0,b)$ を頂点とする放物線の一部を表している．以下の問に答えよ．



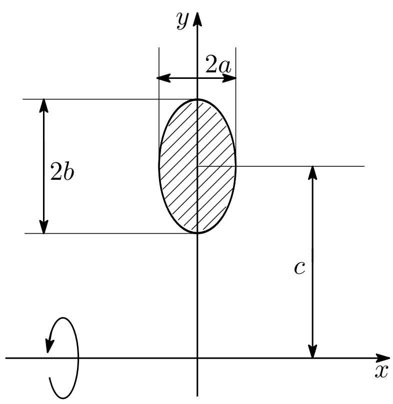
(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ．

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ．

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ．

(東京大 2002)　　(m20020702)

0.22　図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c $(c > a,\ c > b)$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.23　２つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta\,,\ s\sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq s \leq 1)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta\,,\ \sin\theta\,,\ \alpha\theta)\,,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

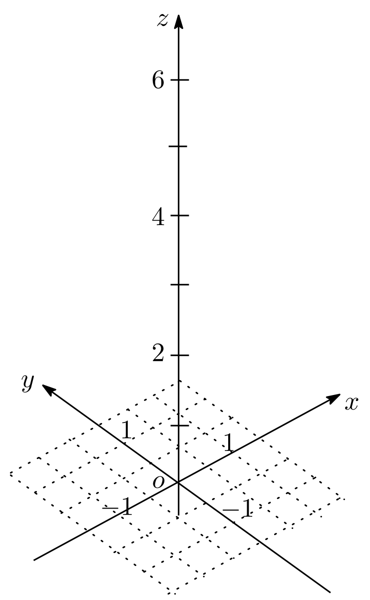
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.24　(1)　閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

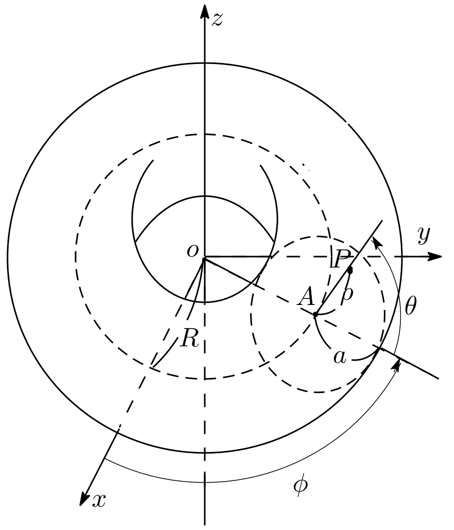
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot dS \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ．　ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，dS はベクトル面積素である．

(2)　下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり，z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる．　このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり，この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$．　トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と，トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする．　点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3)　同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 dS を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ．　この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ．　なお円周率を π とする．

(4)　式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012)　　(m20120703)

0.25　複素変数 $z = x + iy$（x, y は実数）から複素変数 $w = X + iY$（X, Y は実数）への写像 $w = f(z)$ を考える．以下の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $f(z) = z^2$ のとき，z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(2) $f(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき，z 平面上の単位円周 $|z| = 1$ と単位円の内部 $|z| < 1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．

(3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ のとき，z 平面上の領域 $1 \leq |z| \leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ．また，その領域の面積を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140704)

0.26　xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0,0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$　(ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする．　点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

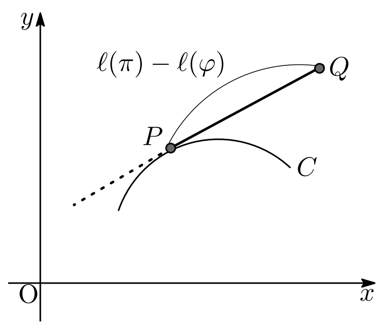
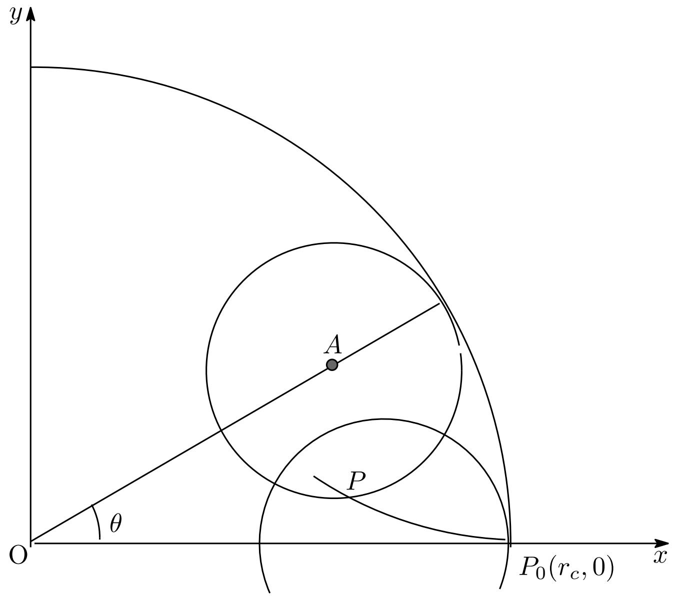


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.27　図のように，原点 O を中心とする半径 r_c の定円に内接しながら半径 r_m の円 A が滑らずに回転する．円 A の円周上の定点 P の軌跡である内サイクロイド曲線 C について考える．なお，$r_c \geqq 2r_m > 0$ とする．



(1) 点 P は，図中の点 $P_0(r_c, 0)$ から移動を開始したとする．このとき，回転後の円 A の中心 A と原点を結ぶ線分 OA の x 軸からの回転角を θ とするとき，r_c, r_m, θ を用いて点 P の座標を表せ．

(2) $ar_m = r_c$ と表すこととする．また，$r_c = 1$ とする．

(a) a が正の整数であるとき，この曲線 C 上の点を x 軸に関して対称に移動させた点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(b) $a = 2, 3, 4$ のときの軌跡の概形を根拠とともに示せ．

(3) $r_c = 3$, $r_m = 1$ のとき，この内サイクロイドに囲まれた部分の面積 S と内サイクロイドの長さ L を求めよ．

(東京大 2017)　　(m20170703)

0.28 点 $P(1, 2, 3)$ から平面 $\pi : x + 2y + 2z = 2$ に下ろした垂線の足を H とするとき，線分 HP の長さを求めなさい．

(東京農工大 2006)　　(m20060901)

0.29 (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を，問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ．

(横浜国立大 1997)　　(m19971102)

0.30 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求め，λ_1, λ_2 に対して，長さが 1 となるように正規化した固有ベクトル ν_1, ν_2 を求めよ．さらに，ν_1, ν_2 を相隣る 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971203)

0.31 以下の設問に答えなさい．

(1) 図 1 のように，太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える．この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．対角線を 1 本追加して，図形を固定し，4 本の辺の

囲む面積を最大にするには，どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい．

ヒント：座標系を利用して，対角線の長さを頂点の座標を変数として表す．

(2) 図２のように，太さの無視できる長さ a の１２本で結ばれる平行六面体を考える．この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている．この物体に対角線を付加して物体を固定したとき１２本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える．このとき，付加すべき対角線のなかで，最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい．ただし，ある面が対角線によって固定されると，その面と平行な面も固定されることを仮定する．

ヒント：(1) の結果を利用する．

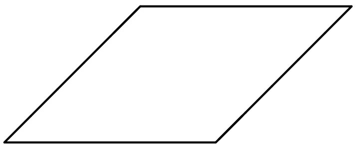


図 1

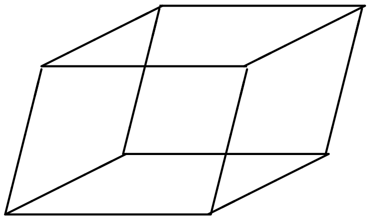


図 2

（千葉大 2000）　(m20001202)

0.32 次の行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ に関する以下の設問に答えなさい．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(1) A^TA を求めなさい．ただし，A^T は A の転置行列である．

(2) A^TA が逆行列を持つことを示しなさい．

(3) $||A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}||^2$ が最小となるような変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と置いたとき，p, q の値を求めなさい．ただし，$||\boldsymbol{a}||$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表す．

(千葉大 2011)　(m20111202)

0.33 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を全て求めなさい．

(2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ)1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ求めなさい．

(3) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ としたとき．$PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって，P が直交行列であることを確認しなさい．ただし，I は単位行列とする．

(4) $P^{-1}AP$ を計算して，行列 A を対角化しなさい．

(千葉大 2012)　(m20121202)

0.34 三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O - XYZ$ 座標系が定義されている．

$y = 0$ 平面（$z - x$ 平面）上の点 $A = (x_0, 0, z_0)$ を始点とし，一定方向で $y = 0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$, $0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ から，

$$B = (\lambda\cos\theta\cos\varphi + x_0 \ , \ \lambda\cos\theta\sin\varphi \ , \ \lambda\sin\theta + z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$, $a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.35 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （ただし，a, $b>0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a,0)$，点 B の座標は $(0,b)$ であり，点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい．

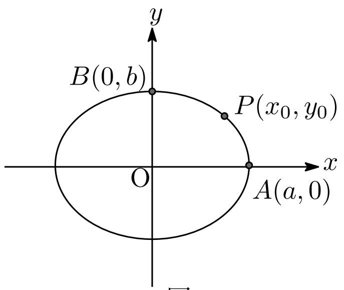
(1) 点 P で楕円に接する接線の方程式を x, y, a, b, x_0, y_0 を用いて表しなさい．

(2) $x_0=a\cos\theta$, $y_0=b\sin\theta$ （ただし，$0<\theta<\pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を x, y, a, b, θ を用いて表しなさい．

(3) 設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを a, b, θ を用いて表しなさい．

(4) 線分 CD の長さが最小となる θ の値を a, b を用いて表しなさい．

(5) 線分 CD の最小値を a, b を用いて表しなさい．



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)

0.36 (1) 原点に中心をもつ楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の，長軸および短軸の長さをそれぞれ求めよ．また，この楕円の概形を，主軸の方向がわかるように描け．

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=1$ の長軸を x 軸に一致させる回転（ただし，回転角は $-\dfrac{\pi}{2}$ より大きく $\dfrac{\pi}{2}$ より小さいとする）による変換 g と，y 軸方向の拡大による変換 f を合成した変換 $f\circ g$ により，元の楕円は円に変換される．行列 A を用いて $f\circ g$ ： $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すとき, A 及びその逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3) 次の積分を求めよ． $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2-xy+y^2)}dxdy \quad \{(x,y)\mid -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$

(筑波大 2007)　　(m20071312)

0.37 球面 $C: x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ．

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ．

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ．

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071332)

0.38 行列 A について以下の設問に答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 を求めよ. ただし, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする.

(2) 前問で得た固有値 λ_1 , λ_2 , λ_3 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ とする. $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルの長さが 1 となるように選ぶものとする.

(3) A を対角化する行列 L とその逆行列 L^{-1} を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101309)

0.39 実ベクトル空間 W のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする.

(A) $||\boldsymbol{v}_1|| = \cdots = ||\boldsymbol{v}_1|| = 1$

(B) 相異なる $j, k \in \{1, \cdots, n\}$ に対して $\langle \boldsymbol{v}_j,\ \boldsymbol{v}_k \rangle = 0$

ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は W の内積, $||\quad||$ はこの内積で定まる長さを表す. また, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする. 以下の (1)-(4) を証明しなさい.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が実数 $x_1,\ \cdots x_n$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j$$

と表されるとき, 次の等式が成り立つ.

$$||\,\boldsymbol{x}\,||^2 = \sum_{j=1}^{n} {x_j}^2$$

(3) V は W の部分空間である.

(4) $V \neq W$ であれば, $\boldsymbol{w} \notin V$ かつ $\boldsymbol{w} \in W$ を満たす任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{w}$ は 1 次独立である.

(筑波大 2017)　　(m20171313)

0.40 ラグランジュの未定乗数法を用いて, 楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい. ただし, 直方体の各辺は, いずれも x 軸, y 軸, z 軸のどれかに平行であるものとする.

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x, y, z)（ただし, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ ）としたとき, 3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と, 楕円体に内接する直方体の体積 $V(x, y, z)$ を変数 x, y, z を用いてそれぞれの数式として表せ.

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件件を満たす特異点がないことを示せ.

(3) 体積 $V(x, y, z)$ を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めるための, 具体的なラグランジュ関数 $F(x, y, z)$ を示せ. ただし, 未定乗数を λ とせよ.

(4) (3) で定数化した数式を用いて, 楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めよ. ただし, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ とする.

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.41 未知数 a, b を含む次の行列 A に関して設問 (1)-(3) に答えなさい.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A による一次変換で直線 $2x+3y=1$ が直線 $x+4y=3$ に写るとき，a,b の値を求めなさい.

(2) (1) の条件を満たす行列 A のすべての固有値と，各固有値に対応する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つ求めなさい.

(3) (1) の条件を満たす行列 A による一次変換で円 $x^2+y^2=1$ を写した図形の方程式を求めなさい.

(筑波大 2021)　　(m20211308)

0.42　周の長さ l が一定の扇形のうちで，面積が最大になる場合の中心角 x を求めなさい.

（埼玉大 2001）　　(m20011402)

0.43　$\mathbb{R}^n$ のベクトル　$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定義する.

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}||=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する.

次の (1),(2),(3) に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して不等式　$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leq||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ.

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して不等式　$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||\leq||\boldsymbol{x}||+||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ.

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ.

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.44　曲線　$y=\dfrac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$　$(0\leqq x\leqq 1)$　の長さ L を求めなさい.

(埼玉大 2003)　　(m20031403)

0.45　$\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^2\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである.

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.46　(1) 直線 $y=3x+a$ が放物線 $y=x^2+4x+1$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする. このときの定数 a の値を求めよ.

(2) 直線 $y=3x+b$ が円 $x^2+y^2-8y-20=0$ によって切り取られる線分の長さが 5 であるとする. このときの定数 b の値を求めよ.

(群馬大 2008)　　(m20081503)

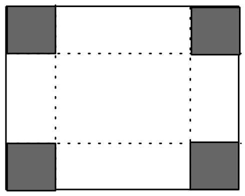
0.47　長方形 $ABCD$（ 辺の長さが $AB=CD=4cm$，$BC=DA=2cm$ ）がある．点 P が頂点 A を出発して秒速 $1cm$ で長方形の辺の上を一周する（ 頂点 B,C,D を通り，A に戻る ）．PA を一辺とする正方形の面積を $y\,cm^2$ とする.

