[選択項目] 年度：1991〜2023 年　 文中：連続

0.1 平面の直交座標 (x,y) と極座標 (r,θ) の間には $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r>0$ とする．$z=f(x,y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009)　　(m20090203)

0.2 $-\infty<x<\infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\exp[-(x-t)^2]dt$, ここで $n=1,2,3,\cdots$,

(ii) $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-x^2]dx=\sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi\, a_n}}\exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ．　$I_n=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994)　　(m19940307)

0.3 範囲 $-\infty<x<\infty$ で連続な関数 $f(x)$ が次の関係式を満たすとする．

$$f(x)=\sin x+x\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt+\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

次の問いに答えよ．

(1) 次の定積分 I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3 の値を求めよ．

$$I_1=\int_0^{\infty} e^{-t}dt\,,\qquad I_2=\int_0^{\infty} te^{-t}dt\,,\qquad I_3=\int_0^{\infty} e^{-t}\sin t\,dt$$

$$J_1=\int_0^{\pi}\cos t\,dt\,,\qquad J_2=\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt\,,\qquad J_3=\int_0^{\pi} t\cos t\,dt$$

(2) 上記の関係式に含まれる 2 つの定積分を，次のように A, B とおく．

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-t}dt=A\,,\qquad \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt=B$$

A, B の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(岩手大 1998)　　(m19980306)

0.4 関数 $f(x) > 0$ は閉区間 $[a, b]$ で微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であるとする．x 軸上に定点 $A(a, 0)$ と動点 $P(x, 0)$ をとる．ただし，$a < x \leq b$ とする．点 A, 点 P において x 軸に垂直な 2 直線と曲線 $y = f(x)$ との交点をそれぞれ B, Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 弧 BQ の長さを求める式を書け．

(2) 曲線 $y = f(x), x$ 軸，直線 AB, 直線 PQ で囲まれた部分の面積と弧 BQ の長さの比が一定値 k であるとき，この曲線の方程式を導け．

(東北大 1994)　　(m19940502)

0.5 実数上の 1 階連続的微分可能関数 $f(x)$ がすべての点 x で $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ を満たすならば，$f(x)$ は定数関数であることを示せ．

(東北大 2008)　　(m20080507)

0.6 z を正の実数とする．実変数の関数 $f(x)$ に対し，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xz} f(x) dx$ が存在するとき，これを $I[f](z)$ と書くことにする．

(1) f が区間 $[0, \infty)$ で連続かつ有界であれば，$I[f](z)$ が存在することを示せ．

(2) a を実数とする．$I[\sin ax](z)$, $I[\cos ax](z)$ をそれぞれ求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120509)

0.7 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定める．

(1) f は $x = 0$ で連続であることを証明せよ．

(2) f は $x = 0$ で何回微分可能か．

(東北大 2015)　　(m20150509)

0.8 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ で連続であることを示せ．

(2) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x, y) dx dy$ の値を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.9 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ.
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k)-g(a,b)-(\alpha h+\beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことをいう.

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.10 $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ をみたすとする．正の整数 n に対し

$$b_n=\int_0^1 f(x)\cos\frac{x}{\sqrt{n}}dx$$

とおくとき，

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}(b_n)^n=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)$$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x\geq 0$ に対し

$$0\leq \cos x-1+\frac{x^2}{2}\leq\frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left|b_n-1+\frac{1}{2n}\int_0^1 x^2 f(x)dx\right|\leq\frac{1}{6n\sqrt{n}}\int_0^1 x^3\left|f(x)\right|dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 α, β に対し

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n\sqrt{n}}\right)^n=e^{\alpha}$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して $(*)$ を結論せよ.

(東北大 2018)　　(m20180511)

0.11 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 f を

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) f は $(0,0)$ において連続であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の閉領域

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\right\}$$

に対し，重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(東北大 2021)　　(m20210510)

0.12 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t), g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} x\log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数を表す.})$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x \log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.})$$

(3) 次の関数の導関数を f, g_1, g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001） (m20010602)

0.13 関数 f は実数の閉区間 $[a,b]$ で連続とし，

$$f_0(x)=f(x), \quad f_n(x)=\int_a^x f_{n-1}(t)dt$$

とおくとき，

$$f_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f(t)dt$$

という式が成立することを，どういう事実を使ったか明確に説明しながら示せ．特に，

(1) $f(x)=c$（定数） (2) $f(x)=e^x$

であるとき，$f_n(x)$ を計算せよ．

（お茶の水女子大 2001） (m20010603)

0.14 (1) 2 変数関数 $g(x,y)$ が 2 回連続微分可能であるとき，それと $x=f_1(r,\theta)=r\cos\theta$, $y=f_2(r,\theta)=r\sin\theta$ の合成関数 $h(r,\theta)=g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について次の等式が成立することを示せ．ただし，$r\neq 0, (x,y)\neq(0,0)$ とする．

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

(2) 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍 $V=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\}$ で 2 回連続微分可能であるとする．次の条件

$$\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)>0\,,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a,b)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(a,b)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b)\right)^2>0$$

を満たすとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極小であることを示せ．すなわち，

$U=\{(x,y)|\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r'\}$ $(r'\leq r)$ があって，$(x,y)\in U-\{(a,b)\}$ ならば

$f(x,y)>f(a,b)$ が成り立つことを示せ．

(お茶の水女子大 2003) (m20030607)

0.15 平面上に正五角形 D と定点 P がある. 点 P を中心として, 半径 r の円の内部にある D の部分の面積を $S(r)$ とするとき, $S(r)$ が連続関数であることを示せ. さらに, $S(r)$ が D の面積の半分となるような r が存在することも示せ.

(お茶の水女子大 2010) (m20100603)

0.16 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ x\cos x & x > 0 \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で連続か？

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能か？ 微分可能ならば導関数を記しなさい．

(3) 関数 $f(x)$ は $x=0$ で何回まで微分可能か？

(お茶の水女子大 2010) (m20100609)

0.17 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$ とするとき，D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f) = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ．また，f が任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) = -f(-x,-y)$ を満たすとき，$I(f)=0$ であることを定義に従って示せ．

(お茶の水女子大 2011) (m20110601)

0.18 以下の各問いに答えよ．

(1) 次の実数値関数の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ が，異なる 2 点 a, b を含む区間で連続であれば

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

となるような点 ξ が 2 点 a, b の間に必ず存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2012) (m20120601)

0.19 $-\infty < a < b < \infty$ とし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で，かつ $f(x) \geq 0$ を満たすものとする．もし $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ であるならば，$[a,b]$ 上の各点 c で $f(c)=0$ であることを示せ．

(お茶の水女子大 2017) (m20170602)

0.20 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．
$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して
$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし，
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする．
このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022) (m20220603)

0.21 0 1 1 0 0 1 0 1 1 . . . のような, 0 と 1 からなる数字列がある. 数字列の先頭から $i+1$ 番目の数字は, 確率 $x(0<x<1)$ で i 番目と同じ数字が現れる. なお数字は, 数字列の先頭を 1 番とする.

(1) 数字列の位置から数えた場合, 同じ数字がちょうど n 個連続してあらわれる確率 $P(n)$ を求めよ.

(2) (1) の場合, 同じ数字が連続する個数の期待値 L を求めよ. ただし,

$$\lim_{n\to\infty} nx^n = 0 \quad (0<x<1)$$

を用いてよい.

(3) 数字列の先頭から j 番目の数字が 0 である確率 Q_j をとするとき, Q_{j+1} を Q_j を用いてあらわせ.

(4) 数字列の先頭が 0 であるとき, Q_j を x, j を用いてあらわせ.

(東京大 2002)　　(m20020705)

0.22 関数 $y(x)$ は, $x=1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x=1$ で極値をとり, $y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ の $x=1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x=1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005)　　(m20050702)

0.23 2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta)=(s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0\le s\le 1)\ ,\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta)=x(1,\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta),\ (0\le\theta\le 2\pi)$$

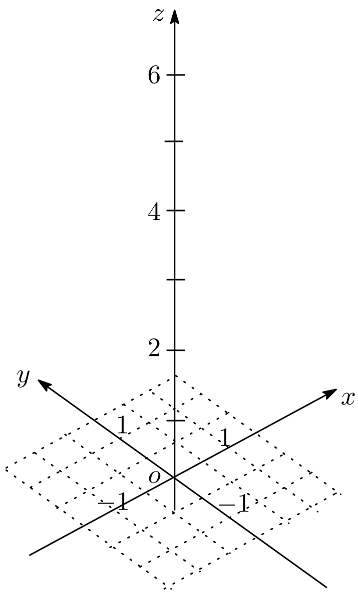
を得る．$\alpha=1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(=y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha=0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha=1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+\log_e\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}+c \qquad （c は積分定数）$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.24　ある定係数 2 階線形常微分方程式が，次のように与えられている．

$$f^{(2)}(x) - 2\alpha f^{(1)}(x) + \alpha^2 f(x) = 0 \qquad (*)$$

$f^{(n)}(x)$ は関数 $f(x)$ の第 n 次導関数であり（n は自然数），α は 0 でない実数定数とする．

以下の問いに答えよ．

(1)　x を変数，k を実数定数とする関数 e^{kx} をマクローリン展開し，x の 3 次の項まで書け．ここで，e は自然対数の底である．

(2)　関数 $f(x)$ は連続で無限回微分可能であり，式 $(*)$ を n 回微分したとき，次の方程式が成り立っているとする．

$$f^{(n+2)}(x) - 2\alpha f^{(n+1)}(x) + \alpha^2 f^{(n)}(x) = 0$$

$f^{(n)}(x)$ を，$f^{(1)}(x)$ と $f(x)$ を用いて表せ．

(3)　関数 $f(x)$ のマクローリン展開式 $f(x) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(0)\frac{x^m}{m!}$ に対し，(2) で得られた $f^{(n)}(x)$ を適用して計算することにより，$f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \left[f^{(1)}(0) - \alpha f(0)\right]xe^{\alpha x}$ と表されることを示せ．ここで，m は 0 以上の整数であり，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ と見なし，$0! = 1$ とする．

