[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：オイラー

**0.1**　$f$ を周波数とするとき，時間 $t$ の関数 $g(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

で与えられる．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．ある関数 $m(t)$ のフーリエ変換を $M(f)$ とするとき，オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を利用して，$m(t)\cos(2\pi f_0 t)$ のフーリエ変換が $M(f - f_0)$ および $M(f + f_0)$ を用いて表せることを示せ.

(北海道大 2014)　　(m20140103)

**0.2**　オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，次の関係が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ である.

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(東北大 2018)　　(m20180501)

**0.3**　図の様に，$x, y$ 平面上の座標が $(x, y)$ で表される点 $P$ を原点 $O$ のまわりに角度 $\alpha$ だけ回転すると，座標が $(x', y')$ の点 $P'$ に移った．以下の問に答えよ.

(1)　点 $P$ の原点 $O$ からの距離を $r$，$O$ から $P$ に到るベクトルが $x$ 軸の正の方向となす角度を $\theta$ とすると，$x$ と $y$ は

$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$

と表される．この時 $x'$ と $y'$ を $r$，$\theta$，$\alpha$ で表わせ.

(2)　$x'$ と $y'$ を $x$ と $y$ と $\alpha$ で表す関係式をもとめよ.

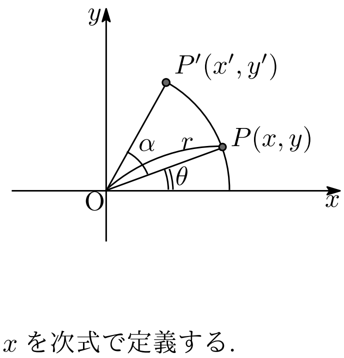
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい.

$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3)　複素数 $z$ は，2 乗すると-1 となる $i$ と称する虚数を導入して，実数 $x$ と $y$ を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，$x$ と $y$ は複素数 $z$ の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 $P$ の座標 $x$ と $y$ とを実部と虚部に持つ複素数を $z$，点 $P'$ の座標 $x'$ と $y'$ とを実部と虚部に持つ複素数を $z'$ としよう．この時 $z'$ を $z$ で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい.

(4)　上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ.




(お茶の水女子大 1999)　　(m19990610)

**0.4**　関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで $e^x$ は指数関数を表す.

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ.

$$\sinh(\alpha+\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

**0.5** 微分方程式に関する以下の問いに答えよ; ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする.

(1) 次の定係数微分方程式

$$y''-(a+2)y'+2ay=f(x)$$

について以下の問いに答えよ．ただし，$a$ は実数とする.

(a) $f(x)=0$ のとき，一般解を求めよ.

(b) $f(x)=5e^{-3x}$ かつ $a<0$ のとき，一般解を求めよ.
ただし，$e$ は自然対数の底とする.

(2) 次のオイラー型の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2y''-4xy'+6y=0$$

(3) 次の連立微分方程式において，$y_1(0)=4$, $y_2(0)=-3$ を満たす解を求めよ.

$$\begin{cases} y_1'+2y_2'=2y_1+5y_2 \\ 2y_1'-y_2'=14y_1+5y_2 \end{cases}$$

(東京大 2016)　　(m20160701)

**0.6** 複素数 $z=x+iy$ の関数 $f(z)=\sinh 2z$ 　について，以下の問いに答えよ．ただし，$x$, $y$ は実数とする．　なお，$\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いてよい.

(1) $f(z)=u+iv$ とするとき，$u$, $v$ を $x$, $y$ を用いて表せ．　ただし，$u$, $v$ は $x$, $y$ の実関数とする.

(2) $f(z)=0$ となる $z$ を求めよ.

(3) $w=f(z)$ により $z$ 平面上の直線 $x=\dfrac{1}{2}$ を $w$ 平面上に移したとき，$w$ 平面上の図形は楕円になる．$w$ 平面上にその楕円を図示せよ.

(筑波大 2017)　　(m20171302)

**0.7** 物理によく用いられるオイラーの公式（ $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 　ここで，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位 ）は，指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である．この公式を使って，次の関係式を証明せよ.

(1) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$　　(2) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

(新潟大 2007)　　(m20072003)

**0.8** 三角関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) $e^x$, $\cos x$, $\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

が成り立つことを，問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

(3) 任意の正の整数 $n$ について，次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ.

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

(新潟大 2016)　　(m20162010)

**0.9** 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 $\theta$ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ.

(2) 二次正方行列 $I$ および $J$ を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．$J^2$ を計算し，$J^2$ と $I$ の間に成り立つ関係式を求めよ.

(3) 一般に二次正方行列 $X$ に対し，そのゼロ乗 $X^0$ および指数関数 $e^X$ は次式で定義される：

$$X^0 = I, \quad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は $I$ に比例する部分と $J$ に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)I + g(\theta)J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ.

　なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい.

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$
$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ.

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで $\omega$ は正の定数である．以下の問いに答えよ.

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで $K$ は $t$ に依らない二次正方行列である．行列 $K$ を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

**0.10** (1) オイラーの微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = R(x)$$

は，独立変数を $x = e^t$ によって $x$ から $t$ に変換すると，2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = R(e^t)$$

に書き換えられることを示せ.

(2) 次のオイラーの微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = x^2$$

の一般解を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002904)

**0.11** 三角関数について，以下の問いに答えよ．ただし，$n$ は自然数である．
この際，オイラーの公式 $(e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta)$ を用いても良い．ただし，$i$ は虚数単位である．

(1) $\sin(2\theta)$ および $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(2) $\sin(3\theta)$ および $\cos(3\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(3) $\sin(4\theta)$ および $\cos(4\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(4) $\cos(10\theta)$ を $\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いて表現せよ．

(5) $\cos(n\theta)$ は，$\sin\theta$ および $\cos\theta$ を用いてどのように表現されるか推定せよ．

(三重大 2018)　　(m20183102)

**0.12** $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

**0.13** 次の各問に答えよ．ただし，$i$ は虚数単位とする．

(1) オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて，$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を導け.

(2) (1) の結果を用いて，以下の等式がすべての実数 $\theta$ に対して成立するように，定数 $a$ と $b$ を定めよ．

$$\sin^3\theta = a\sin\theta + b\sin 3\theta$$

(宮崎大 2012)　　(m20125301)

**0.14** オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に関する以下の問に答えよ．

(1) オイラーの公式を用いて，つぎの公式を証明せよ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に，オイラーの公式を適用し，両辺の実部と虚部を比較して，余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$$

を導出せよ．

(室蘭工業大 2006)　　(m20065508)