[選択項目] 年度：1991～2023 年　文中：ラプラス

0.1　(1)　関数 $f(t) = \cos(\omega t)$ の（片側）ラプラス変換

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

を求めなさい．ただし，e は自然対数の底で，s はその実数部が正の複素数である．

(2)　$s = c + i\phi$ とおく．ここで，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で，c, ϕ は実数とする．このとき，$G(\phi) = \lim_{c \to +0} cF(c + i\phi)$ を求めなさい．

(北海道大 2009)　　(m20090103)

0.2　実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで，ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1)　$f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2)　$tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3)　$F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4)　$F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100504)

0.3　実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

と定義する．ここで，s は $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である．

以下の問いに答えよ．ただし，関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする．

(1)　$f'(t)$, $e^{-t} f'(t)$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(2)　$\displaystyle\int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\, d\tau$, $\displaystyle e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\, d\tau$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ.

(3)　次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t \int_0^t e^{-\tau} f'(\tau)\, d\tau = e^t$$

をラプラス変換により，s と $F(s)$ を用いて表せ.

(4)　(3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120504)

0.4 $f(t)$, $h(t)$ が下記のように与えられるとき，ラプラス変換を用いて $f(t)$ と $h(t)$ のたたみ込み (convolution) $g(t) = f(t) * h(t)$ を計算せよ．ここに $*$ はたたみ込み演算を表す．

$$f(t) = 1 - at \qquad\qquad h(t) = \exp(at)$$

(東京大 1999)　　(m19990704)

0.5 関数 $f(x)$ のラプラス変換 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ を $L\left[f(x)\right] = F(s)$ と表す.

(1) $L[x]$ を求めよ.

(2) $L\left[e^{ax}f(x)\right] = F(s-a)$ を示せ.

(3) 上記 (2) の定理を用いて, xe^{2x} のラプラす変換を求めよ.

(4) 上記 (2) の定理を用いて, $L\left[2e^{-2x} - xe^{-2x}\right]$ を求めよ.

(東京大 2001)　　(m20010704)

0.6 クーロンポテンシャル $\phi = \dfrac{1}{r}$ は原点以外の領域においてラプラスの方程式　$\Delta\phi = 0$

を満たすことを示しなさい．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(筑波大 2006)　　(m20061303)

0.7 関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ について，以下の設問に答えよ.

(1) 原点を除いた領域において，ラプラス方程式を満足することを示せ.

(2) 広い意味の積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy$ は存在するか．存在するときはその値を求めよ.

(3) 複素数 $z = x+iy$ の関数 $f(x,y) + ig(x,y)$ が，領域 $\mathrm{Re}\, z > 0$ $(x > 0)$ において正則となるように，関数 $g(x,y)$ を定めよ.

(筑波大 2016)　　(m20161318)

0.8 $t < 0$ で $f(t) = 0$ である関数 $f(t)$ のラプラス変換は，以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t) = e^{at}$

(2) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t-\tau)\cos\tau d\tau$

(福井大 2014)　　(m20142426)

0.9 関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \ge \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される.

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい.

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

0.10 (1) 積分方程式

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)d\tau = \theta(t-1)$$

を満たす関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めなさい．

(2) (1) の積分方程式を解きなさい．

(福井大 2018)　　(m20182411)

0.11 関数 $f(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \ (s > 0)$$

について考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t) = \cos^2 t$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[\cos^2 t]$

(2) $f(t) = t\sin at$ $(t \geq 0,$ 定数 $a \neq 0)$ のラプラス変換を求めよ．　$\mathcal{L}[t\sin at]$

(福井大 2020)　　(m20202414)

0.12 2 変数関数 $f(x,y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x,y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x,y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する．

(1) $f = \dfrac{1}{x^2+y^2}$　　(2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008)　　(m20082602)

0.13 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．
ただし，以下の計算では，$(\mathrm{Re}[s] > 0)$ とする．