(4)　次の微分方程式を，条件 $f(0) = 1$，$f^{(1)}(0) = p - 2$（p は実数定数）のもとで解け．

$$f^{(2)}(x) + 4f^{(1)}(x) + 4f(x) = e^{-2x}$$

(5)　(4) で求めた $f(x)$ について，$f(x) = 0$ が有限の実数解をひとつしか持たないときの p の値を求め，それぞれの p に対する $f(x)$ の極大値を求めよ．

(東京大 2014)　　(m20140701)

0.25　区間 $[-1, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ で，次の 2 条件 (1),(2) を同時に満たす例をあげよ．

(1)　$f(0) = 0$，$f(\frac{1}{n}) = 0$　($n = 1, 2, \cdots$)

(2)　$f(x)$ は 0，$\dfrac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ において微分可能で $f'(0) = 0$，$f'(\frac{1}{n}) = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$

(東京工業大 1997)　　(m19970801)

0.26 極座標系で表された半直線

$\theta = \alpha$,　$\theta = \beta$　$(0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi)$

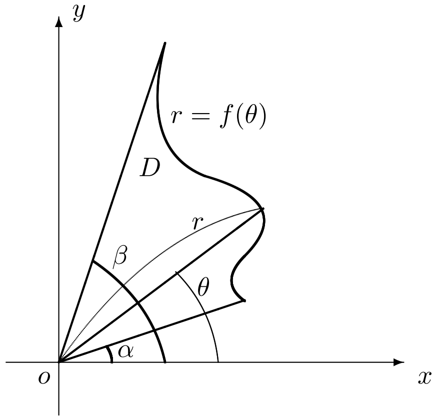
および，連続曲線

$r = f(\theta)$　$(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$

で囲まれた閉領域 D の面積は

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$

で与えられることを示せ.



(東京工業大 2000）　　(m20000802)

0.27 次を示せ.

(1) $\boldsymbol{R}$ 上の実数値連続関数 f が周期 p を持つ周期関数ならば次式が成り立つ.

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt \quad (x \in \boldsymbol{R}) .$$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |\sin nx|dx = \frac{2(b-a)}{\pi} \quad (b > a)$.

(東京工業大 2006)　　(m20060802)

0.28 n を整数として以下の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\, \cos nx\, dx$ を計算せよ.

(2) $f(x)$ を $[0,\ \pi]$ 上の連続関数とする. $f(x)$ が微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であれば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\cos nx\, dx = 0$$

が成り立つことを示せ.（ ここで a は任意の実定数とする.）

(東京工業大 2010)　　(m20100801)

0.29 関数 $f(x)$　$(-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} f'(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 0-} f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ.

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.30 方程式 $\dfrac{dx}{dt} = x + x^2$ の解で，$t = 0$ で $x = \xi$ となるものを $x = \varphi(t,\xi)$ とする.

(1) $x = \varphi(t,\xi)$ の表式を求めよ.

(2) t を固定したとき，$x = \varphi(t,\xi)$ が ξ について連続となるような ξ の範囲を求めよ.

(3) ξ を固定したとき， $x=\varphi(t,\xi)$ が t について連続となるような t の範囲を求めよ．

(4) 特に，$x=\varphi(t,\xi)$ が $-\infty<t<\infty$ において t の連続関数になるためには，ξ はどんな範囲にあればよいか.

(横浜国立大 1996）　(m19961101)

0.31 a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$-\frac{a}{2}<x<\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x)=\frac{1}{a}$$

$$x<-\frac{a}{2} \text{ および } x>\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x)=0$$

と定義する．微分方程式

$$x \neq \pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{d^2y}{dx^2}-y=f(x)$$

$$x=\pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{dy}{dx} \text{ は連続}$$

$$x \to \pm\infty \quad \text{のとき，} \quad y=0$$

について，次の問に答えよ．

(1) 微分方程式の解を $y(x)$ とするとき，$y(-x)=y(x)$ を示せ.

(2) 上記の微分方程式の解を求めよ.

(3) a を 0 に近づけると，解はどのような関数に近づくか？

(横浜国立大 2001)　(m20011101)

0.32 実数値関数 $f(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で連続であり，次の関数方程式を満たすとする.

$$f(x)=1+\int_0^x (t-x)f(t)dt$$

(1) $f(0)$, $f'(0)$ を求めなさい．また $f(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい.

(2) $f(x)$ の満たす微分方程式を解きなさい.

(千葉大 2008)　(m20081204)

0.33 $f(x)=x\ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\ln x$ を求めよ.

(2) $x\geq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y=f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3) x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004）　(m20041308)

0.34 関数 $\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x-2} & x>2 \text{ のとき} \\ b & x\leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$

がすべての点において連続となるように, 定数 a と b の値を決めよ.

(筑波大 2005)　(m20051301)

0.35 $f(x)$ を $x\geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^n f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^{\alpha}$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.36 (1) $g(x)$ が n 回微分可能であるとき
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (xg(x)) = xg^{(n)}(x) + ng^{(n-1)}(x)$　となることを示せ.

(2) $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して
$u_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^x (x-y)^{n-1} f(y)dy$　とおけば
$\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n u_n(x) = f(x)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$　をみたすことを示せ.

(筑波大 2007)　　(m20071308)

0.37 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする．このとき，$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ.

(2) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする．このとき，閉区間 $[a, b]$ で $g(x) > 0$ であるならば，$\dfrac{1}{\int_a^b g(x)dx}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)$
が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ.

(筑波大 2007)　　(m20071311)

0.38 2つの連続な確率変数 $X,\ Y$ の同時確率密度関数が以下に与えられる.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y \quad , & 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

(1) X の期待値を求めなさい.

(2) $X = 0.5$ の時の Y の条件付確率密度関数を求めなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091304)

0.39 連続な導関数をもつ関数 $f(x)$ は, $x \ge 1$ において次の 3 条件を満たすとする.

(a) $f(x) > 0$

(b) $f(x+1) = xf(x)$

(c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ は単調増加する. ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする.

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_1^x \log t\, dt$ を求めよ.

(2) $\log t = \displaystyle\int_t^{t+1} \frac{f'(u)}{f(u)}\, du \quad (t \ge 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式

$$\log \frac{f(x+1)}{f(2)} \ge x \log x - x + 1 \quad (x \ge 1)$$

が成り立つことを示せ.

(筑波大 2010)　　(m20101303)

0.40　送られてきた, 100 個のある機械は, その内 10 個が壊れていることが分かっている. この中からランダムに連続して 2 個取り出すとき, 2 個とも壊れている確率を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101317)

0.41　同時確率密度関数

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(x-y) & 0 \leq y < x \leq 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

をもつ連続な確率変数 X, Y を考える.

(1) X, Y の周辺確率密度関数をそれぞれ求めよ.

(2) X, Y の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(3) X, Y の分散 $V(X), V(Y)$ をそれぞれ求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121309)

0.42　関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & 0 \leq x - [x] < \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \frac{1}{2} \leq x - [x] < 1 \end{cases}$$

で定義する. ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す. $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の, $-1 \leq x \leq 1$ におけるグラフを描け.

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $g(x) \leq 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ.

(4) 自然数 n に対して, $g\left(\dfrac{1}{2^n}\right) = \dfrac{n}{2^n}$ を示せ.

(5) 関数 $g(x)$ は $x = 0$ において微分不可能であることを示せ.

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.43　実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは, 標準的な論理式で書くと

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \left(\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geqq \ n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \right) \right) \qquad (*)$$

が成り立つということである. 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを, $(*)$ にならって理論式で書け.

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け. ただし, その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない.

(3) (2) の内容から, ある正の実数 ε が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geqq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ.

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ. また, 実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ.

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに, 実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら, f は連続であることを証明せよ.

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.44 下の関数 f が $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを，理由を示して答えなさい.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$$

(筑波大 2015)　　(m20151314)

0.45 f を実数全体で定義された実数値関数とする.

(1) 「f は至るところ連続ある」という定義を述べよ.

(2) 「f は一様連続ある」という定義を述べよ.

(3) 関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ.

(4) 関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ.

(筑波大 2016)　　(m20161305)

0.46 関数 $f(x)$ が次式で与えられているとする.

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0)\ , \\ 0 & (x = 0)\ . \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) $n = 2$ のとき，$x = 0$ において f は微分可能であるかを示せ.

(2) $n = 2$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.

(3) $n = 3$ のとき，$f'(x)$ は $x = 0$ で連続であるかどうかを示せ.