(1) 5 秒後の y はいくつか.

(2) 出発してから x 秒後の y を x の式で表し，図示せよ.

(群馬大 2013)　　(m20131502)

0.48 図に示すように，長方形の用紙の四つの角からそれぞれ 1 辺が x の正方形（図の黒で示した部分）を切り取り，図の点線で折り返して，ふたのない容器を作る．この容器の体積を $f(x)$ とする．長方形の二辺の長さをそれぞれ，11，17 としたとき，以下の各問に答えよ.



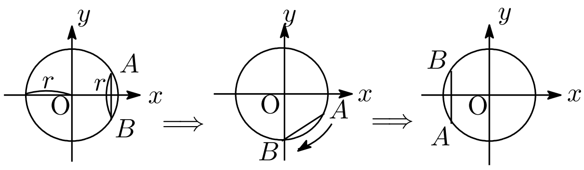
(1) 切り取る正方形の一辺が $(x+1)$ のときと x のときの，容器の体積の差を表す関数 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ を求めよ.

(2) x が整数値を取るときの $g(x)$ の符号を調べ，容器の体積が最大になる整数値 x を求めよ.

(3) x が実数値を取るときに，容器の体積が最大になる実数値 x を求めよ.

(群馬大 2014)　　(m20141502)

0.49 原点を中心とする半径 $r(r>0)$ の円の円周に両端が接する長さ r の線分 AB がある．図のように AB がはじめ y 軸と平行に置かれ，線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び y 軸と平行になるまで移動する．このとき次の問に答えよ.



(1) 線分 AB が通る領域を図示し，その面積を求めよ.

(2) (1) の図形を y 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ.

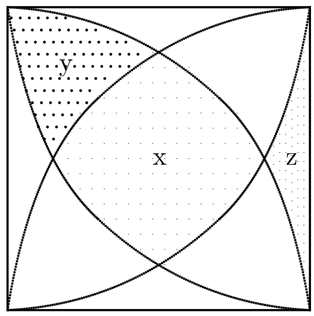
(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

0.50 右下の図形は 1 辺の長さ 1 の正方形の中に，各頂点を中心として半径 1 の円弧を 4 つ描いたものである．図の x, y, z それぞれの領域の面積をやはり x, y, z で表す.

(1) 次の各式の空欄を埋めて，x, y, z の満たす連立方程式を作れ.
ただし，π は円周率である.

$$\begin{cases} \square x+\square y+\square z=1 \\ \square x+\square y+\square z=\dfrac{\pi}{4} \\ x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{\square}}{\square} \end{cases}$$

(2) x を求めよ.



(図書館情報大 1999)　　(m19991601)

0.51 ふつうの計算では加算・減算では同じ種類の量どうしの，また乗算は異なる種類の量どうしの計算であることが多い．例えば,「重さ＋長さ」や「金額×金額」は無意味だが,「長さ＋長さ＝長さ」,「単価×個数＝金額」には意味がある．しかし例外もある.

(1) 同種の量の掛け算で，日常的に使われるものの例をあげよ.

(2) 異なる種類の量の足し算で，日常的に使われ，数値にも十分意味のあるものの例をあげよ．

(図書館情報大 1999)　　(m19991604)

0.52 1辺の長さが6で，2本の対角線の長さが2だけ違うひし形の面積を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001601)

0.53 (1) 辺の長さが a の正方形の四隅を図 (A) のように切り落としてできる正8角形の辺の長さを求めよ．

(2) 同じ正方形の各辺の中点に頂点を持つ正8角形（図 (B)）の面積は，図 (A) の正8角形の面積の何倍か．

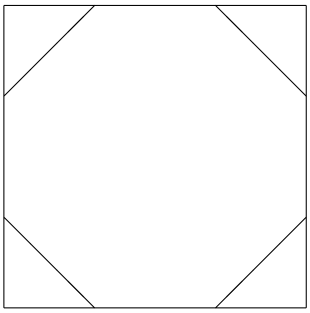


図 (A)

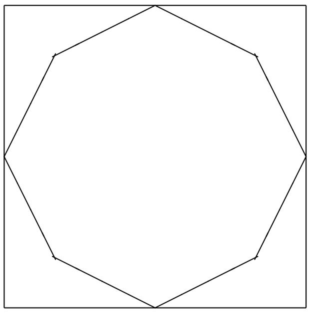


図 (B)

(図書館情報大 2000)　　(m20001602)

0.54 (1) 正確に長方形の形をした土地があり，その縦・横の長さを測ったところ，小数点以下を四捨五入して $517m$ と $483m$ であった．この土地の正確な面積は何 m^2 以上，何 m^2 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ．

(2) 正確に直方体の形をした箱があり，その縦・横・高さの長さをミリ単位で測ったところ，小数点以下を四捨五入して $200mm$, $300mm$, $500mm$ であった．この箱の正確な体積は何 cm^3 以上，何 cm^3 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ（単位の違いに注意）．

(図書館情報大 2000)　　(m20001607)

0.55 平面 π : $2x+3y+4z-12=0$ と点 A:(1,2,3) について，以下の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ を求めよ．

(1) π は x 軸と点 $\boxed{\text{ア}}$，y 軸と点 $\boxed{\text{イ}}$，z 軸と点 $\boxed{\text{ウ}}$ でそれぞれ交わる．

(2) π に垂直で長さが 1 の法線ベクトルは $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3) A と π との距離は $\boxed{\text{オ}}$ である．

(図書館情報大 2002)　　(m20021608)

0.56 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする．以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値 λ をすべて求めよ．

(2) A を直交行列によって対角化せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを 1 とする．${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の値が最大となる $\boldsymbol{x}$ を求めよ．${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(4) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(茨城大 2012)　　(m20121701)

0.57 $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle\, \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle\, \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle\, \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle\, \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ．

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ．

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）．

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ．

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ．

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.58 楕円 C ： $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 $F(\sqrt{3}, 0)$ と C 上の点 $P(x, y)$ を結ぶ線分 FP の長さを r，線分 FP と x 軸の正の方向とのなす角を θ とするとき

$$r = \frac{1}{2 + \sqrt{3}\cos\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 点 F を通る C の任意の弦 PQ に対して，線分 FP, FQ の長さをそれぞれ p, q とするとき，$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ の値は一定であることを示せ．

(3) 点 F において互いに直交する C の二つの弦の長さの逆数の和は一定であることを示せ．

ここで楕円 C の弦とは C 上の異なる 2 点を結ぶ線分のことである．

(新潟大 1998)　　(m19982001)

0.59 すべての辺の長さの総和が 4ℓ の直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，直方体の 2 辺の長さを x, y とするとき，直方体の体積 V を x, y, ℓ を用いて表せ．

(2) V の x に関する偏導関数 V_x および y に関する偏導関数 V_y を求めよ．

(3) 直方体の体積の最大値を求めよ．

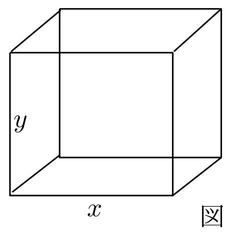


図 1

(新潟大 2006)　　(m20062013)

0.60 極座標表示の曲線 C ： $r = 1 + \cos\theta \quad (-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ について，次の各問に答えよ．

(1) xy 座標で表したとき，x と y の最大値，最小値を求めよ．また，C の概形を描け．

(2) C で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) C の長さを求めよ．

(新潟大 2009)　　(m20092009)

0.61 点 $P_0(a,b,0)$ の位置から，速度 $\boldsymbol{v}_0 = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{k}$ で投げ出された質量 m の質点の軌跡を求めよ．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ は，それぞれ x, y, z 軸上の長さ 1 の基本ベクトルであり，重力加速度は g（$-z$ 方向）とする．

(新潟大 2011)　　(m20112009)

0.62 3 次元ユークリット空間 $\mathbb{R}^3$ において $ax + by + cz + d = 0$ で与えられる平面 H を考える． 平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし，H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする． また，$\boldsymbol{v} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) H の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$（H と直交する長さ 1 のベクトル）を求めよ．

(2) $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle\, \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ は直交することを示せ．また $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle\, \boldsymbol{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ．
ただし，$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を表す．

(3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle|$ で与えられることを説明せよ．

(4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を証明せよ．

(新潟大 2012)　　(m20122015)

0.63 座標平面において，曲線 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で囲まれた図形を F とする． このとき，次の各問いに答えよ．

(1) F の概形をかけ．

(2) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の面積を求めよ．

(3) 媒介変数表示 $x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を用いて，F の周りの長さを求めよ．

(新潟大 2012)　　(m20122016)

0.64 関数 $g(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$ の上の曲線の長さ s を $-\log_e 2 \leq x \leq \log_e 2$ の範囲で求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162002)

0.65 以下の関数で表される曲線がある．区間 $-4 \leqq\ x \leqq\ 4$ における曲線の長さを求めよ．

$$y = 2\left(e^{x/4} + e^{-x/4}\right)$$

(新潟大 2016)　　(m20162009)

0.66 曲線 $y = \cosh x$ の $x = 0$ から $x = 2$ までの弧の長さを求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172006)

0.67 2 次元デカルト座標系において，1 次変換 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を考える．この変換をベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)^T$ に作用させ， 変換後に得られるベクトル $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の方向が変換前のベクトル $\boldsymbol{x}$ の方向と一致し $\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{x}$ のように表せるとき，このベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分を求めよ．ただし，ベクトルの長さは $||\boldsymbol{x}|| = 1$ であるものとする．

(新潟大 2017)　　(m20172007)

0.68 座標平面上の 3 点 $A(-2,\ 0)$, $B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$, $C(2\cos 2\theta,\ 2\sin 2\theta)$ の線分 AC の長さ $\overline{AC}$ と線分 BC の長さ $\overline{BC}$ の和 $\overline{AC}+\overline{BC}$ の最大値を $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で求めよ.

(新潟大 2017)　　(m20172015)

0.69 行列 A について，以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を全て求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対応する，長さが 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を対角化せよ.

(新潟大 2019)　　(m20192004)

0.70 1 辺の長さが a の立方体が 1 つの面を水平に置いてある．この立方体を含む直立した直円すいのうちで，その体積が最小なものの底面の半径，高さおよび体積を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912103)

0.71 球 ： $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に接する平面のうちで，点 $A(0,0,3)$ を通るものについて次の問に答えよ．

(1) このような平面で y 軸と平行なものの方程式を求めよ．

(2) このような平面のうちで x 軸 , y 軸のいずれとも交わるものを考える．それぞれの交点を P , Q とするとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

(長岡技科大 1992)　　(m19922106)

0.72 3 辺の長さが 1 である台形の面積の最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2011)　　(m20112103)

0.73 任意の x,y,z について, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$ となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ $(\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) ${}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ となる直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列である.

(金沢大 2010)　　(m20102201)

0.74 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

$$A\vec{p_i}=\lambda_i\vec{p_i}\ ,\ |\vec{p_i}|=1\ (i=1,2,3)\ , \quad \lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$$

とする．ここで，$|\vec{p}|$ はベクトル $\vec{p}$ の長さとする．次の問いに答えよ.

(1) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ.

(2) $\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3$ を求めよ.

(3) $\vec{x} = x_1\vec{p}_1 + x_2\vec{p}_2 + x_3\vec{p}_3$ とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |A^n\vec{x}| = \infty$ となるための $x_1,\ x_2,\ x_3$ の条件を述べよ.

(金沢大 2012) (m20122201)

0.75 任意の x, y, z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える. 次の問いに答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ.

(3) B を A の逆行列, n を自然数とするとき, B^n の固有値を $\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)}\ \ (\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく. 数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}\ \ (n = 1, 2, \cdots)$ に対して, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ. 収束する場合はその値を求めよ.

(金沢大 2015) (m20152201)

0.76 $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1 \cdots (*)$ を次の手順で, (x, y) 平面に図示せよ.

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて, $(x\quad y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表すことが出来る. A を求めよ.

(2) A の固有値 $(\lambda_1 < \lambda_2)$, および, 長さ 1 の固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (λ_1に対応), $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ (λ_2に対応) を求めよ. ただし, $a > 0,\ c > 0$ と選ぶ.

(3) 行列 $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とおく. $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ としたとき, (x, y) 平面上の図形は, 反時計回りに q ラジアン回転すると (X, Y) 平面上の図形に移る. q を求めよ. また, 上記の図形を (X, Y) 平面上で図示せよ.

(5) $(*)$ を (x, y) 平面上で図示せよ.

(金沢大 2016) (m20162234)

0.77 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) I を 3 次の単位行列とするとき, A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ.

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ (\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と, それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ を求めよ.

(3) 行列 $A^4 - 10A^2$ を求めよ.

(金沢大 2017) (m20172206)

0.78 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．以下において，I は 3 次の単位行列，O は 3 次の零行列である．

(1) A の特性多項式 $\det(\lambda I - A)$ を求めよ．

(2) A の実数の固有値をすべて求め，各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

(3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす実数 a, b, c を求めよ．

(4) 行列 A^{2018} を計算せよ．

(金沢大 2018)　　(m20182206)

0.79 ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x^2, y^2, 1)$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{A}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めなさい．

(2) 図 3 に示した一辺の長さが 1 の立方体の表面を S とする．閉曲面 S における面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{n}$ は S 上の単位法線ベクトルである．

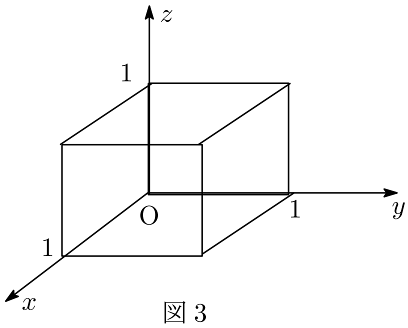


図 3

(金沢大 2022)　　(m20222213)

0.80 直角三角形の各辺の長さをそれぞれ a, b, c (c は斜辺) として，次の問に答えよ．

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明せよ．

(2) $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) を 2 つ示せ．

(3) 正の整数 n に対して，$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ であることを証明せよ．

(4) (3) で示した結果を用いて，$a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) が無限個存在することを証明せよ．

(富山大 2000)　　(m20002301)

0.81 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a, b$ は正の定数）によって描かれる $x - y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.82 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで，長さが 1，第 1 成分が正のものを求めよ．

(3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ．

(4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき，$\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012306)

0.83 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$，$B(2,2,1)$，$C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042306)

0.84 3 次元空間 $O-xyz$ に相異なる点 A, A' を通る直線と相異なる点 B, B' を通る直線がある．2 つの直線はねじれの位置にあるものとし, その間の距離 l を考える．2 つの直線の距離とはそれぞれの直線上の 2 点間の距離の最短距離であって, 最短距離となる 2 点は互いに他方の直線への垂線の足（交点）となっている．ここで, $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$，$\vec{b} = \overrightarrow{BB'}$，$\vec{r} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{s} = \overrightarrow{OB}$ として以下の問いに順次答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ をベクトルの外積（ベクトル積）を用いて書け．

(2) 原点を通りベクトル $\vec{n}$ に平行な直線への点 A, B からの垂線の足を P, Q とする．長さ $\overline{OP}$，$\overline{OQ}$ をベクトルの内積（スカラー積）を用いて書け．

(3) 点 P と Q の距離が, 求めるべきねじれの位置にある 2 つの直線の距離 l であることをふまえ, l を $\vec{r}$，$\vec{s}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) 点 $A(1,-1,-1)$，$A'(-1,1,0)$ を通る直線と点 $B(2,1,1)$，$B'(1,-1,3)$ を通る直線の距離を (3) の結果を用いて求めよ．

(富山大 2006)　　(m20062304)

0.85 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in R$$

が

$$ {}^tAA = E_3 $$

をみたすとする. このとき，A の各行ベクトルは長さが 1 で互いに直交することを示せ．ただし，${}^tA$ は A の転置行列，E_3 は 3 次の単位行列を表す.