(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

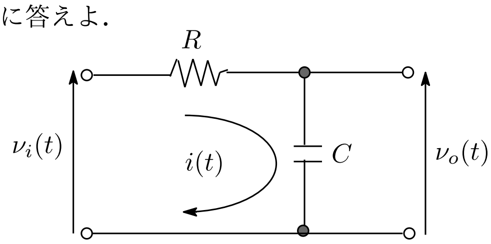
(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．

(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．



(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.14　2 次元ラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．

(2) 関数 $u(x,y) = a\ln(x^2+y^2) + b$ が 2 次元ラプラス方程式を満たすことを示せ．また，境界条件を円 $x^2+y^2=4$ 上で $u=0$，円 $x^2+y^2=9$ 上で $u=5$ としたとき，境界条件を満たすように a と b の値を求めよ．

(名古屋大 2014)　　(m20142801)

0.15　次のラプラスの積分を考える．　$I(a) = \displaystyle\int_0^\infty \exp[-x^2]\cos 2ax\, dx$　以下の問に答えよ．

(1) 平面の直角座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換公式を用いて，x^2+y^2 および $dxdy$ を極座標で表せ．

(2) 積分 $I(0)$ の値は $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ と求められることを，$I(0)^2$ を計算して示せ．

(3) 積分 $I(a)$ の値を求めよ．例えば，$I(a)$ を a に関して微分してみる．

(京都大 2006)　　(m20063304)

0.16　(1) 次の微分方程式を解け．ただし，$x=0$ において $y(0)=0$ とする．

$$\frac{dy(x)}{dx} - 2y(x) - 2e^x\sqrt{y(x)} = 0$$

(2) ラプラス変換を用いて，次の微分方程式を解け．ただし，$t=0$ において $x(0)=-1$ とする．

$$\frac{x(t)}{dt} + 2x(t) - 3\int_0^t x(\tau)d\tau = t$$

(大阪大 2020)　　(m20203502)

0.17　つぎの各問いに答えよ．

(1) 3 変数の関数 $f(x,y,z) = 2x^2z - y^2z^2 + 3x^2y + 4xy$ を考える．このとき，Δf を求めよ．ただし，Δ はラプラス作要素

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

とする．

(2) $g(x,y,z)=x^2-axy^2+bz^2+2xz^2$ とする．$\Delta g=0$ であるような，a,b の値を求めよ．

(大阪府立大 2013)　　(m20133606)

0.18 (1) 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．　$\dfrac{s}{(s^2+3)^2}$

(2) 次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分路 C は $|z+i|=3$ で表される円周上を反時計回りに回るものとする．　$\displaystyle\int_C \frac{z^2-4z}{(z+1)^2(z^2+9)}dz$

(大阪府立大 2020)　　(m20203603)

0.19 次の問いに答えよ．

(1) $\cos\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(2) $e^{at}\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(3) 上記の結果を利用して，方程式

$$\int_0^t f(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau = e^{at}\sin\omega t$$

を満たす関数 $f(t)$ を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014709)

0.20 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \quad , \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y=F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする．

$$f(t)=\begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t|>T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t>0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(b) $f(t)=\cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ．

(c) $f(t)=a+bt$ のラプラス変換が $F(s)=\dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ．

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.21 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \leqq x < \pi)\,, \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ．

(3) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ．

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=F(s-a)$ を示せ．

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds}=\mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s)=\log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.22 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases}-2x-4 & (-2\leqq x<0)\\ 0 & (x=0)\\ 4-2x & (0<x\leqq 2)\end{cases}$$

(2) $t>0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t>0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s)=\dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\mathfrak{L}[1]=\frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t]=\frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.23 $\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2011)　　(m20115102)

0.24 $\cos^2 t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2012)　　(m20125102)

0.25 $f(t)=\sin\omega t$　($\omega\neq 0$ の実数) とするとき，$t\sin\omega t$ のラプラス変換を求めよ．

(大分大 2012)　　(m20125105)

0.26 ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解きなさい．

$$\frac{dx}{dt}+3x=0,\quad x(0)=1$$

(大分大 2013)　　(m20135105)