(筑波大 2016)　　(m20161311)

0.47 次の関数 $f(x)$ について，以下の設問に答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} x\dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

(1) すべての実数 x において連続となる a に関する条件を求めよ.

(2) 上記 (1) の条件のもとで，$x = 0$ における微分可能性を調べよ.

(3) 上記 (2) において微分可能である場合は $f'(0)$ を求めよ．　微分可能ではないが，右側微分係数 $f'_{+}(0)$，左側微分係数 $f'_{-}(0)$ が存在する場合は，それぞれを求めよ．ただし，存在しない場合は，“ 存在しない ” と答えること.

(筑波大 2016)　　(m20161317)

0.48 以下の関数 $f(x, y)$ が原点 $(x, y) = (0, 0)$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ.

(1) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{y} & (y \neq 0) \\ 0 & (y = 0) \end{cases}$

(2) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$

(筑波大 2017)　　(m20171308)

0.49　$E = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right) \frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x, y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x, y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.50　(1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.51　Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ , \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx} f(x_n) \neq 0$ とする．　次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する．　解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n = 0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x) = 0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x) = 0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x) \neq 0$ かつ $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.52　関数 f を

$$f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f は原点 $x=0$ で連続である．その理由を答えよ．

(2) f の原点 $x=0$ 以外の導関数を求めよ．

(3) f の原点 $x=0$ での微分係数を定義に従って求めよ．

(4) f の導関数 f' が原点 $x=0$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(筑波大 2018)　　(m20181310)

0.53　$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている．

(1) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する」の定義を述べよ．

(2) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する」の定義を述べよ．

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ．

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする． すべての $n=1,2,\cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば，$f(x)$ も連続関数であることを示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181321)

0.54　(1) $f(x)$ は $x\geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon>0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\log\frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2}dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.55　(1) 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\pi}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続であり，$f(x)>0$ $(x\in[0,1])$ とする．このとき，以下の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

(筑波大 2021)　　(m20211304)

0.56 確率変数 X について，その平均 $\mu = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合，定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ．

(2) $E(X) = 2$，$E(X^2) = 9$ のとき，(1) の結果を用いて，$-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ．

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_{16} が正規分布 $N(2, 4)$ からの無作為標本であるとき，標本平均 $\overline{X}$ に対して $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を求めよ．さらに，(1) を用いて $|\overline{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し，両者を比較せよ．

付表 1 標準正規分布表：$Q = \displaystyle\int_0^z \phi(t)dt$，但し，$\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数　（省略）

付表 2

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

(筑波大 2021)　　(m20211313)

0.57 実数 α に対し，$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ x^\alpha \sin \dfrac{1}{x} & (x > 0) \end{cases}$ とおく．

(1) $\alpha > 1$ のとき，$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で微分可能であることを示せ．

(2) $\alpha \leq 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3) $\alpha > 1$ のとき，$f'(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で連続となる α の範囲を求めよ．

(埼玉大 2003)　　(m20031402)

0.58 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする．

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq 0 \text{ であり，} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ である．}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ．

- f は区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数である．
- すべての $x \in [0, \infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である．
- $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx < \infty$ である．
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない．

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.59 (1) 区間 $(0, 1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\, dx = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ．

(2) 区間 $[1, \infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^\infty |g(x)|\, dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\leq x<\infty} |g(x)| = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ．

(埼玉大 2010)　　(m20101404)

0.60 (1) $x = x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(2) 関数 $f(x), g(x)$ があり，それぞれ $F(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx$ ，$G(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき，次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z - x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして，これを，$F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$ とする．

(埼玉大 2014) (m20141403)

0.61 今，手元にトランプがある．以下の問いに答えよ．

(1) トランプの数字の札 10 枚と絵札 2 枚を取り出す．これを裏返しにして，無作為に 1 列に並べるとき，両端が絵札となる確率はいくつか.

(2) トランプの 4 つの組（スペース, クラブ, ハート, ダイヤ）の札が 5 枚ずつ取り出されている．これをよく切ったとき，スペードの札が 5 枚連続している確率はいくつか.

(群馬大 2007) (m20071505)

0.62 以下の問いに答えよ.

(1) アルファベットを，$AABABCABCDABCDEAB\cdots$ のように並べるとき，初めて J が表れるのは 1 番目の A から数えて何文字目か.

(2) $10! = 10\times\ 9\times\ 8\times\ 7\times\ 6\times\ 5\times\ 4\times\ 3\times\ 2\times\ 1 = 3628800$ のように，10 の階乗を表す整数の末尾には連続する 0 が 2 個ある．では，5000 の階乗を表す整数の末尾に連続する 0 は何個あるか.

(3) 1 から 10000 の整数のうち，3 または 5 または 7 の倍数である整数は何個あるか.

(群馬大 2013) (m20131504)

0.63 (x, y) を平面上の直交座標，(r, θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x, y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u} = (a, b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す.

(1) 関数 $f(x, y) = r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u} = (\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p}) = a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}) + b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ.

(茨城大 2007) (m20071706)

0.64 $f(t)$ を $[0, \infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a, b は $a, b > 0$ を満たす実数とし，$g(x, y) = f(a^2x^2 + b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ.

(1) $f(t)$ が $[0, \infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ.

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[\,0,\ 1\,] \times \left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.65 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．a を 0 でない定数として

$$z = f(x+ay)$$

と定める．以下の各問に答えよ．

(1) 次の等式を示せ．

$$\frac{\partial z}{\partial y} - a\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

(2) $z = f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.66 実 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

を考える．以下の各問に答えよ．

(1) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の連続性を調べよ．

(2) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の偏微分可能性を調べよ．

(3) 原点 $(0,0)$ における $f(x,y)$ の全微分可能性を調べよ．

(4) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$ とする．
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201701)

0.67 関数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で 2 回連続微分可能（すなわち，2 次までの偏導関数がすべて存在し，かつ連続）で，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ かつ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ を満たしているとする．このとき，次の小問 (1) および (2) に答えよ．

(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$w(x, y) = xu(x, y) - yv(x, y)$ とおく．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(茨城大 2021)　　(m20211702)

0.68 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において，実関数 $f(x)$ が微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする．このような $f(x)$ を用いて，a_n（但し，n は自然数）が次式で定義されているとき，以下の小問に答えよ．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき，微分の定義に従って，導関数 $f'(x)$ を導け．

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $f(x) = x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.69 2 つの箱 A, B があって，箱 A には赤玉 1 個と白玉 5 個，箱 B には赤玉 5 個と白玉 1 個が入っている．このとき，以下の問に答えなさい．

(1) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したとき，その玉が赤玉である確率を求めなさい．

(2) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出し, 元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出す．このとき，2 回連続して赤玉である確率を求めなさい．

(3) 任意に箱を選んで 1 個の玉を取り出したら赤玉であった．その玉を元の箱に戻し，もう一度同じ箱から玉を取り出したとき，赤玉である確率を求めなさい．

(山梨大 2018)　　(m20181805)

0.70 連続な確率変数 X の確率密度関数 $p(x)$ が次の式で与えられている．

$$p(x) = \begin{cases} 0 & for\ \ x \leq -1 \\ 2(1+x)/3 & for\ \ -1 \leq x \leq 0 \\ (2-x)/3 & for\ \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & for\ \ 2 \leq x \end{cases}$$

(1) この確率分布に対して，平均値 m と分散 σ^2 を求めよ．

(2) 不等式 $P(|X - m| \geq 1) \leq \sigma^2$ がこの確率密度関数に対して成立することを示せ．
なお $P(|X - m| \geq 1)$ は確率変数 X が平均値より 1 以上離れている事象の確率である．

(山梨大 2018)　　(m20181808)

0.71 互いに独立な確率変数 X と確率変数 Y が区間 $(0,\ 1)$ で一様連続分布に従う．確率変数 Z がこれらの和 $Z = X + Y$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) Z の値 z が 1 より小さいとき，確率密度関数は $p(z) = z$ であることを示せ．

(2) Z の値 z が 1 より大きいとき，確率密度関数は $p(z) = 2 - z$ であることを示せ．

(3) Z の平均値，分散を求めよ．

(山梨大 2019)　　(m20191808)

0.72 連続的な確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられたとする.

$$f(x) = \begin{cases} ax(6-x) & (0 \leq x \leq 6) \\ 0 & (x < 0,\ x > 6) \end{cases}$$

(1) 定数 a の値を求めよ.

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散値 $V(X)$ をそれぞれ求めよ.

(山梨大 2020) (m20201803)

0.73 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ 上で 2 回連続微分可能な関数であり, $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)| \leq M \ \ (x \in [a,b])$ を満たすとする. このとき, $|f(x)| \leq M(b-a)^2 \ \ (x \in [a,b])$ となることを示せ.

(信州大 2003) (m20031904)

0.74 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t) = (f(t), g(t))$ で与えられている. 但し, $f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[0,1]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり, それらの導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ は同じ開区間で連続である.

さて, 動点 P が時刻 $t=0$ に原点 $O(0,0)$ を出発して時刻 $t=1$ に点 $A(1,1)$ に到着するとせよ. このとき, 途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t) = (f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ.