(富山大 2011)　　(m20112301)

0.86 懸垂曲線 $y = a\cosh\dfrac{x}{a} \quad (a>0)$ と直線 $y = b \quad (b>a)$ で囲まれた図形を考える.

(1) 直線と懸垂曲線は $x = \pm\ell$ で交差する．逆双曲線関数を用いて，定数 a と b で ℓ を表せ.

(2) 曲線の長さは曲線の線素 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ を積分することによって与えられる．この図形の周囲の長さを a と b を用いて表せ.

双曲線関数 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ， $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ，逆双曲線関数 $\cosh^{-1} x = \pm \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $(x > 1)$ ， $\sinh^{-1} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ を用いても良い.

(富山大 2012)　　(m20122305)

0.87 (1) 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の接線の集合が表す微分方程式を求めよ.

(2) 線形微分方程式 $y' + y = 2 + 2x$ の一般解を求めよ.

(3) 法線影の長さが一定の長さ $a(> 0)$ に等しい曲線群のうち， 原点 $O(0, 0)$ を通る第一象限の曲線を求めよ．ここで法線影とは，曲線上の一点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を H，P における法線が x 軸と交わる点を N としたときの有向線分 HN の長さをいう.

(富山大 2012)　　(m20122306)

0.88 半径 $a(a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ.

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ.

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される.

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として

円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.89 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の長さおよび $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めなさい.

(福井大 2001)　　(m20012413)

0.90 点 (x_1, y_1) から，直線 $ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の長さは

$\dfrac{|\ ax_1 + by_1 + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で表されることを証明せよ.

(福井大 2003)　　(m20032401)

0.91 次の曲線の長さを求めよ.

$$x = e^{-t}\cos t\ , \quad y = e^{-t}\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

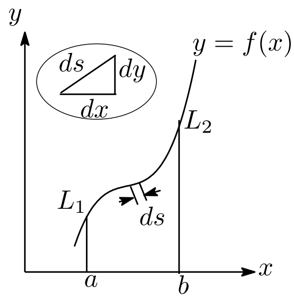
(福井大 2005)　　(m20052404)

0.92 次の各問にしたがって，半径 R の円の円周の長さを求めよ.

(1) 右の図のように，関数 $f(x)$ の L_1 から L_2 の長さは $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds$ で求めることができる．

$$\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

となることを導け．



(2) 点 (x, y) と x 軸との間の角度を θ とすると，x および y を θ の関数で表せ．また，dy/dx を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{L_1}^{L_2} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ の積分の式を用いて，半径 R の円の円周の長さが $2\pi R$ となることを示せ．ただし，計算の途中過程も必ず示すこと．

(福井大 2011)　　(m20112404)

0.93 座標変換によって，曲線 $x^2+xy+y^2=1$ を $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ の形（標準系）に書き換えたい．ここでは，この変換を次の手順によって行う．以下の問いに答えよ，途中経過がわかるように記述しないと減点する．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) ２つの固有ベクトルを正規化した列ベクトル（単位長さとした列ベクトル）を $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とする．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を書け．（どちらが $\boldsymbol{p}$ でもよい）

(3) これらの列ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ を使って，行列 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p} & \boldsymbol{q}\end{pmatrix}$ を表せ．

(例：列ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$ という行列を表せる．)

(4) 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ によって対角化せよ．ここで，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の逆行列である．

(5) $\boldsymbol{x}$ を$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}$ で座標変換する．ここで，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ である．さて，このとき，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}^T\left(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{X}$ となることを示せ．ここで，$\boldsymbol{x}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置で，$\boldsymbol{P}^T$ は $\boldsymbol{P}$ の転置行列である．

(6) 問題 (4) と (5) の答を使って，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x^2+xy+y^2=1$ を $\alpha X^2+\beta Y^2=1$ の形に変換せよ．ここで，α と β は上記の座標変換の結果から決まる数値（スカラー）である．

(福井大 2011)　　(m20112407)

0.94 単振子の周期 T は，振子の長さを ℓ，重力の加速度を g とすれば，$T=2\pi\sqrt{\ell/g}$ で与えられる．ℓ，g が微小量 $\triangle\ell$，$\triangle g$ だけ変化するときの T の変化量を $\triangle T$ とするとき，$\triangle T$ が近似的に以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{\triangle T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle\ell}{\ell}-\frac{\triangle g}{g}\right)$$

(福井大 2015)　　(m20152405)

0.95 次の式を行列の一次変換によって簡単な式に変換したい．以下の問に答えよ．

$$2x^2+6xy+2y^2=1 \quad \cdots\cdots ①$$

行列 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 3 \\ s & a_{22} \end{bmatrix}$ を用いると，式 ① を次式のように表現できる．

ここで，a_{11}，a_{22}，S は定数である．

$$1 = 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 行列 A の固有値 λ_1 と λ_2 及びそれらに対応する単位長さの固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$（いずれも列ベクトル）を求めよ．ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とする．

(3) 列ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ からなる行列 $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}$ とおく．$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ によって式 ① を X と Y の方程式に変換せよ．

(福井大 2015)　　(m20152409)

0.96 次式に与えられる行列 A について，以下の問いに答えよ．(4) 以外については計算の課程も示すこと．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を λ として，固有方程式を“ $(1-\lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の形に表せ．

(2) A の固有値を全て求めよ．固有方程式“ $(1-\lambda)$ の多項式 $= 0$ ”の左辺をどのように因数分解したのかがわかるように解答すること．

(3) A の固有値を λ_1, λ_2, λ_3, $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ とする．固有値 λ_n に対応する正規化（規格化）された固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ を以下の形で求めよ．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

(4) 以下の空欄を生めよ．ただし，(あ) と (い) には数値，(う) と (お) には語句，(え) には行列が入る．なお，$\boldsymbol{u}_n \cdot \boldsymbol{u}_m$ は $\boldsymbol{u}_n$ と $\boldsymbol{u}_m$ の内積，${}^tP$ は P の転置行列を表す．3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{u}_n$ の長さは全て $\boxed{\text{(あ)}}$ であり，さらに $\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1 = \boxed{\text{(い)}}$ である．従って，行列 $P = (\boldsymbol{u}_1\,\boldsymbol{u}_2\,\boldsymbol{u}_3)$ は $\boxed{\text{(う)}}$ 行列である．よって，${}^tP$ と $\boxed{\text{(え)}}$ の積は単位行列となる．なお，P が $\boxed{\text{(う)}}$ 行列であるのは A が $\boxed{\text{(お)}}$ 行列であることの必然的な結果である．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}A^2P$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162419)

0.97 x, y, z を実数とする．以下のベクトルがそれぞれ直交するときの x, y, z を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$$

(福井大 2018)　　(m20182405)

0.98 縦，横，高さがそれぞれ x, y, z である直方体を考える．この直方体の全ての辺（12 辺）の長さの和を L，表面積を S とする．L の値を一定に保ちながら x, y, z の値を変化させると，x, y, z がある値のとき S は最大値をとる．このことがわかっているものとして， 以下の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 表面積 S を x, y, L のみを用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ を求めよ．

(3) 上の (2) の結果を利用して，S が最大となるときの x, y, z の値，および S の最大値を，L を用いて表せ．

(福井大 2018)　　(m20182420)

0.99 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし，直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく．このとき，z を x, y, C を用いて表せ．ただし，$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x, y)$ とする．$f(x, y)$ を x, y, C を用いて表せ．

(3) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

である．

(4) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> <u>定理</u>
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x, y)$ について，
>
> $$g_x(a, b) = 0, \qquad g_y(a, b) = 0$$
>
> のとき，
>
> $$D = \{g_{xy}(a, b)\}^2 - g_{xx}(a, b) g_{yy}(a, b)$$
>
> とおくと，$g(x, y)$ は $x = a$, $y = b$ において，$D < 0$ かつ $g_{xx}(a, b) > 0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x, y)$ は (4) で求めた x, y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.100 以下のベクトルがそれぞれ直交するときの実数 x を求めよ．また，そのときのベクトルを長さ 1 の単位ベクトルとして示せ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$$

(福井大 2021)　　(m20212408)

0.101 非負の実数 θ[rad] を媒介変数とする曲線

$$\begin{cases} x = \theta \cos\theta \\ y = \theta \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

は「アルキメデスのらせん」と呼ばれ，その概形は図 1 に示す「蚊取り線香」に近い，図 2 のような渦巻状の曲線となる．

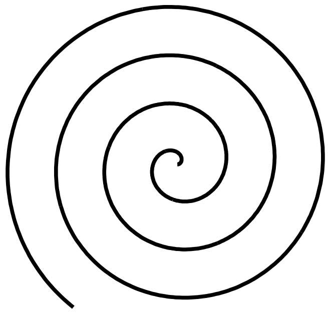


図１：蚊取り線香

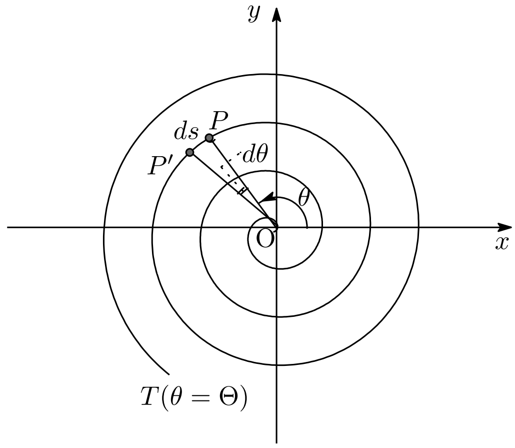


図２：「アルキメデスのらせん」

図２に示すように，曲線上の点 P に対して θ を微小角度 $d\theta$ だけ増加させ，点 P が P' に移動したとする．このときの $P-P'$ 間の微小な長さを ds と表すと，$\dfrac{ds}{d\theta}$ は，

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \tag{2}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 式 (1) の x, y に対し，$\dfrac{dx}{d\theta}$, $\dfrac{dy}{d\theta}$ を各々求めよ．

(2) 式 (2) を利用して，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を θ によって表せ，$\dfrac{ds}{d\theta}$ ではなく $\dfrac{d\theta}{ds}$ を求めることに注意.

(3) (2) で求めた θ の関数 $\dfrac{d\theta}{ds}$ について，グラフの概形を描きたい．$\dfrac{d\theta}{ds}$ の θ に関する 1 階導関数を用いて増減を調べ，$\dfrac{d\theta}{ds}$ を縦軸に，θ を横軸に取ったグラフの概形を示せ.

(4) 図 2 に示すように，「らせん」の内側の端点は原点 O に一致し，外側の端点 T に対する θ を $\theta=\Theta$ とおく．このとき，O から T までの曲線の長さ L を Θ によって表せ．【ヒント】L の計算過程で現れる定積分には複数の計算方法が知られており，そのひとつに $\theta=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ と置換する方法がある $\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right.$ は双曲正弦関数 $\sinh t$ であるので，双曲線関数を用いてもよい$\left.\right)$.

(福井大 2021)　　(m20212419)

0.102 半径 a の球面の xyz 座標を媒介変数 $(\theta,\ \phi)$ で

$$\boldsymbol{r}=(x,y,z)=(a\sin\theta\cos\phi,\ a\sin\theta\sin\phi,\ a\cos\theta)$$

と表す．ただし，$0\le\theta\le\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$ である．以下の問いに答えよ．

(1) 以下のベクトル積

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}$$

を求めよ．また，これは何を表すか答えよ.

