[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：リーマン

0.1 $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (\text{上記以外の数}) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x = \dfrac{1}{2^m}, m = 1, 2, 3, \cdots) \\ 0 & (\text{上記以外の点}) \end{cases}$$

とする.

(1) f が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(2)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \sup_{\frac{k-1}{2^n} \le x \le \frac{k}{2^n}} g(x)$$
を求めよ.

(3) g が区間 $[0,1]$ 上リーマン積分可能かどうか、理由とともに答えよ.

(お茶の水女子大 2020)　(m20200601)

0.2 整関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ は，$f(0) = 0$ を満たし，その実部が $u(x, y) = e^{-x}(x \cos y + ay \sin y)$ (a は実定数) という形をしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $u(x, y)$ が調和関数である（すなわち $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を満たす）ことから a の値を定めよ．

(2) コーシー・リーマンの関係式に注意して $f(z)$ の虚部 $v(x, y)$ を求めよ．

(3) $f(z)$ を z の関数として表せ．

(電気通信大 1999)　(m19991005)

0.3 $E = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m}, \frac{j}{m}\right) \frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x, y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$ である．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x, y)$ の E 上での二重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x, y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

(筑波大 2017)　(m20171309)

0.4 以下の複素関数 $f(z)$ に関する問いに答えなさい．ただし，$z \ne 0$ とし，i は虚数単位である．また，x, y は実数とする．

$$f(z) = z - \frac{1}{z}$$

(1) $z = x + yi$ のとき，複素関数 $f(z) = u + iv$ の実部 $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ および虚部 $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$ を x, y の関数として表しなさい．

(2) (1) の実関数 $u(x,y),\ v(x,y)$ がコーシー・リーマンの微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

を満たすことを示しなさい.

(3) $f(z)$ の導関数 $f'(z)$ が,

$$f'(z)=1+\frac{1}{z^2}$$

となることを, 実関数 $u(x,y),\ v(x,y)$ の偏導関数を計算することによって示しなさい.

(福井大 2015)　　(m20152424)

0.5 関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ （$z=x+iy,\ i=\sqrt{-1},\ x$ と y は実数, $u(x,y)$ と $v(x,y)$ は実関数）は $z=z_0=x_0+iy_0$ で正則である. 以下の問に答えよ.

(1) コーシー・リーマンの方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

を示せ.

(2) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ となる正則関数 $f(z)$ を求めよ.

(大阪大 2005)　　(m20053509)

0.6 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f,\xi(\Delta)\right)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta|\to 0}S\left(f,\xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx=S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in}=f(a+i\delta_n), \qquad \delta_n=\frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots f_{nn}}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005)　　(m20054501)

0.7 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき, (f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという. 次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\big((x,y)\neq(0,0)\big)$ のとき, (f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(2) $f(x,y) = x^2 - y^2$ のとき, (f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ.

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y) = h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

$$q(x,y) = k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと, (p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ.

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.8 複素関数 $w = e^{-z}$ について次の問いに答えなさい. ただし, i を虚数単位とする.

(1) $w = u+iv$, $z = x+iy$ （ u,v,x,y は実数 ）とおくとき, u,v それぞれを x,y を用いて表しなさい.

(2) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(和歌山大 2011)　　(m20116501)

0.9 次の各問いに答えなさい. ただし, i は虚数単位とする.

(1) 次の複素関数について, 問いに答えなさい.

$$w = z^3$$

(a) $w = u+iv$, $z = x+iy$ (u,v,x,y は実数) とおくとき, u,v それぞれを x,y を用いて表せ.

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい.

(2) 次の複素関数について複素積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$, $c: |z| = 1$ を求めなさい. ただし, 積分の向きは反時計回りとする.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 - 4z}$$

(和歌山大 2013)　　(m20136507)

0.10 (1) 複素数関数 $w = \dfrac{z}{1-z}$ について次の問いに答えなさい.

(a) $w=u+iv,\ z=x+iy$ とおくとき，u,v を x,y を用いて表しなさい．ただし，u,v,x,y は実数とする．

(b) コーシー・リーマンの方程式が成り立つことを示しなさい．

(2) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{\sin z}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}\,dz$ を求めなさい．ただし，積分路 C は $|z|=2$ とし，向きは反時計回りとする．

(和歌山大 2015)　　(m20156506)

0.11 次の (1)〜(3) に答えなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 次の関数の組 (A) と (B) のうち，コーシー・リーマンの方程式を満たすものを選びなさい．

(A) $u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y$

(B) $u=e^x\sin y,\ v=e^x\cos y$

(2) (1) で選んだ $u,\ v$ に対して，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ z=x+iy$ とおくとき，$f'(z)$ を求めなさい．

(3) (2) の関数 $f(z)$ に対して，次の積分の値を求めなさい．ただし, 積分路 C は $|z|=1$ とし，向きは反時計回りとする．

$$\oint_C \frac{f(z)}{z}dz$$

(和歌山大 2018)　　(m20186505)