(信州大 2007) (m20071904)

0.75 $xy-$ 平面上の連続関数 $f(x,y)$ を考える. f の 1 階偏導関数 $f_x(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ および $f_y(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ はともに $xy-$ 平面上で連続であるとする. このとき, ある $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ が存在し,
$-f_x(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\sin\theta_0 + f_y(\cos\theta_0, \sin\theta_0)\cos\theta_0 = 0$ となることを示せ.

(信州大 2008) (m20081903)

0.76 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ を示せ.

(2) $f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上で定義された連続関数とする. このとき,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-1/n}^{1/n} |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = |f(0)| \qquad \text{となることを示せ.}$$

(信州大 2008) (m20081904)

0.77 平面内の領域 $D = \{(x,y) \,|\, (x,y) \neq (0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して,
$\triangle f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$ と定める. また, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \ \ (r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ とし,
$z = f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, 領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらはすべて連続である.

(1) z_r, z_θ を r, θ, f_x, f_y を用いて表せ.

(2) $z_{rr} + \dfrac{1}{r} z_r + \dfrac{1}{r^2} z_{\theta\theta} = \triangle f$ を示せ.

(3) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \log(x^2+y^2)$ のとき, $\triangle f(x,y)$ を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする;

(信州大 2016) (m20161901)

0.78 $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x-a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである. いま ε, a が与えられたとして, 関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ.

(信州大 2018) (m20181905)

0.79 閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0,1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0)=f(1)=0$

(ii) すべての $0<x<1$ に対して

$$(1-x)f'(x)=1-x-2x\int_1^x \frac{f(t)}{t^3}dt-\frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.80 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される．

P ： 任意の $\varepsilon>0$ に対し，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ となる任意の x に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) 命題 P の否定を書け．

(2) $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}\,, & x\neq 0\\ 0\,, & x=0\end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x=0$ で連続ではないことを証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.81 (1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$$

(2) $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D を $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0\le x+y\le 1,\ 0\le x-2y\le 1\right\}$ で定めるとき，2 重積分

$$\iint_D (3x+2y)dxdy$$

の値を求めよ．

(3) f は $[0,1]$ 上の実数値連続関数で，$\displaystyle\int_0^1 |xf(x)|dx<\infty$ であるとする．このとき，次の関数が $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

$$g(x):=\int_0^1 \cos(xy)f(y)dy$$

(信州大 2020)　　(m20201906)

0.82 関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ．

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ.

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ.

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.83 閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間上で定義された実数値関数 $f(x)$ が 2 回連続微分可能で，任意の点 $x \in [a,b]$ において，$f''(x) \geq 0$ とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 任意の $c \in [a,b]$ に対して，次の不等式が成立することを証明せよ.

$$(b-c)f(a) + (c-a)f(b) \geq (b-a)f(c)$$

(2) (1) の不等式で，真に不等号 $>$ が成立するのはどんな場合か.

(3) 上の結果を用いて，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ となることを示せ.

(新潟大 1999)　　(m19992001)

0.84 次の問いに答えよ.

(1) どんな無理数 p に対しても，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = p$ となるものが存在する．その理由を述べよ.

(2) どんな有理数 q に対しても，無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = q$ となるものが存在する．その理由を述べよ.

(3) 関数 f を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x & (\ x \text{ が無理数のとき }) \\ 0 & (\ x \text{ が有理数のとき }) \end{cases}$$

このとき，f の連続性を述べよ.

(新潟大 2000)　　(m20002001)

0.85 実変数の実数値関数 $f(x)$ を　$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \ x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & , \ x = 0 \text{ の場合} \end{cases}$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ となることを示せ.

(2) $x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ.

(2) $f'(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ を求めよ.

(4) $f'(x)$ は $x=0$ で連続でないことを示せ.

(3) $F(x,y) = f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ.

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.86 $f(x)$ を連続関数とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)dt$ を求めよ.

(2) 次の等式が成り立つような $f(x)$ を求めよ.

$$-f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

(長岡技科大 1998)　　(m19982103)

0.87 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

により計算される．このことを利用して以下の問に答えよ．ただし，$j=\sqrt{-1}$ であり，ω [rad/s] は角周波数を表す．また，a は正の実数とする．

(1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0<t<a \\ 0 & , \quad t<0,\ t>a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．ただし，$|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する．

(2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t>0 \\ 0 & , \quad t<0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，$f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ．

(3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ．

(4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a>0$ に対して $\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ．

(長岡技科大 2006) (m20062105)

0.88 赤玉 2 個と白玉 5 個をでたらめに 1 列に並べる．以下の問いに答えなさい．

(1) 5 個の白玉が連続する確率を求めなさい． (2) 2 の赤玉がとなり合わない確率を求めなさい．

(長岡技科大 2007) (m20072101)

0.89 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ の値を求めなさい．

(2) 区間 $[a,b]$ における連続関数 $f(x)$ の定積分 $S=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値を求めたい．$[a,b]$ を幅 $\dfrac{b-a}{n}$ の小区間に n 等分し，その分点を $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$ とする．各小区間上に作られる台形の面積の和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_{k-1})+f(a_k)}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$ を S の近似値とする．この近似法を台形公式という．区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ を 3 等分して，台形公式による $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ の近似値 S_3 を求めなさい．

(長岡技科大 2007) (m20072104)

0.90 次のことを示せ．

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ とする． $f(x)$ は連続でない．

(2) $f(x) = \begin{cases} x^{m} & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$ とする． $m\geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である．

(3) 数列 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ は有界である．

(金沢大 1999) (m19992201)

0.91 関数 $f(t)$ は 2 回連続的微分可能で， $f(t), f'(x), f''(x)$ は有界とする．

$s>0$ に対して $g(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f''(x)\,dt = s^2g(s)-sf(0)-f'(0)$ を示せ．

(2) ω は定数とする． $f(t)=\sin\omega t$ のとき， $g(s)$ を求めよ．

(金沢大 1999)　　(m19992212)

0.92　関数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(2+\cos x)}{x-\pi} & (x \neq \pi) \\ 0 & (x = \pi) \end{cases}$ について, 次の問に答えよ.

(1)　$f(x)$ は $x = \pi$ で連続であるかどうか調べよ.

(2)　$x = \pi$ での $f(x)$ の微分係数 $f'(\pi)$ は存在するか. 存在するときにはその値を求め, 存在しないときにはその理由を述べよ.

(金沢大 2005)　　(m20052206)

0.93　次のことを示せ.

(1)　$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない.

(2)　$f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする．$m \geq 3$ ならば, $f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2007)　　(m20072209)

0.94　$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)〜(3) を示せ,

(1)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1$.

(2)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3)　任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013)　　(m20132203)

0.95　関数 $f(x, y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定める．次の問い (1)〜(3) に答えよ.

(1)　x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ.

(2)　偏導関数 $f_x(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で不連続であることを示せ.

(3)　$f(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であることを示せ.

(金沢大 2013)　　(m20132204)

0.96　関数 $\varphi(x) = x\log x$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ.

(1)　$\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$ を求めよ.

(2)　テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ.

(3)　(2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ.

(4) 閉関数 $[0,1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq\ 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.97 実数 ℓ に対して，連続関数 $f_\ell\ :\ (-\pi,\ \pi) \to \boldsymbol{R}$ を

$$f_\ell(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin \ell\theta}{\sin\theta} & (\theta \neq 0), \\ a & (\theta = 0) \end{cases}$$

と定める．次の問いに答えよ.

(1) a を求めよ.

(2) f_ℓ は $\theta = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_\ell(\theta)d\theta$ の値を $\ell = 2, 3$ の場合に求めよ.

(金沢大 2014)　　(m20142208)

0.98 次のことを示せ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とする．$f(x)$ は連続でない.

(2) $f(x) = \begin{cases} x^m & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$ とする．$m \geq 3$ ならば，$f'(x)$ は微分可能である.

(金沢大 2016)　　(m20162213)

0.99 流体の密度を $\rho(x,y,z,t)$，速度を $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ とする．　湧き出しも吸い込みもないとき，　連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つことを示しなさい.

(金沢大 2017)　　(m20172210)

0.100 (1) 任意の非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次の関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

(3) (2) の関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上で 2 回微分可能であり，2 階導関数 $f''(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(金沢大 2018)　　(m20182203)

0.101 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次式で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x^2}{4}\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め, $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値をとり, かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 0$ のときに限ることを示せ.

(金沢大 2019) (m20192206)

0.102 $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6xy^2}{2x^2+3y^2}\ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ.

(3) $f(x,y)$ が点 $(0,0)$ で全微分可能であるかどうか調べよ.

(金沢大 2020) (m20202203)

0.103 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する.

$$D = \left\{ (x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x \right\}$$

以下の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 関数 $g(x,y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は, D 上の連続関数であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2y^2}{\cos^6 x}dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2022) (m20222202)

0.104 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(2) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における 1 階偏微分係数を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の点 $(0,0)$ における全微分可能性を調べよ.