(2) 次の積分を求め，何を表すか答えよ．

$$\iint_D\left\|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi}\right\|d\theta d\phi$$

ただし，$\|\cdot\|$ はベクトルの長さを表し，領域 D は θ, ϕ の動く範囲，すなわち $D=\{(\theta,\ \phi\mid 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le 2\pi)\}$ である．

(3) 球面の x 座標 $x = a\sin\theta\cos\phi$ に対して，次の積分を求めよ．

$$\iint_D x \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \right\| d\theta d\phi$$

(福井大 2022)　　(m20222427)

0.103 (x, y) 平面上の任意の点 A における法線へ原点から下ろした垂線の長さが，点 A の y 座標に等しい曲線は $x^2 + y^2 = cx$ (c は定数) となることを示せ．

(静岡大 2006)　　(m20062509)

0.104 空間のベクトル $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, -2)$, $\vec{c} = (-1, 2, -2)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する長さ 1 のベクトルを求めよ．

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(4) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2012)　　(m20122505)

0.105 3 本の直線 $y = x$, $y = 2x$ および $x = 2$ で囲まれた 3 角形の不均質平板がある（長さの単位は [m] とする）．点 (x, y) における面密度が xy [kg/m^2] で与えられる時，この平板の質量 [kg] を求めよ．

(岐阜大 2001)　　(m20012606)

0.106 (1) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 4}$ とするとき，不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

(2) x-y 平面において，$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$,　$(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$（サイクロイド曲線）が描く曲線の長さを求めよ．

(岐阜大 2009)　　(m20092619)

0.107 以下の問に答えよ．

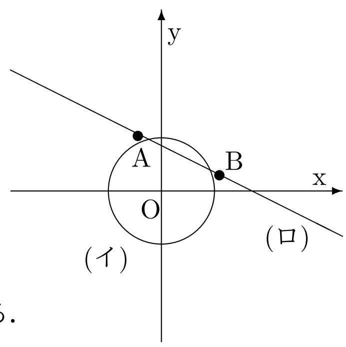
(1) 以下の式で表される円 (イ) と直線 (ロ) は交わっている．図に示すように，円と直線の交点をそれぞれ A , B とする．

$x^2 + y^2 = 5$　$\cdots$　（イ）

$x + 2y = 3$　$\cdots$　（ロ）

(a) 原点 O から直線 (ロ) におろした垂線の長さを求めよ．

(b) 線分 AB の長さを求めよ．



(2) 以下の式で表される球 (ハ) と平面 (ニ) は交わっている．

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$　　$\cdots$　（ハ）

$x + 2y + 3z = 7$　　$\cdots$　（ニ）

(a) 原点 O から平面 (ニ) におろした垂線の長さを求めよ．

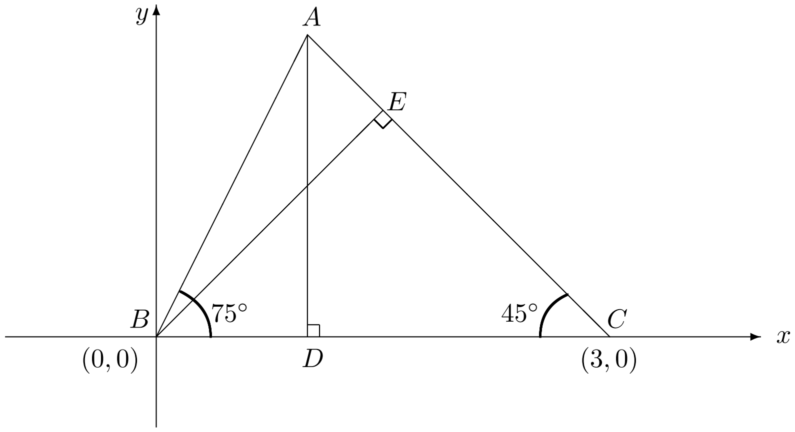
(b) 平面 (ニ) と球 (ハ) が交わってできる円の面積を求めよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982710)

0.108 図に示す三角形 ABC に関して次の各問に答えよ．

(1) $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ を加法定理を用いて求めよ．

(2) 点 C の座標を $(3,0)$ ，点 A ，B より辺 BC , AC に下ろした垂線を AD ，BE とする．このとき，辺 AE ，EC の長さを求めよ．



(3) 三角形 ABC の外接円の中心の座標を求めよ．

(豊橋技科大 1999） (m19992702)

0.109 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

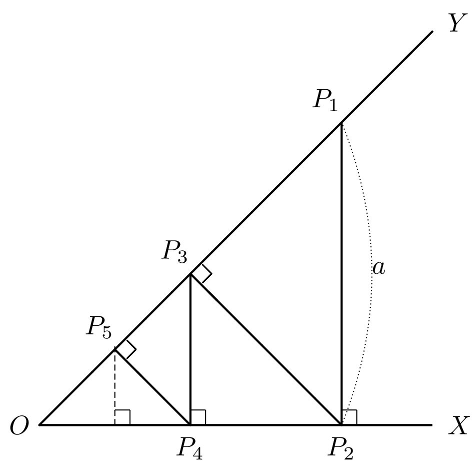
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\sqrt{4}-\sqrt{2}$, $\sqrt{6}-\sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY=\pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



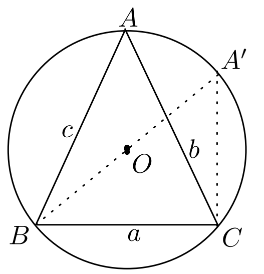
(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999) (m19992704)

0.110 図に示す三角形 ABC の外接円の中心を O，半径を r，各辺の長さを a,b,c，各頂点の内角 $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ の大きさを A,B,C で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 外接円の点 B を通る直径を $BA' = 2r$ とするとき，$\angle BA'C = \angle BAC$, $2\angle BAC = \angle BOC$ であることを示せ.

(2) 三角形 ABC の面積 S は，$S = \dfrac{r^2}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$ と表せる．このことを，外接円の中心 O が三角形 ABC の内部にある場合について示せ.



(豊橋技科大 2000)　　(m20002701)

0.111 (1) 球面 S : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z + 5 = 0$ の中心 P の座標と半径を求めよ.

(2) 直線 : $x = 2y - 2 = -z + 1$ と直交し，点 $(a, 0, 0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ.

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ.

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）.

(豊橋技科大 2007)　　(m20072704)

0.112 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満足するベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさ（長さ）$|\boldsymbol{x}|$ を求めよ.

(3) A の固有値 λ_1 と λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(4) n を正の整数 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，A^n を求めよ.

(豊橋技科大 2013)　　(m20132705)

0.113 次の行列 A, B に関して，以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 A の逆行列を求めよ.

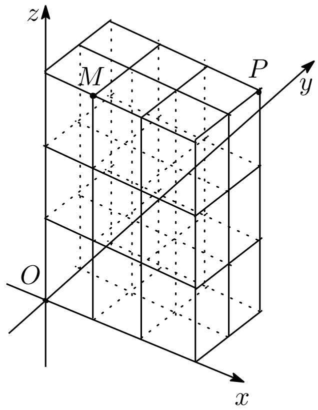
(2) 行列 B の最小固有値およびそれに対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 B^2 の固有値をすべて求めよ.

(4) 行列 B^5 の固有値をすべて求めよ.

(豊橋技科大 2015)　　(m20152702)

0.114 下図のように，空間上に点 $O(0,0,0)$ と点 $P(3,2,3)$，および点 $M(1,0,3)$ がある． ロボット A は点 O から点 P に，ロボット B は点 P から点 O に， それぞれ最短経路（8 ステップ）で移動する． ただし，1 ステップの移動は，x 軸，y 軸，z 軸のいずれか 1 方向に長さ 1 だけの移動とする． 以下の問いに答えよ.



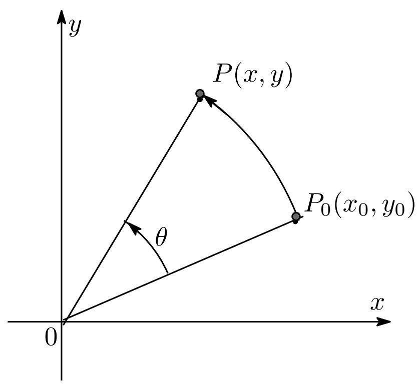
(1) 点 O から点 P に移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(2) 点 O から点 P に，点 M を通って移動する最短経路は何通りあるか答えよ．

(3) ロボット A と B はそれぞれ独立に，すべての可能な最短経路の中から無作為に一つを選択する．選択した経路に沿って，それぞれの出発点からロボット A と B が同時に出発し，同時に 1 ステップずつ移動していくとき，点 M で両者が出会う確率を求め，既約分数で答えよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172701)

0.115 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} & \dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4} & \dfrac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.116 次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ．　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(a>0)$

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その 2 点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0, y_0) で表し，$x_0y_0\neq 0$ とする．

(3) 曲線が囲む図形の面積を求めよ．

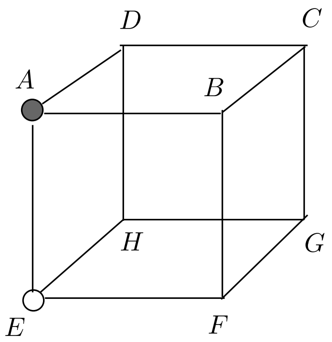
(名古屋大 2003)　　(m20032801)

0.117 図 1 のように，各頂点に A〜H の名前がつけられた，一辺の長さ a の立方体を考える．最初に，黒いピンと白いピンが，それぞれ頂点 A，頂点 E に設置してある．サイコロを 4 回振り，1 回目と 2 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，黒いピンを $A\to B\to C\to D\to A\cdots$ と移動させ，3 回目と 4 回目のサイコロの出た目の合計分だけ，白いピンを $E\to F\to G\to H\to E\cdots$ と移動させることとする．次の問いに答えよ．

(1) 黒いピンが頂点 C に止まる確率を求めよ．

(2) 黒いピンと白いピンの距離が $\sqrt{2}a$ となる確率を求めよ．

(3) 黒いピンと白いピンの距離の期待値を求めよ．なお，無理数は無理数のままで解答して良い．



(名古屋大 2008)　　(m20082804)

0.118 $\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする．　以下の問に答えよ．なお，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}'$ と記すこととする．

(1) $\boldsymbol{f}(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合，$\boldsymbol{f}(t)$ と $\boldsymbol{f}'(t)$ は直交することを証明せよ．ただし，$|\boldsymbol{f}(t)|>0,\ |\boldsymbol{f}'(t)|>0$ とする．

(2) 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{g}(t)$ とするときに，位置ベクトルが $\boldsymbol{g}'(t)$ となる点を点 B とする．もし，$\boldsymbol{g}(t)//\boldsymbol{g}''(t)$ が成り立つならば，三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ．ただし，$\boldsymbol{g}(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし，O は原点とする．また，$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})'=\boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{g}+\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}'$ の公式を用いてよい．

(名古屋大 2011)　　(m20112804)

0.119 以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 x}dx$ の値を求めよ．

(2) 関数 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ．

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ によって表される曲線の $0\leq x\leq 1$ の部分の長さを求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142803)

0.120 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ で各列ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ.

(2) (1) で求めた P の転置行列を ${}^tP$ とする．この時 ${}^tPP = E_3$（E_3 は単位行列）を示し，さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $({}^tP\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b})$ が成り立つ性質を用いて，$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とした時に，次の等式を示せ.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (({}^tPAP)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}))$$

(4) $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_i (i = 1, 2, 3)$ とした時，x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2.x_3)(i = 1, 2, 3)$ があり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ.

(名古屋工業大 2008) (m20082902)

0.121 $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax = 0,\ y > 0\}$ $(a > 0)$ 上の 1 点を P とし，原点を O とする.

(1) 直線 OP と x 軸のなす角を θ とした時，OP の長さを求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 - ax \leq 0,\ y \geq 0\}$ を極座標で表せ.

(3) D を (2) の領域とした時，次の定積分を求めよ. $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$

(名古屋工業大 2008) (m20082904)

0.122 ベクトル $(1, 2)$ に行列を掛けると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

のように（一般には）向きと大きさが異なるベクトル $(-3, -3)$ が得られるが，他方

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のようにその方向を変えない特殊なベクトル (x, y) が存在することもある．後者のようなベクトルは，この行列の**固有ベクトル**と呼ばれ，その長さが何倍となったか（a の値）は**固有値**と呼ばれる．このような方向をもったベクトル (x, y) を求めよ．また，ベクトルの長さは何倍になっているか.

(三重大 2002) (m20023117)

0.123 鉛直の壁に立てかけた長さ 5m の板がある．その下端を毎秒 16cm の速さで水平に引く場合について，次の (1)，(2) に答えよ.

(1) 板の下端が壁から 3m になった瞬間における板の上端の速さ，および加速度の大きさを求めよ.

(2) 板の下端が壁から 3m になった瞬間における板の中点の速さ，および加速度の大きさを求めよ.

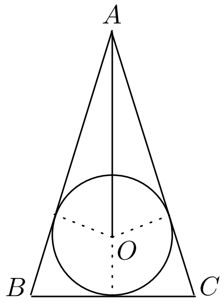
(三重大 2004) (m20043104)

0.124 図のように $AB = AC$ となる二等辺三角形 ABC が, 半径 1,

中心 O の円に外接する. 次の問に答えよ.

(1) $AO = x$ として, 二等辺三角形 ABC の面積 S を x で表せ.

(2) 面積 S が最小となる場合の各辺の長さを求めよ.



(三重大 2005)　　(m20053106)

0.125 1 辺が 10cm の正方形を底面にもつ，高さ 15cm の四角錐の容器を上下逆さまに置く．この容器に毎秒 0.5cm^3 の割合で水を静かに注ぐとき、以下の問に答えなさい．

(1) t 秒後の水面の深さを y(cm)，水面の 1 辺の長さを x(cm) としたとき，水面の面積 $S(\text{cm}^2)$ と水の体積 $V(\text{cm}^3)$ を x, y であらわせ．また，x と y の関係を示しなさい．

(2) 水面の 1 辺の長さ x(cm) を t で表しなさい。

(3) 水面の面積 $S(\text{cm}^2)$ を t で表し、S の増加する割合を求めなさい．

(三重大 2006)　　(m20063108)

0.126 原点を O とする 3 次元直交座標系上に，点 $A(0,1,2)$ と点 $B(3,3,0)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\angle AOB = \theta$ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(2) 線分 $\overline{AB}$ の長さを求めよ．

(3) 3 点 O, A, B を通る平面の法線ベクトルを求めよ．ただし，正規化しなくて良い．

(4) $\triangle AOB$ の面積を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133101)

0.127 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.128 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について以下に答えよ．

(1) A^5 の行列式 $|A^5|$ の値を求めよ．

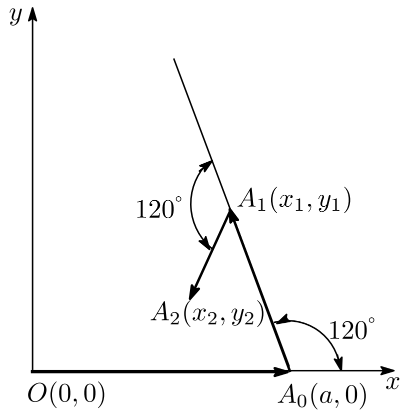
(2) A の固有値および <u>互いに直交する長さ 1</u> の固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A を変換 P^TAP によって対角化する直交行列 P を構成し，対角化を実行せよ．ただし，P^T は P の転置行列である．

(三重大 2016)　　(m20163117)

0.129 図に示すように原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $A_0(a,0)$ に向かうベクトル $\overrightarrow{OA_0}$ がある．次にベクトル $\overrightarrow{A_0A_1}$ を，点 A_0 を始点とし，長さが $\overrightarrow{OA_0}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{OA_0}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する．さらにベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$ を点 A_1 を始点とし，長さが $\overrightarrow{A_0A_1}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{A_0A_1}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する ．以降同じ操作を行ってベクトルを定義していくものとして，以下の設問に答えよ．

(1) 点 A_1 の座標 (x_1, y_1) を求めよ．



(2) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を点 A_{n-1} の座標 (x_{n-1}, y_{n-1}) と a を使って表せ．

(3) この操作を繰り返したとき，点 A_n が漸近する座標 (x, y) を求めよ．

(三重大 2020)　　(m20203105)

0.130 以下の問いに答えなさい．ただし，y は x の関数であり，$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 初期条件を $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ とするとき，微分方程式　$xy'' + y' = 0$　を解きなさい．

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において，(1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい．ただし，区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は，$L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$　で与えられる．

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.131 実ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ とする．実ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，$|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2$ となるための条件を求めよ．

（奈良女子大 2004）　　(m20043207)

0.132 xy 座標で多項式 $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ で表される曲線を考える．

(1) この式は実数の定数 a, b, c を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って，

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$$

と書き換えることができる．行列 A を求めよ．

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 λ_1, λ_2 をもつ ($\lambda_1 < \lambda_2$ とする). λ_1, λ_2 を求めよ.

