[選択項目] 年度：1991〜2023 年　 文中：パラメータ

0.1 次の連立一次方程式の解をパラメータを用いて表せ.

$$\begin{cases} 2x-y+z &= 0 \\ -x+2y+z &= 0 \\ x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

(秋田大 2005)　　(m20050401)

0.2 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える.

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x-3y-2z=0$ をパラメーターを使って表せ.

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか.

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x+5y=0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ.

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000615)

0.3 半径 a の円が x 軸に接しながら滑らずに回転してゆくとき，円周上の一点の軌跡をサイクロイドと呼ぶ.

(1) 点の初期位置を原点として，この軌跡の方程式を回転の中心角に関するパラメータ表示で与えよ．ただし，円は常に x 軸の上側にあるものとする.

(2) この点が再び x 軸に戻るまでの一周期分の曲線の弧長を計算せよ.

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010601)

0.4 a をパラメータとして，次の定積分を求めなさい.　　$I(a) = \iint_D xy\,dxdy$

ここで，$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x+y \leq a\}$

(千葉大 2002)　　(m20021202)

0.5 定積分　　$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \exp(-\alpha x)\dfrac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha \geq 0,\ \beta \neq 0)$

をパラメータ β について微分することにより　$\int_0^\infty \dfrac{\sin\beta x}{x}dx = \mathrm{sign}(\beta)\dfrac{\pi}{2}$　　を導け.

ここで，$\mathrm{sign}(\beta)$ は β の符号 $(\pm)$(β が正値の場合は $+$，負値の場合は $-$) を意味する.

(筑波大 2003)　　(m20031303)

0.6 行列　　$A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$　　を考えよう．ここで，パラメータ p,q の変動範囲は $0<p<1$, $0<q<1$ であるとする．このとき次の (1),(2),(3) の各問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルはノルムが 1 となるように規格化して示せ.

(2) 行列 A の n 乗，A^n を求めよ.

(3) 行列 A の n 乗の n が大きい場合の極限値 $\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(筑波大 2003)　　(m20031316)

0.7 $A(\lambda)$ は実数のパラメータ λ を含む次の正方行列である．

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -1 & \lambda & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & \lambda\end{pmatrix}$$

また，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\qquad \mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

とする．x,y,z もすべて実数である．

(1) x,y,z を未知変数とする連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

が自明でない解を持つための，パラメータ λ が満たすべき条件を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

(2) 連立一次方程式

$$A(\lambda)\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

を考える．パラメータ λ に応じた場合分けをして，解が存在するか否かを調べよ．存在する場合には，一意性に注意して，その解を求めよ．

(筑波大 2004)　　(m20041319)

0.8 3つのベクトル $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\ a\\ b\end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．ただし，a 及び b は実数値パラメータとする．

(1) この3つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底になるための a と b の条件を求めよ．

(2) この3つのベクトルが $\mathbb{R}^3$ の直交基底になるように a と b の値を定めよ．

(3) (2) のとき，ベクトル $\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$ をこの3つのベクトルの線形結合で表せ．

(筑波大 2006)　　(m20061307)

0.9 次の連立方程式の解を調べよ．ただし，a および b は実数のパラメータとする．

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & -y & -2z & = & -2\\ ax & -by & -z & = & -1\\ x & -y & -4az & = & -4b\end{array}\right.$$

(筑波大 2007)　　(m20071303)

0.10 $f(x,y)=xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x,y)=c$ と直交し，点 $(p,0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p>0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x > 0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D = \bigcup_{1 \leq p \leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.11 ある工場の製品 A が大量生産されているとき，製品 A の不良率 θ を推定することを考える．生産現場からランダムに大きさ n の標本を選び，不良品の数を調べる．X を不良品のとき 1，良品のとき 0 となる確率変数とする．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1) パラメータ θ が与えられたとき，X が値 x をとる確率 $f(x; \theta)$ を求めよ．

(2) $x_1, \cdots, x_n$ を確率分布 $f(x; \theta)$ をもつ母集団からの無作為標本とするとき，この標本の同時確率を最大にするような θ を $\hat{\theta}$ と書く，$\hat{\theta}$ を求めよ．

(3) $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量になっていることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171311)

0.12 $a > 0$ をパラメータとした行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは大きさを 1 とする．さらに $A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ を求めよ．ここで n は任意の自然数である．

(山梨大 2018)　　(m20181807)

0.13 次の連立方程式を解け（a は定数）．不定の場合，任意の定数（パラメータ）を用いて答えよ．

$$\begin{cases} x + y + az = a + 2 \\ x + ay + z = a + 2 \\ ax + y + z = a + 2 \end{cases}$$

(新潟大 2022)　　(m20222011)

0.14 半径 $a (a > 0)$ の円が x 軸に接して滑らずに転がるとき，円周上の定点が描く曲線をサイクロイドといい，パラメータを t として

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

で与えられる．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ を計算せよ．

(2) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を求めよ．

(3) 一般に，パラメータ t が α から β まで変化したとき，点 $(x(t), y(t))$ が描く曲線の長さ l は次式で表される．

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

サイクロイドにおいて，$t = t_0$ $(0 < t_0 < 2\pi)$ を初期値として

円が一回転したとき $(t = t_0 + 2\pi)$ の曲線の長さを求めよ．

(富山大 2018)　　(m20182307)