(富山大 2005) (m20052309)

0.105 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)\ \in \mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．$f_1,\ f_2\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし，$f\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2) = (f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))\ \ \big((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\big)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ．

(富山大 2014)　　(m20142309)

0.106 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の (a)，(b) は同値であることを示せ．

(a) $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である．

(b) x_0 に収束する任意の実数列 $\Big\{y_n\Big\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ である．

(富山大 2015)　　(m20152302)

0.107 xy 平面上の原点 O と 3 点 $A = (1, 0)$，$B = (1, 1)$，$C = (0, 1)$ からなる正方形がある．関数 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$，$y = f_3(x)$ が，ともに原点と点 B を通り，かつ $0 \leq x \leq 1$ で連続であるとするとき，これらの 3 つの関数で正方形の面積を 4 等分したい．3 つの関数を示せ．

(福井大 2013)　　(m20132420)

0.108 実関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を，“ 極限 ”という言葉を使わずに，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて書きなさい．

(岐阜大 2005)　　(m20052610)

0.109 実変数 x, y の関数 $f(x, y)$ が，その定義域 D において（連続な 2 階偏導関数をもち，）
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$　を満たすとき，$f(x, y)$ を（D における）調和関数という．以下の問いに答えよ．ただし，以下では定義域 $D = R^2$ とする．

(1) $f(x, y) = x^3 - axy^2$ が調和関数であるように，定数 a を求めよ．

(2) ある関数 $f(x, y)$ が調和関数であるとき，　$g(x, y) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$　で定義される $g(x, y)$ も調和関数であることを示せ．ただし，関数 $f(x, y)$ は何回でも微分可能であるとする．

(岐阜大 2006)　　(m20062614)

0.110 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ．

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{1\quad} - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{2\quad}}{h}$$

ここで，$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{3\quad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{4\quad}}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \boxed{5\quad}$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし，$x > 0$ とし，また自然対数を $\log$ で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7} = \boxed{8} + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{9} + 1$$

この式から，y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.111 曲線 $y = x^3 - 2x^2 + 3$ について答えよ．

(1) $y = x + 1$ の条件の下で，この曲線の y 座標が最大となる点の座標を求めよ．

(2) x の閉区間 $[-1, 2]$ に対して，平均値の定理が成立する点の x 座標をすべて求めよ．

[平均値の定理] $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能ならば，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

であるような c が (a, b) の中に少なくとも一つ存在する．

(豊橋技科大 2003)　　(m20032704)

0.112 箱の中に 7 本の「はずれ」と 3 本の「当たり」が入っているくじがあう．以下の設問に答えよ．なお，1 回につき，くじは 1 本引くものとする．　また，特に断らない限り，続けてくじを引く場合，一度引いたくじは箱の中に戻すものとする．

(1) このくじを 1 回引いて，当たりが出る確率を求めよ．

(2) このくじを 3 回引いて，1 回も当たりが出ない確率を求めよ．

(3) このくじを 3 回引いて，1 回以上当たりが出る確率を求めよ．

(4) このくじを 3 回引いて，1 回だけ当たりが出る確率を求めよ．

(5) このくじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(6) 一度引いたくじを箱の中に戻さないようにする．このとき，くじを 3 回引いて，3 回連続で当たりが出る確率を求めよ．

(豊橋技科大 2018)　　(m20182701)

0.113 5 個の白い玉と 3 個の赤い玉が入っている袋がある．この袋から無作為に玉を取り出すとき，以下の問いに答えよ．ただし，答が分数となる場合は既約分数で求めよ．

(1) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個の玉の色が異なる確率を求めよ．

(2) 袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，2 個とも白い玉である確率を求めよ．

(3) 袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき，3 個とも同じ色の玉である確率を求めよ．

(4) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき，赤い玉が隣り合わない並び方になる確率を求めよ．

(5) 袋から 1 個ずつ全部の玉を取り出し，取り出した順に円形に並べるとき，赤い玉が 3 個連続して並ぶ確率を求めよ．

(豊橋技科大 2020)　　(m20202702)

0.114 $f(x), g(x)$ を区間 $[a,b]$ 上の連続関数とするとき，$[a,b]$ における部分積分法を $f(x), g(x)$ を用いて説明せよ．次に，$[0,1]$ における $x\log(1+x)$ の定積分の値を求めよ．

(名古屋大 2000)　　(m20002802)

0.115 赤玉が r 個，白玉が w 個入っているつぼの中からランダムに一つの玉を取り出し，取り出した玉と同色の玉を c 個加えて一緒に戻すという試行を繰り返すことを考える（一回の試行終了後には玉が c 個増えることになる．ただし，r, w, c は全て正整数で，赤玉が出るという事象を R，白玉が出るという事象を W とする．二つの事象 A, B がこの順番に連続して起こる確率を $P\{AB\}$，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付確率を $P\{AB|A\}$ と表す．以下の確率を求めよ．

(1) 1 回目に赤玉を取り出す確率 $P\{R\}$.

(2) 1 回目に赤玉が出たという条件のもとで，2 回目に赤玉が出る条件付確率 $P\{RR|R\}$.

(3) 上記条件のもとで，3 回目に白玉が出る条件付確率 $P\{RRW|RR\}$.

(4) 3 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{RRW\}$.

(5) n 回目に初めて白玉が出る確率 $P\{R^{n-1}W\}$.

(名古屋大 2003)　　(m20032803)

0.116 原点と正規直交する基底ベクトル $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ をもち，それぞれの基底ベクトルに対応する座標を x, y, z とするユークリット空間を考える．また，演算子 ∇ を $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$ と定義する．

(1) $V = xy(x^2+y^2+z^2)$ とする．∇V を基底ベクトルと x, y, z を用いて表せ.

(2) 以下に示す $\overrightarrow{f}$ に対して，$\nabla W = \overrightarrow{f}$ となるスカラー関数 $W(x,\ y,\ z)$ が存在するかを考える．ここで，W の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0)=0$ とする．W が存在するならばそれをひとつ示し，W が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\overrightarrow{f} = (2x+yz)\overrightarrow{e}_x + (2y+zx)\overrightarrow{e}_y + (xy+1)\overrightarrow{e}_z$

(ii) $\overrightarrow{f} = (2x+yz)\overrightarrow{e}_x + (2y+z)\overrightarrow{e}_y + (xy+1)\overrightarrow{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

0.117 x の連続関数 y は次の等式を満たすとする．

$$y = -1 + \int_1^x (t - y(t))dt$$

(1) y は微分可能であることを示せ.

(2) y を求めよ.

(名古屋工業大 2001)　　(m20012905)

0.118 確率分布が以下の (1),(2) の場合について，確率変数 X の定める分布関数 $F(x)$ と $\alpha > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x) - F(x-\alpha)\}\,dx = \alpha$$

が成り立つことを示せ.

(1) $P(X=0) = p > 0,\ P(X=1) = q > 0,\ p+q=1$ の場合.

(2) 確率変数 X が連続型で，密度関数 $f(x)$ をもつ場合.

（愛知県立大 2000）　　(m20003004)

0.119 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$, $x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.120 任意の x に対して (1)，(2) を満たす関数 $f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle f(x)=x^2+\int_0^x f(t)\,dt$　　ただし，$f(x)$ は連続関数とする．

(2) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x+\int_0^x tf(x-t)\,dt$　，　$f(x)>0$　　ただし，$f(x)$ は微分可能な関数とする．

(三重大 2022)　　(m20223114)

0.121 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は，直交座標系の x,y,z 軸方向の単位ベクトルである．また，$\boldsymbol{r}$ の大きさを $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) r のこう配，∇r を求めよ．ただし，$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ である．∇r は，$\mathrm{grad}\,r$ とも書く．

(2) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\nabla\times\ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$$

を求めよ．ただし，$\phi(\boldsymbol{r})$ は連続な 2 階偏導関数を持つスカラー関数である．また，$\nabla\times\ (\nabla\phi(\boldsymbol{r}))$ は $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}))$ とも書く．

(奈良女子大 2008)　　(m20083208)

0.122 A を連続微分可能なベクトル場，$f(x,y,z)$ を連続微分可能な関数とするとき，以下の関係式を証明せよ．ただし，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, $r=|\boldsymbol{r}|$ である．

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\ \nabla f(x,y,z))=0$

(2) $(A\cdot\nabla)A=\dfrac{1}{2}\nabla(|A|^2)-A\times\ (\nabla\times\ A)$

(3) $\nabla\cdot\left(\dfrac{A\times\ \boldsymbol{r}}{r}\right)=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\ A)}{r}$

ここで，

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

である．必要なら，以下の関係式を用いてよい．

(a) $\nabla\cdot(fA)=(\nabla f)\cdot A+f\nabla\cdot A$

(b) $\nabla\times(fA)=(\nabla f)\times A+f\nabla\times A$

(c) $\nabla(A\cdot B)=A\times(\nabla\times B)+B\times(\nabla\times A)+(B\cdot\nabla)A+(A\cdot\nabla)B$

(d) $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$

(奈良女子大 2013)　　(m20133207)

0.123 関数 $f(x), g(x)$ 区間 $[a, b]$ において連続で，かつ $g(x) > 0$ であるとする．このとき，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

をみたす ξ が区間 $[a, b]$ 内に存在することを示せ.

(京都大 2006)　　(m20063302)

0.124 D を複素平面上の単連結な開集合とする. 複素関数 $f(z)$ は D 上で正則であり, D 上で零点を有しないとする. D 上の一点 z_0 において $\arg f(z_0)$ を定めることにより, 関数 $u(x, y) = \arg f(z)$ を D 上の連続関数として定めることができる. ここに, x, y は, それぞれ z の実部, 虚部である. このとき, $u(x, y)$ は D において調和関数であることを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103306)

0.125 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり，次式で定義される曲線 C を考える.