(3) 前問で得られた固有値 λ_1, λ_2 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ とする. $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ.

(4) $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X\boldsymbol{e}_1 + Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016) (m20163208)

0.133 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列式を求めよ.

(2) 固有値を全て求めよ.

(3) 前問で求めた固有値のそれぞれに対応する固有ベクトルを示せ. ここで固有ベクトルの長さは任意でよく, また必ずしも互いに直交せずともかまわない.

(奈良女子大 2018) (m20183207)

0.134 2 次元の xy 平面内の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ に関する以下の問いに答えよ.

ただし, $a > b > 0$ であり, また楕円の離心率を

$$\tilde{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

とする.

(1) 楕円の周囲の長さ L は

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2\theta}\ d\theta$$

で与えられることを示せ.

(2) 離心率 $\tilde{e}$ が 1 より十分小さいとき, 長さ L は近似的に

$$L = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{e}^2\right)$$

となることを示せ.

(奈良女子大 2022) (m20223207)

0.135 関数 $r = a(1 + \cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている. 以下の問いに答えよ.

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ.

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ.

(京都大 1998) (m19983302)

0.136 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め, その x 軸, y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする. 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について, 以下の (1)〜(4) に答えよ. ただし, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする．

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ．

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.137 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて　$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t)\quad (0 \leq t \leq 2\pi)$
で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

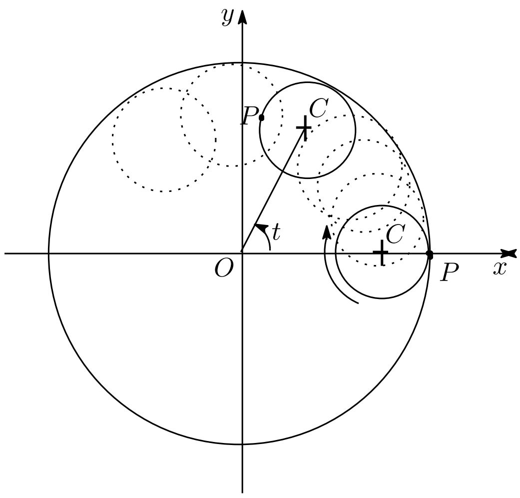
(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a, 0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.138 原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり，初期状態において座標 $(a, 0)$ にある点 P で大円に内接している．小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する．点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする．このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

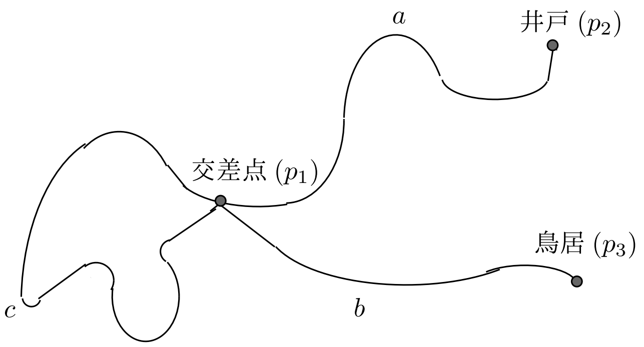
(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.139



上の図はある村の略図を表す．この村には三つの主要な場所として交差点 (p_1)，井戸 (p_2)，鳥居 (p_3) がある．p_1 と p_2 は道 a で結ばれており，p_1 と p_3 は道 b で結ばれている．また，p_1 からは道 c を通って p_1 に戻ることができる．道 a, b, c の長さはいずれも 1 とする．

二つの場所 x と y があるとき（ただし，このとき一般に $x = y$ の場合も許す），x から一つ以上の道を通って y に至る経路を考えることにする．場所 x から場所 y に至る経路は，場所を表す記号と道を表す記号が交互に現れる記号列で表すことができる．また，ある経路中に現れる道の長さの合計をその経路の長さと呼ぶ．たとえば，p_2 から道 a を通り p_1 に移動し，さらに道 b を通って p_3 に至る経路は．記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ b,\ p_3)$ で表すことができ，この経路の長さは 2 である．また，記号列 $(p_2,\ a,\ p_1,\ c,\ p_1,\ a,\ p_2)$ は長さ 3 の経路を表す．後者の例のように，経路中に同じ場所や同じ道が複数回現れても良い．

二つの場所 p_i と p_j が道で直接結ばれている場合は第 i 行第 j 列成分を 1 として，直接結ばれていない場合は第 i 行第 j 列成分を 0 とすることにより，この村の場所と道は，次のような 3 行 3 列の行列 A で表現できる．この行列を隣接行列と呼ぶ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，行列 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の第 i 行第 j 列成分は，p_i から p_j に到達する長さ 2 の異なる経路の数を表す．たとえば，第 1 行第 1 列成分の値 3 は，p_1 から p_2 に到達する $(p_1,\ c,\ p_1,\ c,\ p_1)$, $(p_1,\ a,\ p_2,\ a,\ p_1)$，$(p_1,\ b,\ p_3,\ b,\ p_1)$ という 3 個の長さ 2 の経路が存在することを表す．

問 1〜問 3 に答えよ．

(1)　A^3 を求めよ．

(2)　A^3 の第 1 行第 1 列成分の値に対応する経路をすべて列挙せよ．

(3)　A^n を求めよ．（ n は 1 以上の自然数である．）

(京都大 2017)　　(m20173304)

0.140　曲線（asteroid）

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

（a は正の定数）の長さを求めよ．

(京都工芸繊維大 1998)　　(m19983402)

0.141 曲線 $y=\dfrac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$ $(a>0)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線上の 2 点，$\mathrm{A}(0,\dfrac{1}{a})$，$\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の間の弧の長さ ℓ を a と q で表せ．

(2) $\ell=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$ のとき，点 $\mathrm{B}(p,q)$ $(p>0)$ の座標を求めよ．

（大阪大 2004）　　(m20043504)

0.142 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q,　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする.　$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053503)

0.143 曲線 C 上の点を $P(x,y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093503)

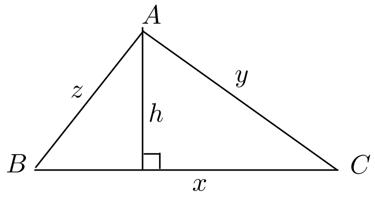
0.144 a を正定数とする．3 辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．

$BC=x$，$CA=y$，$AB=z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

(2) 体積 V を x, y の関数として表せ．同時に，変数 x, y の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) x, y が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの x, y の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.145 2 次元平面上の点 $A(1,0)$ を点 $A'(a,1-b)$ に, 点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b,1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a,b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P , 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0,0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0,0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 2010)　　(m20103506)

0.146 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える. ただし, a は実数とする.

(1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合, a の値を求めよ.

(2) $a = -1$ の場合について, A の固有値と固有ベクトルを求めて, A を対角化せよ.

(3) $\boldsymbol{x}$ を長さ 1 のベクトルとする. ベクトル $\boldsymbol{y}$ を, $\boldsymbol{x}$ の A による一次変換 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とする.
$a = -1$ の場合について, $\boldsymbol{y}$ の長さ $|\boldsymbol{y}|$ を最大とする $\boldsymbol{x}$ を求めよ. また, そのときの長さ $|\boldsymbol{y}|$ を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113506)

0.147 曲線 C が媒介変数表示 $x = f(s),\ y = g(s),\ s \geq 0$ で表される. ただし, $\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$, $\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) 定数 $b > 0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x = f(s),\ y = g(s),\ 0 \leq s \leq b$ で表される. $C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ.

(2) 点 P は時刻 0 で $x = f(0),\ y = g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する. 時刻 $t > 0$ までに移動した経路の長さを t とする. 時刻 t における P の位置を $x = f(\varphi(t))$, $y = g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.148 2 次元平面において, 4 点 $(\sqrt{2},0),\ (0,\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},0),\ (0,-\sqrt{2})$ で囲まれた菱形を考える. その内部において, ランダムに点 P をとる. P から最も近い菱形の周上の点を Q とし, PQ の長さを X とする. PQ の長さを求める操作を独立に n 回繰り返し, $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ を得た. ただし n は自然数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) X の分布関数, すなわち, $F(x) = P(X \leq x)$ を求めよ.
また, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy$ を満たす確率密度関数 $f(x)$ も求めよ.

(2) PQ の長さの平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の期待値 $E(\overline{X})$ を求めよ.

(3) 平均 $\overline{X}$ の分散 $V(\overline{X})$ を求めよ.

(大阪大 2016)　　(m20163507)

0.149 曲面 S : $x^2+y^2-z^2+x+y+2=0$ $(z>0)$ について以下の問いに答えよ.

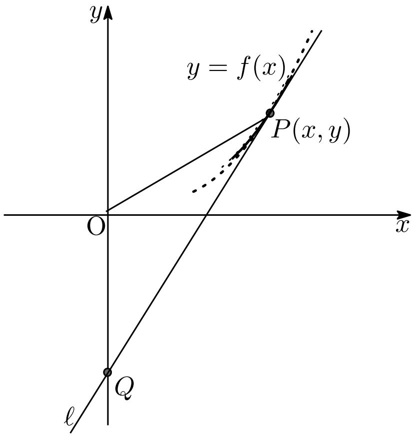
(1) 曲面 S と平面 $z=2$ の交線の長さを求めよ.

(2) 曲面 S と平面 $z=2$ に囲まれた領域の体積を求めよ.

(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上にあるとき, $x+y-2z$ の最大値を求めよ.

(大阪大 2016) (m20163508)

0.150 xy 平面上の $x>0$ に微分可能な曲線 $y=f(x)$ がある.
この曲線上の点 $P(x,y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり, その交点を Q とする.
また, 右図の O は原点を表す.



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x)>0$ であり, 線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして, x と y の関係を微分方程式で表せ.

(2) $u=\dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて, 曲線 $y=f(x)$ を求めよ.
ただし, 曲線は点 $(2,0)$ を通るものとする.

(大阪大 2021) (m20213503)

0.151 行列 A をつぎのように定義する：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを, それぞれ求めよ.

(3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って, 行列 A を対角化せよ.

(4) 行列 A の n 乗, A^n を求めよ. ただし n は自然数とする.

(大阪府立大 2010) (m20103604)

0.152 $2\times\ 2$ の行列 A をつぎのように定義する：

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 問い (1) で求めた固有値を λ, 対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く. 次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$$

ただし E は $2\times\ 2$ の単位行列であるとする.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

このとき 2× 2 の行列 B を次のように定義する：

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

次の等式を満たす 2× 2 の行列 C を求めよ：

$$AB = BC$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133604)

0.153 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $\quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$ の長さを求めよ.

(関西大 2003)　　(m20033702)

0.154 $r : [a, b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし, $(x, y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $a \leq \theta \leq b$ を α とする. ここで $0 \leq a \leq b \leq \pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta, \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r, r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r, r')$ を与えよ. さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063804)

0.155 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対し, R^2 でのベクトルを考えるとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) A は対角化可能かどうかを答えよ. またその理由も述べよ.

(3) A の固有ベクトルのうち長さが 1 のものの 1 つ $\boldsymbol{u}$ を求め, $\boldsymbol{u}$ と直交する長さ 1 のベクトルのうちの 1 つ $\boldsymbol{v}$ を求めよ. これらのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し, $[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]^{-1}A[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}]$ を求めよ.

(4) 任意の自然数 n に対する A^n を求めよ.

(神戸大 2014)　　(m20143802)

0.156 二次方程式 $ax^2 + x + b = 0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x, y) = ax^2 + xy + by^2 + x + y$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 二変数関数 $f(x, y)$ が極値をとる点 (x, y) を, a, b を用いて表せ.

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため, $x = x(a, b)$, $y = y(a, b)$ とかける. 特に $x > 0$ かつ $y > 0$ となるような a, b について, 三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり, 表面積が 24 である直方体の体積を $V(a, b)$ とする. このとき $V(a, b)$ は最大値を持つが, $V(a, b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223803)

0.157 飛行している物体の時刻 t での位置座標 (x, y, z) が次式で与えられる.

$$x = a\sin t$$

$$y = a\cos t$$

$$z = bt$$

ただし, a, b は定数である. 次の問いに答えなさい.

(1) この物体の速度の大きさを求めなさい.

(2) この物体が $1 \leq t \leq 3$ の間に飛行した軌跡の長さを求めなさい.

（鳥取大 2004）　　(m20043905)

0.158 二つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, 1, 5)$ と $\boldsymbol{B} = (1, 3, 1)$ があるとき, 以下の問いに答えよ. 但し, (a, b, c) の a, b, c はそれぞれ $x-$ 成分, $y-$ 成分, $z-$ 成分を表す.

(1) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積 $J = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ を求めよ.

(2) xy 平面上にあり, $\boldsymbol{A}$ に垂直で長さが 1 で, x 成分が負のベクトル $\boldsymbol{C}$ を求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})/|\boldsymbol{A}|^2$ とベクトル $\boldsymbol{A}$ の間の角度を計算せよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073907)

0.159 直交座標系に関して, 3 つのベクトルを $\overrightarrow{OA} = (1, -1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (k, 4, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (2, 1, 3)$ とする.