0.15 (1) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=t+e^t$$

(2) 次の常微分方程式を解き，初期条件 $t=0$ で $x=x_0$ を満たす特殊解を求めよ.;

$$\frac{dx}{dt}-x=-2x^2$$

(3) 次の方程式で表される曲線族が満たす微分方程式を導け．また，この曲線族の直交曲線を求めよ．(α は曲線族のパラメータ)

$$y^2+\alpha x=0$$

(富山大 2021)　　(m20212305)

0.16 x, y がパラメータ表示により

$$x=a\cos^3 t$$

$$y=b\sin^3 t$$

で与えられているとき, dy/dx を求めなさい. ただし, $a\neq 0$, $b\neq 0$ とする.

（福井大 2004）　　(m20042407)

0.17 コンピュータのグラフィックディスプレイに (x, y) 座標系の原点を中心とする半径 r の円を描くことを考える．このとき，半径 r の円は，x 軸となす角 θ（反時計回りを正方向とする）をパラメータとして

$$\begin{cases} x=\boxed{\quad（ア）\quad} \\ y=\boxed{\quad（イ）\quad} \end{cases}$$

と表現できるから，円を n 等分して，$\Delta\theta=2\pi/n$ より $\Delta\theta$ を求め，

$$\theta_0=0,\ x_0=r,\ y_0=0$$

$$\theta_{i+1}=\theta_i+\Delta\theta \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

として，

$$\begin{cases} x_{i+1}=\boxed{\quad（ウ）\quad} \\ y_{i+1}=\boxed{\quad（エ）\quad} \end{cases}$$

より，次々と点の座標 (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\cdots$, (x_n, y_n) を求め，これらの 2 点間を順次，直線で結んでいけば円を描くことができる．上記の（ア）～（エ）に入る式を答えよ．ただし,（ウ）,（エ）については，$r, \theta_i, \theta_{i+1}$ は<u>使わない</u>形で答えよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062622)

0.18 次のパラメータ表示で与えられる xyz 空間内の曲線 C と直線 ℓ について, 以下の問いに答えよ. ただし, 空間内の二点 P, Q に対して, 二点間の距離を $\overline{PQ}$ で表す.

$$C\ :\ \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \qquad\qquad (0\leqq\theta\leqq 2\pi) \\ z=\cos\theta+\sin\theta \end{cases} \qquad\qquad \ell\ :\ \begin{cases} x=t \\ y=-3t \qquad (-\infty<t<+\infty) \\ z=t \end{cases}$$

(1) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}^2$ を θ と t の式で表せ.

(2) P を曲線 C 上の点, Q を直線 ℓ 上の点とするとき, $\overline{PQ}$ の最小値, および, そのときの P と Q の座標を求めよ.

(岐阜大 2010)　　(m20102604)

0.19 次の 4 次行列 A, 4 次単位行列 E, およびパラメータ t に対して, 行列式 $\left|tE - A\right|$ を t について因数分解しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -5 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2010)　　(m20102901)

0.20 (1) 位置ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 0, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, \sqrt{6}, 1)$ がなす角 θ を求めなさい.

(2) (1) の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルの一つ求めなさい.

(3) (1) の $\boldsymbol{a}$ の終点と $\boldsymbol{b}$ の終点を通る直線を考える．この直線上の任意の点を終点とする位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて求めなさい.（パラメータを一つ使ってもよい）.

(三重大 2006)　　(m20063112)

0.21 xy 平面上のサイクロイドは，θ をパラメータとして

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，a は正の定数である．この曲線の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ 部分の長さを求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163114)

0.22 $y(\rho)$ に関する 2 階の常微分方程式

$$\frac{d^2y(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dy(\rho)}{d\rho} + \left\{1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right\}y(\rho) = 0$$

を考える. ここで, 変数 ρ の範囲は，$0 \leq \rho < \infty$ であり，l は正の整数である.

(1) いま，$y(\rho)$ を

$$y(\rho) = \frac{u(\rho)}{\rho}$$

とおいて, この方程式に代入すると，$u(\rho)$ についての方程式

$$\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + p(\rho)u(\rho) = 0 \qquad (a)$$

が得られる. このときの $p(\rho)$ を求めよ.

(2) つぎに，(1) で得られた方程式 (a) の $\rho \to \infty$ および $\rho \to 0$ の極限における $u(\rho)$ の漸近解を求めてみよう.

(a) $\rho \to \infty$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = e^{\lambda\rho}$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

(b) $\rho \to 0$ のとき $p(\rho)$ 近似形を求め, $u(\rho)$ の漸近形が満たす方程式をかけ. また, このときの $u(\rho)$ は, λ をパラメータとして

$$u(\rho) = \rho^\lambda$$

の形で与えられる. この方程式から λ を求め, $u(\rho)$ の一般解を求めよ.