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに，a, b は正の数であり，$a \neq b$ を満たすものとする．このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は，次式を満たす連続関数であるとする.

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき，$\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

(2) $a = 2$, $b = 1$ のとき，C の概形を描け．また $\Phi(0) = 0$ であるとき，$\Phi(2\pi)$ を求めよ.

(3) $a = 2$, $b = 1$ のとき，次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.126 $a < b$ として，区間 $[a,\ b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x \mapsto f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とすると,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)\ , \quad a < c < b$$

となる c が存在することを示せ.

(京都大 2017)　　(m20173306)

0.127 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す.

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ.

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ．

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ が存在することを示せ．

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.128 2 変数関数 $z = f(x, y)$ は，2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらがすべて連続であるとする．x, y が別の 2 変数 u, v の関数として　$x = u - v$, $y = u + v$

と表されるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$ を $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2002)　　(m20023405)

0.129 連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083405)

0.130 a を実数とする．実数全体で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

を満たし，$x = 0$ で連続であるとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．さらに，$f'(0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183403)

0.131 関数 $z = f(x, y)$ は C^2 級であるとする．x, y が別の 2 変数 s, t の関数であり，

$$x = 2\cos s + 3\sin t\,, \qquad y = 4\sin s + 5\cos t$$

と表されているとする．$(s, t) = \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ のときの x, y の値をそれぞれ p, q とする．ただし，関数 $f(x, y)$ が C^2 級であるとは，$f(x, y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して, それらが連続であることである．

(1) x, y の s, t に関する 1 階偏導関数をすべて求めよ．

(2) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial z}{\partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_x(p,q)$ および $f_y(p,q)$ を用いて表せ.

(3) z を s, t の関数と見なしたとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ を $f_{xx}(p,q)$，$f_{xy}(p,q)$ および $f_{yy}(p,q)$ を用いて表せ.

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193403)

0.132 区間 $I = [-\pi, \pi]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \ , \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

とするとき，次の問に答えよ.

(1) $|a| < 1$ なる実数 a に対して

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \cos jx$$

としたとき

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} R(k)$$

を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ が I で非負であるとき

$$|R(k)| \leq R(0) \ , \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 1996）　　(m19963502)

0.133 関数 $a(t)$, $b(t)$ はある区間 I で連続であり，関数 $x_1(t) \neq 0$ は 2 階線形常微分方程式

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$$

の区間 I における解である．このとき

(1) 下の関数 $x_2(t)$ もまた区間 I における解であることを示せ.

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\{x_1(\tau)\}^2} \exp(-\int_{t_0}^{\tau} a(s) ds) d\tau.$$

(2) 2 つの解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は互いに独立であることを示せ.

(大阪大 2001)　　(m20013503)

0.134 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を　$g(x) = \displaystyle\int_0^x t f(x-t) dt$
で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ.

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ.

(2) $f(x) = \cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ.

(3) $f(0) > 0$ のとき，$g(x)$ は $x = 0$ で極小値をとることを示せ.

(大阪大 2003)　　(m20033501)

0.135 次の 2 階線形常微分方程式を考える：

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \qquad (*)$$

ここで，$a(t), b(t)$ は実軸上で定義された有界な連続関数とする．このとき次の問に答えなさい.

(1) x_1, x_2 を $(*)$ の解とし，これらに対して関数 J を

$$J(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) \end{bmatrix}$$

と定める．このとき J は次の 1 階常微分方程式を満足することを示しなさい:

$$J'(t) = -a(t)J(t).$$

(2) 上記 (1) と同様に，x_1, x_2 を $(*)$ の解として，さらに

$$J(0) = \det \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ {x_1}'(0) & {x_2}'(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

と仮定する．このとき，任意の t において，2 つのベクトル $(x_1(t), {x_1}'(t))$, $(x_2(t), {x_2}'(t))$ は 1 次独立となることを示しなさい．

(3) x_1, x_2, x_3 を $(*)$ の 3 つの解とする．このとき，任意の t で

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ {x_1}'(t) & {x_2}'(t) & {x_3}'(t) \\ {x_1}''(t) & {x_2}''(t) & {x_3}''(t) \end{bmatrix} = 0$$

であることを示しなさい．また，ある 3 つの実数の組 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ があって，任意の t で

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063508)

0.136 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める： $a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \cdots .$

このとき $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ を示しなさい．また $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$ であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して， $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$ が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt \right|^2 dt = 0$ となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.137 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t) \, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010) (m20103509)

0.138 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx\, dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p(mx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(大阪大 2011) (m20113510)

0.139 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I (\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える.

条件 1 ： $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big| f_k(x) \Big| < \infty, \qquad x \in I$

条件 2 ： $\displaystyle\max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ.

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ.

(大阪大 2014) (m20143506)

0.140 (1) ある病気の検査をすると，この病気の罹患者が陽性（その病気である）と判定される確率は 2/3 である．一方，非罹患者が誤って陽性と判定される確率は 1/3 である．また，母集団に対してこの病気に罹患している割合は 1/10 とする．

(a) この母集団から無作為に選ばれた A さんが，検査により陽性と判定された．このとき，A さんがこの病気に罹患している確率を求めよ．

(b) A さんが同じ検査を何度も受ける．このとき，最低何回連続して陽性と判定されると，A さんの罹患確率が 9/10 以上となるか求めよ．ただし，この検査により陽性と判定されるかどうかは，検査ごとに互いに独立であるとする．

(2) 農作物 A, B の収穫量は，その年の夏の暑さのみに依存して変動する．A の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 20 トン，平年並みの場合は 8 トン，冷夏の場合 0 トンとなる．B の単位面積あたりの収穫量は，猛暑の場合 0 トン，平年並みの場合は 10 トン，冷夏の場合 38 トンとなる．来年の夏が猛暑，平年並み，冷夏となる確率がそれぞれ 1/2, 1/4, 1/4 と予想されている．

(a) 来年の A と B の単位面積あたりの収穫量の期待値と分散をそれぞれ求めよ．

(b) 暑さに左右されず，安定した収穫量が得られるように A と B の作付面積の比を決定したい．いま，総作付面積のうち，A を作付ける割合を x，B を作付ける割合を $1-x$ とするとき，単位面積あたりの A と B をあわせた収穫量の期待値と分散を求めよ．また，分散が最も小さくなる割合 x を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193504)

0.141 (1) 次の (1-1),(1-2) で与えられる，周期 2π の関数のフーリエ級数をそれぞれ求めよ．すなわち，$f(x)$ が連続な点で

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\}$$

が成り立つような

$$a_n \quad (n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

をそれぞれ求めよ．

(1-1) $f(x)=\cos^2 x+\cos x$

(1-2) $f(x)=x \quad (-\pi<x\leqq\pi)\,, \quad f(x+2\pi)=f(x)$

(2) (1) の結果を利用して，等式

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

を示せ．

(大阪大 2019)　　(m20193510)

0.142 (1) 関数 $y=y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy+(1+x^2)^2+y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z=z(x)$ を

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0)=0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)|=\lim_{x\to b-0}|y(x)|=\infty$$

を満たしている．このような a, b を求めよ．

(4) 関数 $u = u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx} = 2xu + (1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2+u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0)=0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223509)

0.143 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を求め，それらが原点で連続かどうか調べよ．

$$f(x,y) = xy\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

（神戸大 2001） (m20013804)

0.144 $r : [a,b] \longrightarrow \boldsymbol{R}^+$ を連続微分可能な関数とし，$(x,y)-$ 平面上の曲線 $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, $a \le \theta \le b$ を α とする．ここで $0 \le a \le b \le \pi/2$. 曲線 α 上の各点と原点を結ぶ線分から出来る扇形領域の面積を $\mathcal{A}$, α の長さを $\mathcal{L}$ とするとき

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(r)d\theta\ , \qquad \mathcal{L} = \int_a^b g(r,r')d\theta$$

となる $f(r)$ と $g(r,r')$ を与えよ．さらに $r(\theta) = 1/\cos\theta$ の場合の $\mathcal{A}$ または $\mathcal{L}$ の上記公式を用いて

$$\int_0^{\pi/3}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}$$

を説明せよ．

(神戸大 2006) (m20063804)

0.145 (1) 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ を計算せよ．$\sin^{-1}$ は $\sin$ の逆関数．

$$\text{(i) } f(x,y) = e^{3x}\cos 2y\ , \qquad \text{(ii) } f(x,y) = \sin^{-1}\frac{x}{y}$$

(2) 関数 $f(y_1,y_2)$ が 2 階連続微分可能であるとき，$f(ax_{11}+bx_{12}\,,\ ax_{21}+bx_{22})$ (a,b は定数) について $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{22}\partial x_{11}} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{21}\partial x_{12}}$ を計算せよ

(神戸大 2006) (m20063805)

0.146 $f(x)$ をすべての $x \ge 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \le \displaystyle\int_1^n f(x)dx \le f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$ を示せ．

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$ を示せ．

(神戸大 2007) (m20073805)

0.147 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k\in\mathbb{Z}}\left|x - \frac{k}{2^n}\right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ．

(1) 関数 f_0, f_1, f_2 のグラフの概形を書け．

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ．

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.148 $xy-$ 平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義するとき, f の原点 $(0,0)$ での連続性, 偏微分可能性, 全微分可能性を判定せよ.

