[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：ローラン

0.1 (1) 複素変数の指数関数 e^x の級数展開は次式で表される．

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

上式を利用して, $\cos z$, $\sin z$ の級数展開を求めよ．

(2) 次の複素関数を特異点 $z=0$ のまわりでローラン展開し $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ の形で表せ．また, 特異点の種類を答えよ．

$$f_1(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad f_2(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

(3) 次の積分を求めよ．

$$I = \oint_C f_3(z)dz$$

ただし, 積分路 C は複素平面上で原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を反時計回りに一周するものとする．

(東京大 2001)　(m20010703)

0.2 以下の問いに答えよ． i は虚数単位とする． また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz$$

を考える． 経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい． 極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2-3z+2}$$

の収束域 $1<|z|<2$，および $2<|z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4}dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい． 適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　(m20160704)

0.3 複素数 z の複素数値関数 $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のマクローリン展開とその収束半径を求めよ．

(2) $f(z)$ の $\{z : 0 < |z-i| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(3) i を中心とし，半径 1 の円を正の向きに一周する曲線 C に沿っての $f(z)$ の積分を求めよ．

(電気通信大 2000)　(m20001006)

0.4 α を 0 でない複素数とし,

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\alpha)}$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) 複素数 a, b を使って

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-\alpha}$$

と書くとき，a, b を α の式で表せ.

(2) $f(z)$ を $z = 0$ を中心として，領域 $0 < |z| < |\alpha|$ においてローラン展開せよ.

(3) $\alpha = 1 + i$ とする．$z = 0$ を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路に沿って $f(z)$ を積分したときの値を計算せよ.

(電気通信大 2010)　　(m20101005)

0.5 つぎの各問いに答えよ.

(1) i , $1+i$, $1-\sqrt{3}i$ を極形式で表せ.

(2) $e^z = 4i$ なる z を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z-\frac{1}{3}}{z^3-z}dz$,　$C : \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$ の反時計を計算せよ.

(4) $\displaystyle\frac{1}{z(z-i)}$ を $z = i$ 近辺でローラン展開せよ.

(京都大 1999)　　(m19993304)

0.6 複素数平面から実軸の $|x| \leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z \in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$\displaystyle C(z) = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{z-t}$,　$z \in D$ (t は実変数)　で定義する.

(1) $C(z)$ は $|z| > 1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z \in D$ と実軸上の区間 $[-1, 1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h| \leq d/2$ なら，$|z + h - t| \geq d/2$ が成り立つ.）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z| > 1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ.

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.7 複素関数

$$g(z) = \frac{1}{e^{iz} - 1}$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) $g(z)$ の全ての極とその位数, 及び留数を求めよ.

(2) 適切に正の実数 a を選ぶと, $g(z)$ は $0 < |z| < a$ において

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^n \ , \qquad c_n \in \mathbb{C} \qquad (n = m,\ m+1,\ m+2,\ \cdots) \ , \qquad c_m \neq 0 \ , \qquad m \in \mathbb{Z}$$

の形にローラン展開できる. このような実数 a のうち, 最大のものを求めよ.

(3) (2) における整数 m と, 係数 c_m, c_{m+1}, c_{m+2} を求めよ.

(4) 次の積分を求めよ. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする.

$$\int_{|z|=100} g(z)\, dz$$

(京都大 2010)　　(m20103308)

0.8 以下の問いに答えよ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 方程式 $e^{iz} = 1 - i$ を満たす複素数 z をすべて求め，$a + bi$（a, b は実数）の形で表せ．

(2) 以下の複素関数 $f(z)$ が $z \neq 1$ において正則であることを示せ．

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

(3) 以下の複素関数 $g(z)$ の $z = 0$ のまわりでのローラン展開を求めよ．ただし，$1 < |z| < 2$ とする．

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

(大阪大 2022)　　(m20223503)