(1) $\overrightarrow{OA}$ の長さ $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ を求めよ.

(2) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交するとき, k の値を求めよ.

(3) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ を求めよ.

(鳥取大 2009)　　(m20093907)

0.160 サイクロイド : $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0,\ 0 \leq t \leq 2\pi)$ の長さ L を求めよ.

(鳥取大 2010)　　(m20103905)

0.161 $n = 1, 2$ に対して，極座標で与えられた曲線 $C_n : r^n = \cos n\theta$ を考える。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C_1 を xy 平面に描き，x 軸のまわりに回転してできる図形の表面積を求めよ.

(2) 曲線 $C_2 (0 \leq \theta \leq \pi/4)$ の長さ l は，$l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ で与えられることを示せ.

(岡山大 2006)　　(m20064002)

0.162 3 次元実ベクトルが空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し, 線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{a},\ f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b},\ f(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c}$ を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) f の固有多項式を求めよ.

(2) $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}\}$ は : $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(3) W の次元を求めよ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$ が，無限個の自然数 n に対して不等式

$$||f^n(\boldsymbol{x})|| < 2^n||\boldsymbol{x}||$$

を満たすための実数 x, y, z の条件を求めよ．ただし f^n は合成変換 $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ 個}}$ を表し，

$||\cdot||$ はベクトルの長さを表すものとする．

(岡山大 2014)　　(m20144003)

0.163 正の実数 b, c が $bc = 1$ を満たすとして，空間の 4 点 $O(0,0,0)$，$A(0,1,1)$，$B(b,0,b)$，$C(c,c,0)$ を考える．三角形 ABC を含む平面 α 上に点 H を，線分 OH が α と垂直になるようにとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 H の座標を b で表せ．

(2) 線分 OH の長さの最大値を求めよ．また，そのときの b の値を求めよ．

(3) 点 H が三角形 ABC の内部に存在するための b の条件を求めよ．

(岡山大 2014)　　(m20144004)

0.164 三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB = \alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014107)

0.165 2 次元直交座標系における 2 軸を x 軸，y 軸とするとき，$y = x^2$ で表される曲線がある．この曲線の，点 $(0,0)$ から点 (a, a^2) までの長さを求めよ．

(広島大 2006)　　(m20064108)

0.166 (1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ．ただし，$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ である．

(2) $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき，$\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094101)

0.167 (1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3} dx = \frac{3}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} \frac{x}{3} dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(\theta) = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$ とし，xy平面上の曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える．次の (i)，(ii)，(iii) に答えよ．

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）．

(ii) C の長さを求めよ．

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164102)

0.168 実行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$　を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

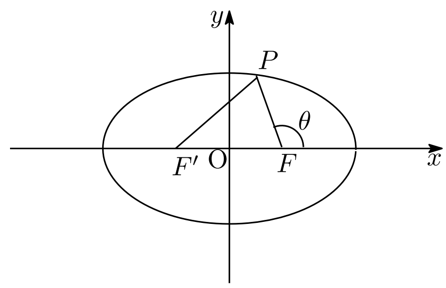
(4) $W = \left\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \ \middle|\ \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016)　　(m20164105)

0.169　放物線 $y = (x+2)^2$ の区間 $-3 \leq x \leq -2$ における曲線の長さ s を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234102)

0.170　焦点を F, F' とする楕円は，二つの線分 PF と PF' の長さの和が一定である点 P が作る曲線と定義される．今，$PF + PF' = 2a$ とし，点 $F,\ F'$ の座標を $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$ として以下の問いに答えなさい.（e はいわゆる離心率）.



(1) この楕円の方程式を直交座標 x, y を用いて表しなさい.

(2) 線分 PF が x 軸となす角を θ，PF 間の距離を r として，この楕円の方程式を極座標で表しなさい.

(3) 楕円上の点で，点 F と最も近い点 P の座標を求めなさい.

(山口大 2006)　　(m20064308)

0.171　$y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ に関する次の問いに答えなさい．

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 区間 $-1 \leqq\ x \leqq\ 1$ における曲線 y の長さを求めなさい．

(山口大 2009)　　(m20094312)

0.172　$y = \dfrac{1}{3}x\sqrt{x} + 3$ に関する次の問いに答えなさい．

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 区間 $(4 \leq x \leq 8)$ における曲線 y の長さ L を求めなさい．

(山口大 2016)　　(m20164304)

0.173　曲線 $y = 1 - x^2$ について，次の問題に答えなさい．

(1) x 軸とこの曲線とで囲む図形の面積を求めなさい．

(2) この曲線の第一象限における長さを求めなさい．

(山口大 2017)　　(m20174304)

0.174　一辺の長さが 3 の正四面体 $ABCD$ において，辺 BC の中点を M とする．

さらに辺 CD 上で $CN = 2ND$ を満たす点を N とする，

(1) 線分 $AM,\ AN,\ MN$ の長さを求めなさい.

(2) $\angle MAN = \theta$ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい.

(3) $\triangle AMN$ の面積を求めなさい.

(山口大 2021)　　(m20214303)

0.175　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトル（ただし，長さ 1 のもの）を求めよ.

(徳島大 1999)　　(m19994404)

0.176　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ と行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) 行列式 $|A - \lambda E|$ の値を求めよ．ただし，λ は定数とする.

(2) $|A - \lambda E| = 0$ を満たす λ の値をすべて求めよ.

(3) (2) で求めたそれぞれの λ に対して，$Ax = \lambda x$ を満たす 3 次元列ベクトル x のうち長さ 1 であるものを求めよ.

(徳島大 2000)　　(m20004404)

0.177　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) A の固有値 λ と, それに対応する長さが 1 の固有ベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) 上で求めた λ と x に対して, $Ay = \lambda y + x$ となるベクトル $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で x と直交するものを求めよ.

(3) このとき $P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ とおいて, $\Lambda = P^{-1}AP$ を求めよ.

(徳島大 2004)　　(m20044404)

0.178　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2006)　　(m20064401)

0.179　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ．ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2013)　　(m20134401)

0.180 I_n を $n \times\ n$ 単位行列とする．また，$a \in \boldsymbol{R}^n$ を長さ 1 の n 次元行ベクトルとする．任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，行列 $A(x)$ と関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$A(x) = I_n + x({}^t aa)\ , \quad f(x) = \det A(x)$$

ただし，${}^t a$ は a の転置ベクトルであり，$\det A(x)$ は $A(x)$ の行列式である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0) = 1$ を示せ．

(2) $aA(-1) = 0$ であり，ゆえに $f(-1) = 0$ となることを示せ．

(3) $f(x)$ は x の多項式であり，その次数 m は $1 \leq m \leq n$ を満たすことを示せ．

(4) 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して，$f(x)f(y) = f(x + y + xy)$ となることを示せ．

(5) $f(x) = (1 + x)^m$ を示せ．

(6) $m = 1$，すなわち $f(x) = 1 + x$ となることを示せ．

(高知大 2006)　　(m20064503)

0.181 次の媒介変数で表された曲線

$$x = f(t) = \cos^3 t\ , \quad y = g(t) = \sin^3 t$$

について以下の問いに答えよ.

(1) この曲線は通常何と呼ばれているか答えよ.

(2) $f'(t)$ と $g'(t)$ を求めよ.

(3) t の範囲を $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ とした時の曲線の長さ L を求めよ.

(高知大 2018)　　(m20184505)

0.182 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq\ x \leqq\ e)$$

(2) $a > 0$ のとき，次の広義積分が収束するための a の条件を求め，そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx$$

(愛媛大 2009)　　(m20094602)

0.183 (1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_1^{e^2} (\log x)^2 dx$$

(2) 次の媒介表示で表される曲線の長さを求めよ.

$$x = \frac{t^3}{3} - t\ , \qquad y = t^2 \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2)$$

(愛媛大 2013)　　(m20134602)

0.184 曲線 $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ に関して以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ の増減を調べグラフを描け．

(2) 区間 $[\alpha, \alpha + 1]$ の曲線の長さ $h(\alpha)$ を求めよ．

(3) $h(\alpha)$ の最小値を求めよ．

(九州大 1999)　　(m19994702)

0.185 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする．

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて
$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$
と表されることを示せ．

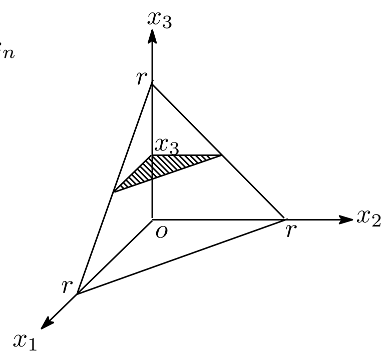
(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(九州大 2003)　　(m20034705)

0.186 正の数 r と整数 $n\geq 1$ に対して
$$K_n(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ \mid\ x_i\geq 0\ \ (1\leq i\leq n)\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\leq r\}$$
とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.
$$|K_n(r)|=\underset{K_n(r)}{\int\cdots\int}1\ dx_1\cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.187 空間の 4 点 $O=(0,0,0)$, $A=(1,2,-1)$, $B=(1,2,1)$, $C=(1,1,1)$ を考える．2 点 O,A を通る直線を ℓ, 3 点 O,A,B を通る平面を π とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 B から直線 ℓ へ下ろした垂線の足を P とする．
$e_1=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ および，$e_2=\dfrac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$ をそれぞれ求めよ．
ただし，$|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$ はおのおのベクトル $\overrightarrow{OA}$ とベクトル $\overrightarrow{PB}$ の長さ（大きさ）を表すものとする．

(2) 点 C から平面 π へ下ろした垂線の足を Q とする．
$$\overrightarrow{OQ}=\alpha e_1+\beta e_2$$
が成り立つ実数 α と β を求めよ．また，点 Q の座標を求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064711)

0.188 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x), \quad g(x) = \log\left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = f(x) \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064712)

0.189 $f(x)$, $g(x)$ を以下の関数とするとき，各問いに答えよ．

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$g(x) = 1 - x^2$$

(1) 曲線 $f(x)$, $g(x)$ および直線 $x = 1$ で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(2) (1) の領域の周囲の長さ L を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094706)

0.190 図 1 に示すように座標平面の x 軸上に長さ 1 の棒がある．この棒の左端 P を y 軸に沿って原点 O から正方向に動かす．このとき棒の右端 Q は x 軸上を動くものとする（図 2）．棒の左端 P から距離 t $(0 < t < 1)$ だけ離れた棒上の点を R とする．

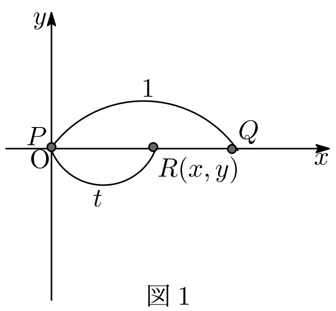


図 1

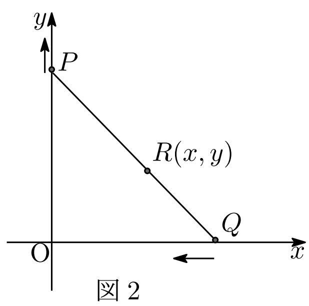


図 2

(1) 点 P が原点 O から点 $(0, 1)$ まで移動するとき，点 R はどのような軌跡を描くか．点 R の x 座標と y 座標が満たす式を求め，この軌跡の図形の名前を記せ．

(2) (1) で求めた軌跡と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) (2) で求めた面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104702)

0.191 アステロイド $C : x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ に対し，各問いに答えよ．

(1) 曲線 C 上の点 (x, y) に対し，$x = \cos^3 t$ のとき，y を t を用いて表せ．

(2) 曲線 C の囲む領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C の長さ L を求めよ．

(九州大 2011)　　(m20114702)

0.192 直交座標を (x, y)，極座標を (r, θ) とするとき，曲線 $C : r = 2(1 + \cos\theta)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸，y 軸との交点の直交座標を求めて，曲線 C の概形を xy 平面上に描け．

(2) $r \leqq 2(1+\cos\theta)$, $y \geqq 0$, $y \leqq -\dfrac{1}{2}x+2$ で表される領域の面積を求めよ．

(3) 上の (2) で考えた領域の外周の長さを求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124703)

0.193 $a \geqq 1$ とする．以下の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2a}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ $L(a)$ を求めよ．

(2) $a \geqq 1$ における $L(a)$ の最小値を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144707)

0.194 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164706)

0.195 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく.（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194709)

0.196 行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

について考える．このとき次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有値のうちで最大なものを λ_0 とおく（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく）．このとき λ_0 に対応する固有ベクトルで，「 ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「 第 1 成分は負でない 」という条件を満たすものを求めよ．

(九州大 2020)　　(m20204701)

0.197　3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214705)

0.198　3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく. λ_0 に対応する固有ベクトルで, 「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224704)

0.199　1 辺の長さが a の正方形がある. その 4 隅から正方形を切り取って, その残りで箱を作る. 箱の容積が最大になるときの切り取るべき 4 隅の正方形の 1 辺の長さを求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034901)

0.200　F の直交行列 P を求めて, $P^{-1}FP$ を対角行列にする.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ.

(1) F の固有値を求め,

(2) 長さ 1 の固有ベクトルを求め,

(3) 直交行列 P を求め,

(4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034930)

0.201　辺の長さの総和が 1 の直方体のうち, 体積が最大になるものを求めよ.

(佐賀大 2005)　　(m20054904)

0.202　$\boldsymbol{\nu}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\nu}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\nu}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のときに以下の問に答えよ.

(1) 内積 $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ を計算せよ.

(2) ベクトルの長さ $||\boldsymbol{\nu}_2||$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{\nu}_1$ と $\boldsymbol{\nu}_3$ のなす角を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054929)

0.203 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を求めよ. ただし, 答えは t の関数として表せ.

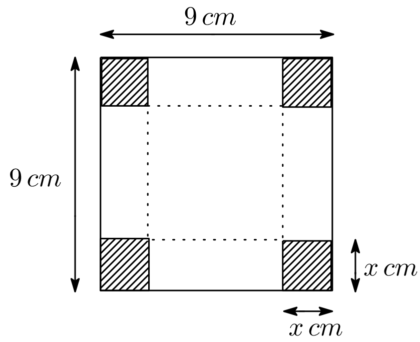
(2) $\cos x$ を t で表せ.

(3) 変数変換 $\tan\dfrac{x}{2}=t$ を行って, 積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ を求めよ.