(神戸大 2018)　　(m20183808)

0.149 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$ とする.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) 条件 $x^2+y^2 \leq 5$ の表す領域は有界閉集合なので, $x^2+y^2 \leq 5$ という条件のもとで連続関数 $f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ. この最大値と最小値を求めよ.

(神戸大 2020)　　(m20203803)

0.150 n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は x が 0 に近い範囲では

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で近似することができる($f^{(n)}(0)$ は $f(x)$ を n 回微分し $x=0$ としたもの) これを利用して, 以下の関数の 5 次の近似式の $a_0, \cdots, a_5$ と $b_0, \cdots, b_5$ を求めよ.

$$e^x \text{ の近似式} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

$$\cos x \text{ の近似式} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5$$

(鳥取大 2005)　　(m20053905)

0.151 偏導関数に関する以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ の偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ および全微分 df を求めよ.

(2) 関数 $z = f(v)$ および $v = g(x,y)$ は, 連続かつそれぞれの変数に関して 2 階微分可能であるとする. このとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を表す式を書きなさい.

(鳥取大 2012)　　(m20123904)

0.152 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続な増加関数であるとき, 区間 $(a,b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 　で定義する. このとき次の各問いに答えよ.

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ.

(2) 区間 $(a,b]$ において $f(x) - F(x) \geqq 0$ であることを示せ.

(3) 区間 $(a,b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ.

(4) 区間 $(0,\infty)$ で定義される関数 $F(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$ は増加関数であることを示せ.

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.153 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s>0)$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して,
$$\int_0^\infty x^n e^{-sx} dx = \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$
が成り立つことを示せ.

(2) 非負の整数 n に対して, $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ.

(3) $s > 1$ のとき,
$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$
が成り立つことを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094002)

0.154 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011)　　(m20114002)

0.155 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を, 閉区間 $[a,b]$ 上で微分可能であり, それらの導関数は $[a,b]$ 上で連続とし,

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)\,,$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\,dx = 0\,,$

を満たすものとする. このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.156 関数 $a_{m,n}(x)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ を
$$a_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x)$$
とし, 関数 $g_m(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ および $f(x)$ を
$$g_m(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{1 + a_{m,n}(x)}$$
$$f(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x)$$
で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) x が無理数のとき $g_m(x)$ を求めよ.

(2) x が有理数のとき $f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ.

(4) $f(x)$ は $x = 0$ で微分不可能であることを示せ.

(岡山大 2013)　　(m20134001)

0.157 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ．

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^\lambda xe^{-nx^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ．

(岡山大 2017) (m20174002)

0.158 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を $\quad f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2} \quad$ で定める．次に答えよ．

(1) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ での微分可能性を調べよ．

(広島大 2003) (m20034101)

0.159 次の問に答えよ. ただし, 被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）を示せ.

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$（$C$ は積分定数）を示せ.
ただし, $y = \tan^{-1} x$ $\left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ は $x = \tan y$ の逆関数を表す.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ.

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ.

(5) $a > 0$，$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054101)

0.160 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ x, y に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする．関数 $f(t)$，$g(t)$ は t に対して微分可能であるとする．このとき, 関数 $G(t) = F\big(f(t)\,,\ g(t)\big)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f，g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y) = x^2 + xy + y^3 - 1$ に対して, $x = 1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y = g(x)$ で

$$g(1) = 0\,, \qquad F\big(x, g(x)\big) \equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$，$g''(1)$，$g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005) (m20054103)

0.161 $p > 0$ を定数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 f を，$\quad f(x) = \begin{cases} x^p \sin\dfrac{1}{x^2} & (x > 0\ \text{のとき}) \\ 0 & (x \leqq\ 0\ \text{のとき}) \end{cases} \quad$ で定義する．

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

(2) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ.

(3) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ.

(広島大 2006)　　(m20064101)

0.162 $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0)=a,\ f(x)<a \quad (0<x \leqq 1),\ f'(0) \neq 0$ を満たすとする.

(1) $f'(0)<0$ であることを示せ.

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定める.

$$g(x)=\begin{cases} -f'(0) & (x=0) \\ \dfrac{a-f(x)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

このとき，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で連続であることを示せ.

(3) ある $C>0$ が存在して,

$$a-f(x) \geqq Cx \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成立することを示せ.

(広島大 2010)　　(m20104103)

0.163 $u(r)$ は区間 $(0,\ \infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\ \infty)$ 上で連続であるとする. 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=u(r) \quad (\text{ただし},\ r=\sqrt{x^2+y^2})$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=u''(r)+\dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ.

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ が成り立つためには,

$$u(r)=a\log r+b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表されることが必要十分であることを示せ.

(広島大 2012)　　(m20124103)

0.164 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

(1) 区間 $(0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(2) 区間 $[0,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x=a$ で最大値を取るならば，$f'(a)=0$ を満たす.

(3) 区間 $I=[0,1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすならば，任意の $x \in I$ に対し $f(x)=0$ となる.

(4) 区間 $I=[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする．このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である.

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

は，原点 $(0,0)$ において連続である.

(広島大 2013)　　(m20134106)

0.165　実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^\ell}, & (x,y)\neq(0,0),\\[2mm] 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.

(3) $\ell=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)dxdy$$

を考える．変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{\sin\left(r^4\varphi(\theta)\right)}{r}dr\right)d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である.

(4) $\ell=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ.
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い.

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.166　(1) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq0),\\ 0 & (x=0),\end{cases}$ とする.

(a) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ.

(b) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x=0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ.

(2) $g(x)$ は開区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，$a,\ b\in I$ は $a<b$ を満たすとする.

(a) $g'(a)<0<g'(b)$ とする．$g(x)$ は $a<\xi<b$ を満たすある $\xi\in\mathbb{R}$ で閉区間 $[a,\ b]$ での最小値をとることを示せ．また $g'(\xi)$ を求めよ.

(b) $g'(a)<k<g'(b)$ を満たす任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して，$g'(\eta)=k,\ a<\eta<b$ を満たす $\eta\in\mathbb{R}$ が存在することを示せ.

(c) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば，$g'(x)$ は I で連続であることを示せ.

(広島大 2015)　　(m20154105)

0.167　(1) $f(x)$ は $0\leqq x\leqq a$ において連続として

$$\iint_{D_a}f(x+y)dxdy=\int_0^a xf(x)dx,\quad D_a=\{(x,y);\ x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq a\}$$ を示せ.

(2) 次の積分を計算せよ.

$$\iint_{D_1}e^{-(x+y)^2}dxdy,\quad D_1=\{(x,y);\ x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq1\}$$

(徳島大 2001)　　(m20014402)

0.168　(1) $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ.

ロピタルの定理を用いて　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{1}=0$

(徳島大 2009)　　(m20094402)

0.169 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ を

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S(f, \xi(\Delta)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \xi(\Delta))$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n), \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_{1n} f_{2n} \cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005) (m20054501)

0.170 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0$, $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ.

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で，その既約分数表示が } m > 0 \text{ として} \dfrac{n}{m} \text{と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ (b) $f\left(\sqrt{2}\right)$ (c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x=0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007) (m20074502)

0.171 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が $x=0$ で連続であることを示せ．

(2) $x \neq 0$ のとき，$f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ．また，$f'(0)$ を求めよ．

(4) $f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示せ．

(高知大 2012) (m20124501)

0.172 $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，

数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016) (m20164502)

0.173 $f(x)$ を連続関数とし， $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt$ とする．

(1) 関数　$g(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} f(t)\,dt$　を積分記号を使わず，$f(x),\ F(x)$ を用いて表せ.

(2) 関数 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x),\ F(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数　$h(x)=\displaystyle\int_{3x}^{x^2} tf(t)\,dt$　の導関数 $h'(x)$ を積分記号を使わず，$f(x),\ F(x)$ を用いて表せ.

(愛媛大 2004)　　(m20044603)

0.174 (1) 次の関数を微分せよ.

(a) $\log(1+x^4)$　　(b) $\sin^{-1}x^2$

(2) α,β を定数とし，

$$f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}x & (x>1)\\ \beta & (x=1)\\ \alpha x-\alpha+\beta & (x<1)\end{cases}$$

とおく. ただし $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $f(x)$ が $x=1$ で連続になるように β を定めよ.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to1-0}f'(x)$ となるように α を定めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054601)

0.175 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を満たすとする．このとき，$z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

(3) 連続関数 $f(x)$ について，次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.176 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x>0)\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ は連続であるか調べ，また，導関数 $f'(x)$ が微分可能な関数か調べよ.

(九州大 1999)　　(m19994701)

0.177 1 つのサイコロを続けて投げる動作を考える．偶数の目が k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）回出た時点で，この動作を終了するとする（必ずしも連続して k 回出る必要はない）．このとき，n 回目で動作が終了する確率を，$p_n(k)$, $n\geq k$ とする．次の問に答えよ.

(1) $k=5$ とした，$p_n(5)$ を求めよ（n を用いて $p_n(5)$ を表現せよ）.

(2) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，$p_n(k)$ を求めよ（n と k を用いて $p_n(k)$ を表現せよ）.

(3) 一般的な k（k は自然数，正の整数，0 は含まないとする）の場合において，確率 $p_n(k)$ を最大にする n をすべて求めよ（k を用いて n を表現せよ）.