(奈良女子大 2004)　　(m20043205)

0.23 ある事象の起こる確率 p が与えられているとき，n 回の独立試行を行って事象が k 回起こる確率を b_k とする（これをパラメータ n, p の二項分布という）．なお，以下の問いでは，$q = 1 - p$ として，次の二項定理を利用してよい． $(px+q)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} x^k$

ここで，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数である．

(1) 確率 b_k を記し，$\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$ となることを示せ．

(2) 二項分布の平均値 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(3) 事象が起こる回数を確率変数 r として，r に関するチェビシェフの不等式を次式で表す．

$$P(|r - \mu| \leq a\sigma) \geq 1 - \frac{1}{a^2}$$

ここで，a は適当な正の数である．試行回数を増やせば，事象の起こる割合は一定の値 p に近づくことを示せ．

(京都大 2006) (m20063303)

0.24 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C \ : \ \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009) (m20093301)

0.25 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{3}\cos^2\theta & -\frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\frac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O - x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta) = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x} \leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け.

(3) $\Omega(0) \cap \Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ.

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2} \Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x} \in \displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2} \Omega(\theta)$ とは，$0 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x} \in \Omega(\theta_0)$ となることである.

(京都大 2015)　　(m20153305)

0.26 パラメータ表示の曲線 $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ 　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ 　の長さを求めよ.

(関西大 2003)　　(m20033702)

0.27 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = & a\cos t \\ y = & b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.28 複素変数の関数 $f(z) = \dfrac{1}{2z^2 - 5z + 2}$ について次の問いに答えよ. ただし, 積分路 C は, 単位円周 $|z| = 1$ を反時計回りに一周する閉曲線とする.

(1) $f(z)$ の各極における留数を求めよ.

(2) 積分 $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ の値を求めよ.

(3) $z = e^{i\theta}$（θ : 実数，i : 虚数単位）のとき，$\cos\theta = \alpha z + \beta z^{-1}$ を満たす実数 α，β を求めよ.

(4) 積分路 C のパラメータ表示　C : $z = e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$　を用いることにより, (2) の積分 I は, 次のように変換できる.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{a}{b\cos\theta + c} d\theta \quad (a, b, c \text{ : 定数})$$

a, b, c を求めよ.

(九州大 2005)　　(m20054703)

0.29 $\phi = x^2 + y^2 + z$ とするとき，$\phi = 0$ は曲面を表す．また，この曲面はパラメータ u, v を用いて $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (u, v, -u^2 - v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P = (1, 1, -2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる.

このときの接平面を表す式を x, y, z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.30 3 次元空間内で

$$S \ : \ (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

の形で表される曲面を考える．ただし，D はパラメータ (u,v) の動く 2 次元平面の領域である．このとき，S の面積 $\mu(S)$ は

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{ \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 } \ dudv$$

で与えられる．ただし，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は行列式を表す．これを用いて以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S が $z = f(x,y)$， $(x,y) \in D$ で与えられるときは

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \ \ dxdy$$

であることを示せ.

(2) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ の面積は 4π であることを (1) の公式を用いて確かめよ.

(九州大 2007) (m20074707)

0.31 以下の問いに答えよ.

(1) 空間内の一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り, 方向を示す単位ベクトル（方向余弦）が (λ, μ, ν) である直線の方程式は, 次式 $(*)$ で与えられることを示し, パラメーター s は点 P_0 から点 (x,y,z) までの有向距離を表すことを示せ.

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = s \qquad (*)$$

(2) 空間内の異なる二点 (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) を通る直線の方程式は, 次式で与えられることを示せ.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

(3) 空間内の一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ から直線 $(*)$ への垂直距離 h は, 次式で与えられることを示せ.

$$h^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \{\lambda(x_1 - x_0) + \mu(y_1 - y_0) + \nu(z_1 - z_0)\}^2$$

(鹿児島大 2005) (m20055403)

0.32 $u = u(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ であるとき，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty u(x,t) dx = 1$ が成り立つことを示せ．ただし，t はパラメータ (> 0) とする.

(島根大 2007) (m20075811)

0.33 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ と点 $(x + dx,\ y + dy)$ の間の無限小長さ ds は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

によって与えられる. さらに, 曲線に沿って $a \leq x \leq b$ の長さ L_1 は, 次の式で与えられる.

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \, dx$$

(1) 曲線がパラメータ t によって

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

のように表されるとき、パラメータ $\alpha \leq t \leq \beta$ に対応する曲線の長さ L_2 が

$$L_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

で与えられることを示せ.

(2) 次のパラメータ t によって表される曲線 $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{1}{3}t^3 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2)$ の長さを求めよ.

(滋賀県立大 2010) (m20106001)

0.34 パラメータ t で表された曲線

$$C \ : \ \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \qquad (0 \leqq \ t \leqq \ 2)$$

の長さ $L(C)$ を求めよ.

(滋賀県立大 2014) (m20146001)