(4) 曲線 $y=-\log|\cos x|$, $\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054932)

0.204 一辺の長さが 9 cm の正方形の厚紙の四隅から, 一辺 x cm の合同な 4 つの正方形 $(0\le 2x\le 9)$ を切り取り，その残りの部分を折り上げて枡（ます）を作る．この枡の容積を最大にする x を求めよ．



(佐賀大 2006) (m20064942)

0.205 $x-y$ 平面において，y 軸上を等速運動する点 P があり，その座標を $(0,y)$ とする．x 軸上の定点を A とし，その座標を $(a,0)$ とすると，x 軸と直線 AP とのなす角 θ の角速度は直線 AP の長さの 2 乗に反比例することを次の手順により示せ．ただし，各変数の時間微分を $y'=\dfrac{dy}{dt}$, $\theta'=\dfrac{d\theta}{dt}$ とする.

(1) 問題の関係を図で示せ.

(2) 点 P が等速運動する関係式を示せ．ただしその速度を v_0（一定値）とする.

(3) $\tan\theta$ がどのように表されるかを示し，その両辺を時間 t で微分し，題意を示せ.

(佐賀大 2008) (m20084904)

0.206 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(2,2,3)$, $\boldsymbol{b}=(2,1,2)\in\boldsymbol{R}^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも直交する長さ 3 の 3 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であることを示せ.

(佐賀大 2012) (m20124905)

0.207 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) 3 つの固有値に対応する規格化された（長さが 1 の）固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(3) 行列 A を対角化した行列 A_d を求めよ.

(4) 次の関係式を満たす直交行列 O を求めよ．ここで，O^T は O の転置行列である.

$$A_d=O^TAO$$

(佐賀大 2015)　　(m20154911)

0.208　半径 1 の円板が x 軸上をすべることなくころがったとき，円周上にある一点 P の軌跡に着目する．円板の回転角を θ とし，$\theta=0$ のとき，点 P は原点に位置したとする．

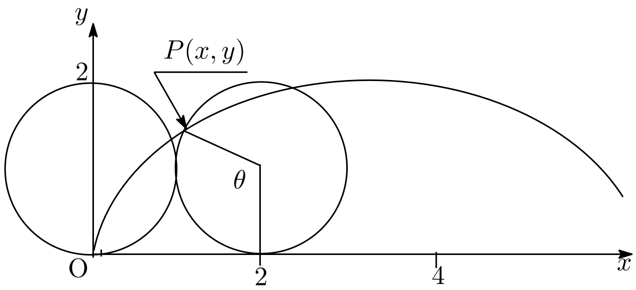
(1) 回転角が θ で与えられるとき，点 P の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) さらに微小な角 $\Delta\theta$ 回転したときの，x 座標と y 座標の変化量を求めよ．

(3) また，このときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(4) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P が移動した弧の長さを求めよ．

(5) 回転角が 0 から 2π まで変化したときの，点 P の軌跡と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．



(佐賀大 2017)　　(m20174908)

0.209　次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の長さを求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ とベクトル $\boldsymbol{a}_2$ の内積を求めよ．

(3) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立なベクトルか 1 次従属なベクトルかを示せ．

(佐賀大 2021)　　(m20214904)

0.210　一辺の長さが 1 であるような正方形の折り紙があり (fig.1), これを図のように折る場合を考える．

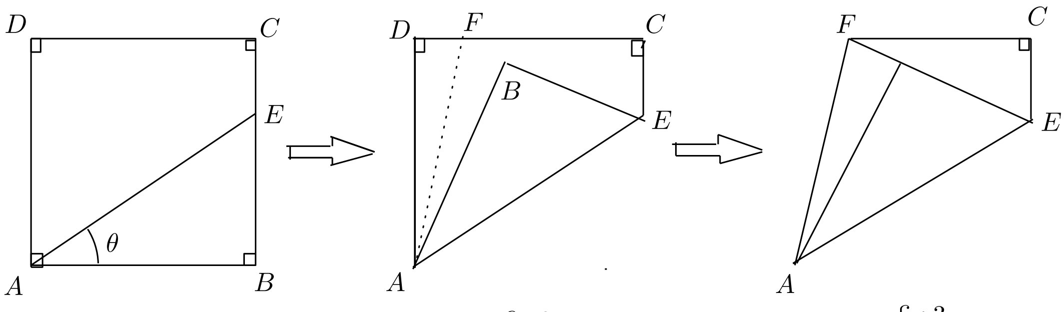


fig.1　　fig.2　　fig.3

(1) fig.1 の状態から $\angle BAE$ が θ であるような折り目 AE に沿って折ると fig.2 のようになった. 三角形 ABE の面積を求めよ．

(2) fig.2 の状態で三角形 ABE の面積が五角形 $ABECD$ の面積と等しいとき $\tan\theta$ の値はいくらか．

(3) 次に fig.2 の状態から $\angle BAD$ の二等分線 AF に沿って折ると fig.3 のようになった. 四角形 $AECF$ の面積を求めよ．

(長崎大 2005)　　(m20055002)

0.211 図 1 に示すように, xy 平面上に原点 $O(0,0)$ および点 $A(1,1)$, 点 $B(x,y)$ を考える. また, 2 × 2 行列を $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ とする. また, ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の長さを $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ で表し, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ で表す.

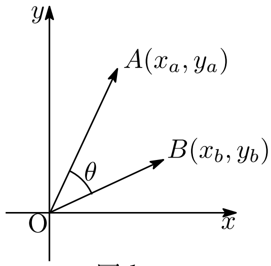


図 1

(1) $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を $|\overrightarrow{OA}|$, $|\overrightarrow{OB}|$ および図中の θ を用いて表しなさい.

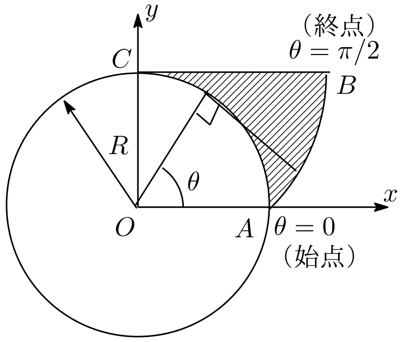
(2) $|\overrightarrow{OB}|$ と $<\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}>$ を x,y で表しなさい。

(3) $\triangle OAB$ の面積を S とすると, $S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$ で表される. このことを用いて,
$$4S^2=|M|^2$$
が成り立つことを示しなさい. ただし $|M|$ は, 行列 M の行列式の値を表す.

(4) $\triangle OAB$ が正三角形となるとき, 点 B の座標を求めよ.

(長崎大 2005) (m20055004)

0.212 太さを無視できる糸を巻き付けた半径 R の円柱がある. 糸を張りながら円柱から外すとき以下の問いに答えよ.



(1) 図のように $\theta=0$ の位置からはじめて $\theta=\pi/2$ まで糸が外れた. 円柱から外れた糸の長さ BC はいくらか.

(2) θ の位置まで糸が外れたとき, 糸の先端の x および y 座標を R と θ を用いて表せ.

(3) $\theta=\pi/2$ まで糸を外す間に, 糸の先端が描く曲線の長さ AB は次式で計算できる.
$$AB=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
上式を計算して曲線 AB の長さを求めよ.

(4) 図中の斜線部分の面積 $\boldsymbol{A}$ は
$$\boldsymbol{A}=R^2\left\{\int_0^{\pi/2}\left(\theta\sin\theta\cos\theta+\theta^2\sin^2\theta\right)d\theta-\frac{\pi}{4}\right\}$$
で与えられる. 右辺に含まれる定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ の値を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075002)

0.213 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\,\sin x\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,dx$ を求めよ.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy$, $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le y\le 1\}$ を計算せよ.

(4) 平面曲線が $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$, $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ で与えられるとき, 曲線の長さ L を求めよ.

(長崎大 2007) (m20075004)

0.214 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq y \leq 1\right\}$ とするとき，領域 D を図示し，2 重積分 $\displaystyle\iint x\sqrt{y}\,dxdy$ を求めよ．

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，曲線を図示し，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(長崎大 2009)　　(m20095008)

0.215 (1) 不定積分 $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{1-x}\,dx$ を求めよ．

(2) $D = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\}$ とするとき，領域 D を図示し，次の 2 重積分を求めよ．

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

(3) xy 平面上での曲線が次式で与えられるとき，その長さを求めよ．

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi\,,\ a > 0)$$

(長崎大 2009)　　(m20095012)

0.216 以下の行列 A の固有値, および長さ 1 の固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(長崎大 2011)　　(m20115007)

0.217 座標平面上の助変数表示をもつ曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = -1 + \cos t \end{cases} \qquad (0 \leqq\ t \leqq\ 2\pi)$$

について次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形を示せ．

(2) 曲線 C の長さを求めよ．

(大分大 2009)　　(m20095104)

0.218 行列 A が

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられている．ただし，a は正の実数とする．

(1) A の行列式を求めなさい．

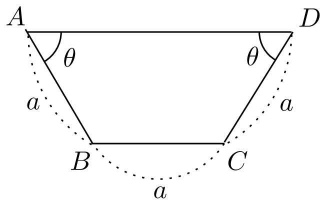
(2) A の余因子 $\widetilde{a}_{ij}$ $(i = 1,2\,;\ j = 1,2)$ を求めなさい．

(3) A の逆行列が存在するための条件と，そのときの逆行列を求めなさい．

(4) A の固有値と長さ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

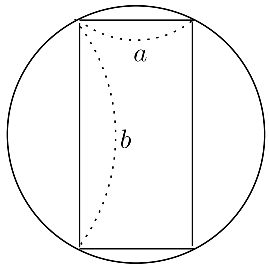
(大分大 2011)　　(m20115107)

0.219 図のような 3 辺 AB, BC, CD の長さが a の台形がある．この 3 辺の長さは変わらないとして，台形の面積が最大となるような角度 θ を求めなさい．



(大分大 2013)　　(m20135101)

0.220 半径 r の円に内接する長方形がある．長方形の面積が最大となるような辺の長さ a, b を，円の半径 r を用いて表しなさい．



(大分大 2013)　　(m20135103)

0.221 図 1 のような底面の半径が r，母線の長さが l の直円すいがある．以下の設問に答えよ．

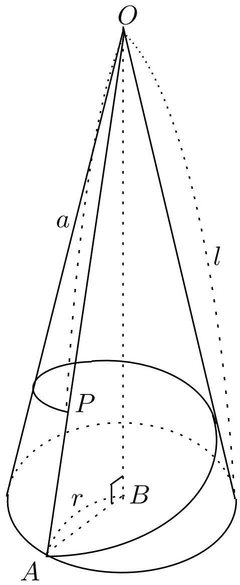


図 1　直円すい

(1) 母線 OA 上に $OP = a$ となる点 P からこの直円すいの側面を一巻きして，点 A にいたる最短の長さ b を求めなさい．ただし，$l > 2r$ であるとする．

(2) この直円すいが $r = 5$, $l = 30$ の寸法をもつとする．$a = 20$ のときの b の値を計算しなさい．

(3) (2) の直円すいにおいて，$a = 30$ のときの曲線 AP の概略図を描きなさい．

(熊本大 2009)　　(m20095201)

0.222 関数 $y = e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 2010)　　(m20105203)

0.223 3 次元空間内に原点 O を一つの頂点とする三角形 OAB がある．点 A と点 B の直交座標をそれぞれ (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とし，線分 OA と線分 OB のなす角を θ として，以下の問に答えなさい.

(1) 線分 OA および OB の長さを $\overline{OA}$ および $\overline{OB}$ のように書くことにする．このとき，線分 AB の長さの 2 乗 $\overline{AB}^2$ を $\overline{OA}$, $\overline{OB}$，および θ を用いて表しなさい.

(2) $\cos^2\theta \leq 1$ であることを利用して，次の不等式

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) \geq (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \qquad ①$$

が成り立つことを示しなさい.

(3) 不等式 ① で等号が成立する条件を示し，そのとき三点 O, A および B はどのような位置関係にあるか述べなさい.

(熊本大 2014)　　(m20145202)

0.224 ベクトル

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})$ と表現する．このとき，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2)$，$(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3)$，$(\boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3)$ の値をそれぞれ求めよ.

(2) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ の長さをそれぞれ求めよ.

(3) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ と向きが同じで，長さ 1 のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ とする．このとき，

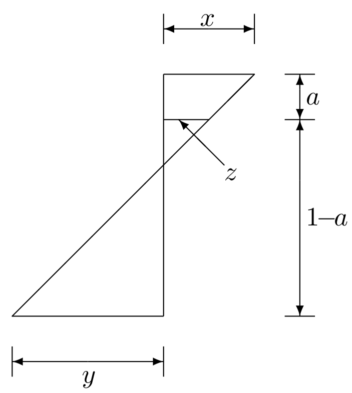
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{w}_1 + b\boldsymbol{w}_2 + c\boldsymbol{w}_3$$

を満たす実数 a, b, c をそれぞれ求めよ.

(宮崎大 2017)　　(m20175302)

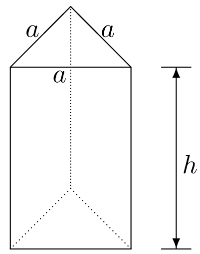
0.225 右の図形の長さ z を x, y, a を用いて求めよ.

ただし，z の位置は上部の三角形にあるものとする.