(九州大 2003)　　(m20034709)

0.178 (1) 次の線形非同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

の一般解は

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)$$

で与えられることを示せ. ただし, $P(x), Q(x)$ は x の連続関数であり, c は任意の定数である.

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x\frac{dy}{dx}-y=x(1+2x^2)$$

(3) 適切な変数変換を利用して, 次の微分方程式の一般解を求めよ. さらに, $x=1$ のとき $y=1$ となるような解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=\frac{\log x}{2x}y^3$$

(九州大 2004)　　(m20044702)

0.179 n を 1 以上の整数とし, n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ の 1 次結合全体を $L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$ と表す. 線形写像

$$f\in L[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]\longrightarrow f'\in L[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]$$

を T で表す. ただし f' は f の導関数である. 次の問に答えよ.

(1) n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ は 1 次独立であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ を求め, それぞれの次元を求めよ. ここで, 記号 $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ はそれぞれ

$$\mathrm{Ker}(T)=\{f\in L[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]\ \mid\ \text{恒等的に } Tf=0\},$$
$$\mathrm{Im}(T)=\{Tf\ \mid\ f\in L[1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}]\}$$

を表す.

(九州大 2004)　　(m20044706)

0.180 2 変数関数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}\\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \text{ のとき}\end{cases}$ に関する以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示しなさい.

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x に関して，また y に関して偏微分可能であることを示しなさい.

(3) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であるかどうか調べなさい.

(九州大 2006)　　(m20064706)

0.181 連続型の確率変数を X とする. X が a 以下の値をとる確率を $P_X(a)$ とし, $P_X(a)$ が以下で与えられているものとする. 以下の設問に答えよ.

$$P_X(a)=\begin{cases}0 & (-\infty\leq a<-T)\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi a}{2T}\right) & (-T\leq a\leq T)\\ 1 & (T\leq a\leq\infty)\end{cases}$$

(1) X が値 X_0〜X_1（ただし，$X_0<X_1$ とする）のいずれかをとる確率を求めよ.

(2) X が任意の定数 B となる確率を求めよ．　(3) X の確率密度関数 $p(X)$ を求めよ．

(4) X の平均を求めよ．　(5) X の標準偏差を求めよ．

(九州大 2007)　(m20074704)

0.182 $G(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$ とおく．ただし，$\exp z = e^z$ である．

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ．

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t)\,dx = 1$$

であることを示せ．ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．

(3) f を $\boldsymbol{R} = (-\infty,\ \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき，すべての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,t)f(y)\,dy = f(x)$$

であることを証明せよ．

(九州大 2008)　(m20084712)

0.183 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq\ x \leqq\ 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x-4 & (-2 \leqq\ x < 0) \\ 0 & (x=0) \\ 4-2x & (0 < x \leqq\ 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：

$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ (n=1,2,\cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　(m20164703)

0.184 関数 $f(x) = x^3$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ．

(佐賀大 2003)　(m20034903)

0.185 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は半開区間 $(0,1]$ で一様連続でないことを次の手順で示せ．

(1) 一様連続であることを $\varepsilon - \delta$ 法を用いて書け.

(2) (1) の否定命題を作れ.

(3) (2) が成り立つことを示せ.

（佐賀大 2004） (m20044901)

0.186 $0 < a < b$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) 区間 $[a, b]$ で連続な実関数 $f(x)$, $g(x)$ について以下の不等式を証明せよ.

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx$$

(2) 前問の結果を用いて，次の不等式を証明せよ.

$$\left(\log \frac{b}{a}\right)^2 \leqq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009) (m20094902)

0.187 次式で定義される関数について，以下の問いに答えよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) 偏導関数 f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} を求めよ.

(2) $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(3) $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ.

(4) $f_{xy}(x,y)$ および $f_{yx}(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ.

(佐賀大 2016) (m20164902)

0.188 連続関数 $f(x)$ において Taylor 展開の 2, 3 項を記述せよ. ただし, h は x の微小な変化量である.

$$f(x+h) \approx f(x) + \boxed{} + \boxed{} + O(h^3)$$

(長崎大 2004) (m20045006)

0.189 連続な関数 $f(x,y)$ の Taylor 展開について，右辺第 2 項，第 3 項を記述せよ.

ただし，Δx は x の微小な変化量である.

$$f(x+\Delta x,\ y) = f(x,y) + \boxed{} + \boxed{} + O(\Delta x^3)$$

(長崎大 2008) (m20085013)

0.190 (1) 連続関数の中間値の定理について述べよ.

(2) $f(x)$ は区間 $I = [a, b]$ 上で定義されている連続関数とする．このとき，$f(x)$ が I 上単射であるための必要十分条件は $f(x)$ が I 上単調増加関数または単調減少関数であることを示せ.

注：$f(x)$ が I 上単調増加関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) < f(x_2)$ であるとき，また単調減少関数であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば，$f(x_1) > f(x_2)$ であるときをいう．さらに，I 上単射であるとは，$x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ ならば，$f(x_1) \neq f(x_2)$ であるときをいう.

（熊本大 2001） (m20015202)

0.191 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x) = x\int_1^x f(t)dt + x$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185419)

0.192 次式を満たす $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は連続な関数である．

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 \{t \cdot f(t)\}\, dt$$

(鹿児島大 2018)　　(m20185437)

0.193 次の関数が $(x, y) = (0, 0)$ において連続かどうか判定せよ．理由も述べること．

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = (0, 0) \text{ のとき} \\ \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(香川大 2022)　　(m20225702)

0.194 一般に，関数 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で，区間 $[-\pi, \pi]$ でいくつか（有限個）の点を除いて連続であるとき，次のように三角関数の級数に展開できる．これを $f(x)$ のフーリエ級数という．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

周期 2π の周期関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (-\pi \leqq x \leqq 0) \\ 2x & (0 < x \leqq \pi) \end{cases}$$ のとき，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ

(島根大 2007)　　(m20075814)

0.195 閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能である関数 $f(x)$ に対して，次の命題（平均値の定理）が成り立つ．

ある $c(a < c < b)$ が存在して

$$(*)\qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = x^2$ のとき，区間 (a, b) において，$(*)$ が成り立つような c を求めよ．

(2) 閉区間 $[a, b]$ で連続かつ，開区間 (a, b) で 2 回微分可能でつねに $f''(x) > 0$ を満たす関数 $f(x)$ を考える．このとき，区間 (a, b) において関数

$$F(x) = \frac{f(b)(x - a) + f(a)(b - x)}{b - a} - f(x)$$

はつねに正であり，かつ $F(x)$ の極大値が区間 (a, b) において，ただ一つだけ存在することを示せ．

(3) $b > a > 1$ とする．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{b^2 - a^2}{2ab} > \log\frac{b}{a}$$

(島根大 2017)　　(m20175806)

0.196 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019)　　(m20195806)

0.197 $g(x)$ は $0 < \alpha \leqq x \leqq \beta$ で連続であり，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \alpha \leqq x + y \leqq \beta\}$$

とする．このとき，

$$\iint_D g(x+y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} xg(x)dx$$

となることを証明せよ．

(島根大 2019)　　(m20195808)

0.198 x の関数 $u,\ v$ の第 n 次までの導関数が連続ならば，部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}\int uv^{(n)}dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx \\ &= uv^{(n-i)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}dx \\ &= \cdots\cdots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots \\ &\qquad +(-1)^{(n-2)}u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}vdx\end{aligned}$$

が成り立つ．このことを利用して下の問いに答えよ．

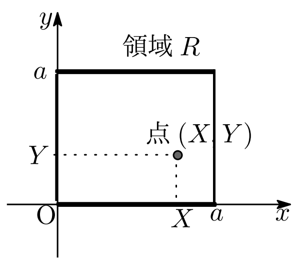
(1) $u = (b-x)^{n-1}$ としたとき，$u',\ u'',\ \cdots,\ u^{(n-2)},\ u^{(n-1)},\ u^{(n)}$ を求めよ．

(2) $u = (b-x)^{n-1},\ v = f(x)$ としたとき，上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ．

(3) (2) の結果において積分範囲を $[a, b]$ として定積分を求め，$x = b$ のとき 0 になる項を整理して $f(b)$ についてのテイラー展開の式を求めよ．剰余項は積分形のままでよい．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206104)

0.199 右図の一辺の長さが a の正方形領域 R からランダムに 1 つの点を選択する試行を考える．選択された点の座標を (X, Y) としたとき，X および Y は連続確率変数と扱うことができ，それらの同時確率密度関数は次式で与えられるものとする，



$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,, & (0 \leq x \leq a,\ \text{かつ},\ 0 \leq y \leq a\ \text{の場合}) \\ 0\,, & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

ただし，a は正の実数である．領域 R 内であれば，x および y の値に関わらず同時確率密度関数が等しいことから，この試行は領域 R から一様ランダムに点を選択するものである．この試行に関する次の (1)〜(3) に答えなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy$ の値を求めなさい.

(2) 同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ を用いて，$X \leq \dfrac{a}{3}$ となる確率を求めなさい.

(3) $Z = X + Y$ とする．領域 R 内のどの位置の点が選択された場合に $Z \geq a$ となるか，すなわち，$Y \geq -X + a$ となるかを考え，それを基に，$Z \geq a$ となる確率を求めなさい.

(和歌山大 2017)　　(m20176510)