（鹿児島大 2001）　　(m20015401)

0.226 断面の一辺の長さ a，長さが h の三角柱の体積が最大になるように a と h を定めるとき，a と h の比を求めよ．ただし，$a+h=20$ とする．

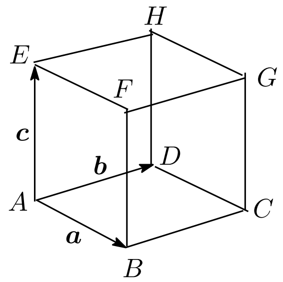


（鹿児島大 2001） (m20015412)

0.227 高さ h，底面の半径 r，母線の長さ l の円錐の体積 V 及び表面積 S を求めよ．

(鹿児島大 2006) (m20065409)

0.228 右図の立方体 $ABCD-EFGH$ において，ベクトル $\overrightarrow{ED}$ と $\overrightarrow{EC}$ のなす角 θ の余弦を求めよ．ただし，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$ は，互いに直交しており，その長さはともに l である．



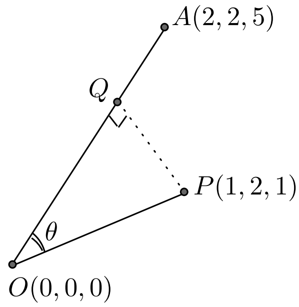
(鹿児島大 2007) (m20075403)

0.229 図の様に点 O を原点として，点 $A(2,2,5)$，点 $P(1,2,1)$ がある．点 P から直線 OA におろした垂線の足を点 Q とする．この時，以下の問いに答えなさい．

(1) 図の様に直線 OA と直線 OP の成す角度を θ とする時，$\cos\theta$ を求めなさい．

(2) 直線 OQ の長さを求めなさい．求めた長さを用いて，ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を求めなさい．

(3) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めなさい．



(鹿児島大 2009) (m20095407)

0.230 原点 $O(0,0)$，点 $A(4,-1)$，点 $B(2,2)$ がある時，以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の長さと内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めなさい．

(2) 角 AOB を θ とする時，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めなさい．

(3) 三角形 OAB の面積を求めなさい．

(鹿児島大 2009) (m20095419)

0.231 3 次元の空間に直交座標 x 軸，y 軸，z 軸を考える．点 $A(2,2,2\sqrt{2})$，点 $B(3,3,-3\sqrt{2})$ があるとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 原点を O とした時，$\angle AOB$ を求めなさい．

(2) 原点 O から線分 AB に垂線を下ろしたとき，その足を点 P とする．線分 AP と線分 PB の長さの比を求めなさい．また，その時の点 P の座標も求めなさい．

(鹿児島大 2012)　　(m20125414)

0.232 曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) この曲線と，直線 $x = 0$，直線 $x = 1$ 及び x 軸とで囲まれた領域の面積 S を求めなさい．

(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲のこの曲線の長さ ℓ を求めなさい．

(鹿児島大 2013)　　(m20135410)

0.233 同じ長さの白い棒と赤い棒を 6 本使用して図 1 のような正四面体をつくる．ただし，各辺が白い棒である確率は 1/3，赤い棒である確率は 2/3 とする．以下の (1),(2) に答えよ．

なお，計算結果を求める必要はない．

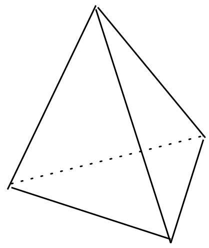


図 1 正四面体

(1) 6 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(2) 3 辺が白い棒である確率を求める方法を説明せよ．式を答えても良い．

(鹿児島大 2015)　　(m20155413)

0.234 長さ $5m$ の棒 AB が垂直な壁に立てかけてあり，下端 B が水平な地面を $0.8m/s$ で壁から遠ざかるとする．B が壁から $3m$ 離れたとき，上端 A の速度及び加速度を求めなさい．ただし，この問題では，重力加速度を考慮せず，棒の上部 A は壁から離れず接した状態で地面方向に移動するものとする．

(鹿児島大 2018)　　(m20185436)

0.235 点 $O(0,0,0)$ を原点とする 3 次元直交座標系 $O{-}xyz$ において，点 $A(0,1,0)$，点 $B(1,0,2)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

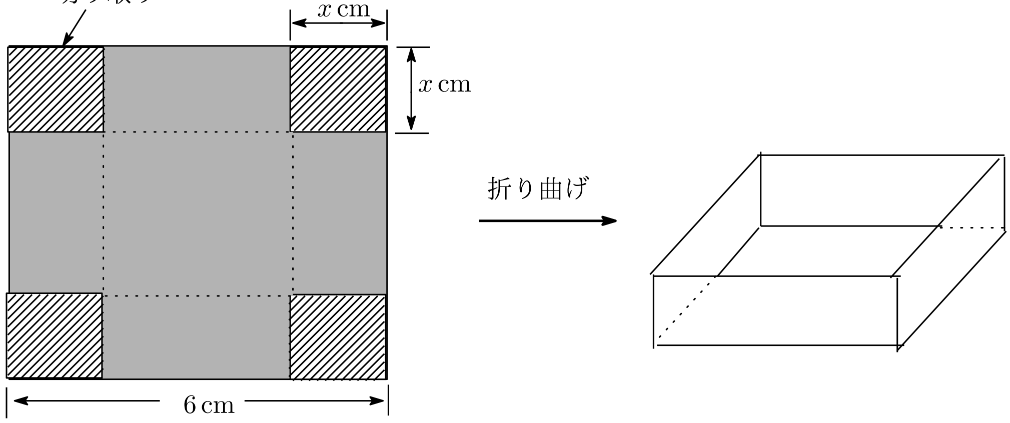
(1) 点 A と点 B を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ．

(3) 点 O から直線 ℓ に下ろした垂線の長さ d を求めよ．

(鹿児島大 2021)　　(m20215404)

0.236 一辺が 6 cm の正方形の紙の四隅から，一辺の長さ x cm の同じ大きさの 4 つの正方形を切り取り，残りの紙を折り曲げてふたのない直方体の箱を作る．なお，紙の厚みは無視できるものとする．



(1) この箱の容積を $V\,\mathrm{cm}^3$ とすると，V は ① 式で示されることを説明せよ．

$$V = x(6-2x)^2 \qquad ①$$

(2) x の取りうる範囲を述べよ．

(3) ① 式を微分すると ② 式となる．この式を用いて V が最大となる x の値を求める手順を説明せよ．そして，その x の値を求めよ．

$$V' = 12(x-3)(x-1) \qquad ②$$

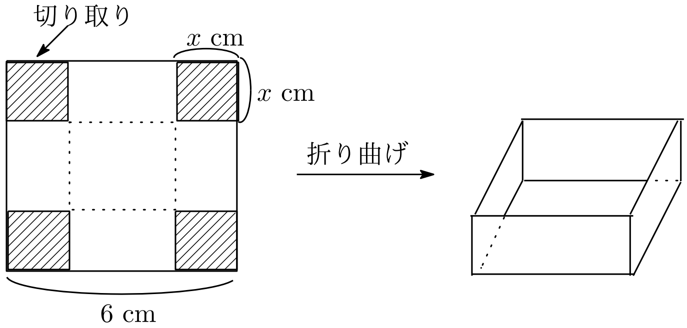
(鹿児島大 2021)　　(m20215418)

0.237 曲線 C : $x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$, $z=\sqrt{3}\cdot t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ のとき，次式を求めなさい．
ただし，s は曲線の長さを表す．

$$\int_C (xy+z)ds$$

(鹿児島大 2021)　　(m20215420)

0.238 一辺が 6 cm の正方形の紙の四隅から，一辺の長さ x cm の同じ大きさの 4 つの正方形を切り取り，残りの紙を折り曲げてふたのない直方体の箱を作る．なお，紙の厚みは無視できるものとする．



(1) この箱の容積を $V\mathrm{cm}^3$ とすると，V は ① 式で示されることを説明せよ．

$$V = x(6-2x)^2 \qquad ①$$

(2) x の取りうる範囲を述べよ．

(3) ① 式を微分すると ② 式となる．この式を用いて V が最大となる x の値を求める手順を説明せよ．そして，その x の値を求めよ．

$$V' = 12(x-3)(x-1) \qquad ②$$

(鹿児島大 2022)　　(m20225412)

0.239 (1) 次の関数のグラフを描け．

$$y = \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

(2) 次の関数のグラフを描け．

$$y = x^2 - |x^2-4|$$

(3) 縦の長さ x，横の長さ y の長方形がある．対角線の長さ l を一定として面積 S が最大になるようにするには x と y をどのようにすればよいかを説明せよ．また，そのときの面積はどうなるか，l を用いて表せ．

(香川大 2009)　　(m20095701)

0.240 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1 , λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \;\; \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005) (m20055815)

0.241 xy 座標平面において放物線を $y = \dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y = x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2 > x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018) (m20185801)

0.242 $f(x) = -\log\cos x$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$ を求めよ．

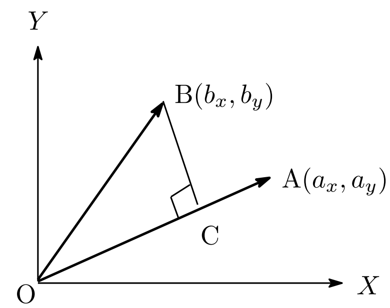
(3) $-\pi/2 < x < \pi/2$ のとき，$f(x) \geq x^2/2$ であることを示せ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ の，$0 \leq x \leq \pi/3$ の部分の長さを求めよ．

(島根大 2018) (m20185806)

0.243 下図に示すように，XY 平面上の座標 (a_x, a_y) に点 A が，座標 (b_x, b_y) に点 B がある．点 B から線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ に対して垂線を引き，垂線と線分 $\overline{\mathrm{OA}}$ との交点を点 C とする．原点 O から点 A までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と，原点 O から点 B までのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は，X, Y 軸方向の単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ を用いてそれぞれ次式のように表すことができる．以下の設問に答えよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2) 線分 $\overline{\mathrm{OC}}$ の長さ l を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ.

(4) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を求めよ.

(5) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交していることを計算により示せ.

(6) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = A\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 P がある. ここで, 行列 A は以下で与えられるものとする. ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) 設問 (6) において, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たす定数 k が存在するとき, その k を求めよ. ただし, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \mathbf{0}$ とする.

(島根大 2020) (m20205802)

0.244 ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について,

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} u \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

で定める. 下記の (1), (2), (3) に答えなさい. ただし, u は正の実数である.

(1) 内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ とベクトルの長さ $||\boldsymbol{a}||$, $||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めなさい.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ としたときの $\cos\theta$ を求めなさい.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための u を求めなさい.

(首都大 2016) (m20165903)

0.245 (1) 次の 2 次正方行列 A の固有値および長さが 1 であるすべての固有ベクトルを求めよ. ただし, 実数の範囲で扱うものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 次の 3 次正方行列 P が直交行列であるとき, a, b, c の値をすべて求めよ.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & a \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & c \end{bmatrix}$$

(首都大 2016) (m20165910)

0.246 点 $A(5, 3, 1)$ と平面 $\alpha\ :\ x + 2y + 2z = 4$ を考える.

(1) 点 A から平面 α に下ろした垂線の足 H の座標と垂線の長さを求めなさい.

(2) 平面 α 上に点 $(0, -1, 3)$ を中心とした半径 1 の円 C を描く. 点 P は円 C 上の点で, 線分 AP の長さが最大となるものとする. このとき点 P の座標と, 線分 AP の長さを求めなさい;

(3) 3 点 A, P, H を通る平面を求めなさい.

(首都大 2019) (m20195901)

0.247 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\,y)$ と点 $(x+dx,\,y+dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a\leq x\leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha\leq t\leq\beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C:\begin{cases}x=t^2\\ y=t-\dfrac{1}{3}t^3\end{cases}$ $(0\leq t\leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.248 曲線 $C:y=f(x)$ に沿って $0\leqq\ x\leqq\ a$ の間の長さ $L(C)$ は，次の式で与えられる.

$$L(C)=\int_0^a\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

特に，曲線 C を懸垂線またはカテナリーと呼ばれる次の式で表される曲線とする.

$$C\ :\ y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

この懸垂線に沿っての $0\leqq\ x\leqq\ a$ の間の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2013) (m20136001)

0.249 パラメータ t で表された曲線

$C\ :\ \begin{cases}x=3t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}\qquad(0\leqq\ t\leqq\ 2)$

の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014) (m20146001)

0.250 縦が $6cm$，横が $8cm$ の長方形において，各辺の長さを $0.1cm$ 伸ばしたときの対角線の長さの増加量の近似値を全微分を用いて求めなさい.

(宇都宮大 2019) (m20196108)

0.251 図 1 のように，点 A,B,C,D が xy 軸平面上にある．原点 O とし，

各座標を $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と示すとき，$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ である.

また，$\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を原点を中心として，反時計方向に角度 θ 回転させたものである．$\overrightarrow{OD}$ は $\overrightarrow{OC}$ を同様に角度 θ 回転させた点である.

以下の問に答えよ.

(1) 点 B,D の座標を求めよ.

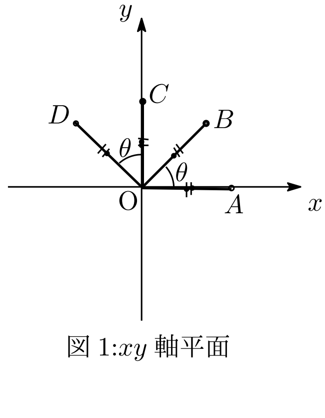


図 1:xy 軸平面

(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を計算せよ．

(3) 原点を中心とした長さ 1 である任意のベクトル $\overrightarrow{OE}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ は，

$\overrightarrow{OA}$ を角度 α 回転させることによって得られる．角度 α 回転させる一次変換を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{ ①}$$

と表すとき，a, b, c, d を求めよ．

(4) $\cos(\alpha+\beta)$ を $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ を用いて表せ．

(工学院大 2003)　　(m20036206)

0.252 曲線 $y=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$ $(0\leq x\leq 1)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この曲線と 2 つの直線 $x=1,\ y=0$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) この曲線の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2011)　　(m20116304)

0.253 t を媒介変数として，方程式

$$x=\cos^3 t\,, \qquad y=\sin^3 t \qquad \left(0 \leqq\ t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする．以下の問いに答えよ．

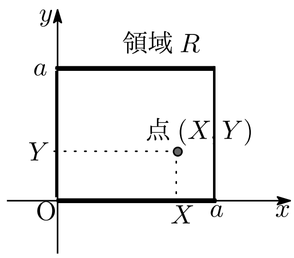
(1) $\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 D の接線のうち，接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 D の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146304)

0.254 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに 1 つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X, Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする，



$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,, & (0\leq x\leq a,\ \text{かつ},\ 0\leq y\leq a\ \text{の場合}) \\ 0\,, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ の値を求めなさい．

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を用いて，$X\leq\dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい．

(3) $Z=X+Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z\geq a$ となるか，すなわち，$Y\geq -X+a$ となるかを考え，それを基に，$Z\geq a$ となる確率を求めなさい．

(和歌山大 2017)　　　(m20176510)

0.255 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y = \dfrac{2}{3}x^2 - a \ (a > 1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8} - a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{8}{3}a - 2}$ であることを示せ.

(4) $a = \dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　　(m20106907)