[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：ロピタル

0.1 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

$$a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = -a_n + S_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.2 (1) $(-1, 1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1, 1)$ 上で定義された C^2 級関数とする ． g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h) + g(2h) + g(-3h) - 3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2, 2)$ 上で定義された C^1 級関数とする ． $h(0) = 0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\, dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.3 以下に示す関数について次の問いに答えよ．　$f(x) = xe^{-x}$

(1) 関数 $f(x)$ を微分せよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値および変曲点を求め，増減表を作成せよ．また，$y = f(x)$ の概形を描け．

(3) 関数 $f(x)$ の表す曲線と x 軸と $x = q$ $(q > 0)$ の直線とで囲まれる図形の面積を $S(q)$ とする．このとき，極限 $\lim_{q \to \infty} S(q)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062706)

0.4 関数 $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\lim_{x \to \pm\infty} \{y - (mx + b)\} = 0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x = 1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y = mx + b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい)．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

(4)　(1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033101)

0.5　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)}{x^{n+1}}$ が有限な値として確定するように $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を定め，この極限値を求めよ．但し，ロピタルの定理を用いてはならない．

(神戸大 1999)　　(m19993803)

0.6　(1)　$f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続とする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2f(x)-x^2f(a)}{x-a}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}$ を求める次の計算の誤りを指摘せよ．

ロピタルの定理を用いて　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0$

(徳島大 2009)　　(m20094402)

0.7　次は，ロピタルの定理の使用例である．

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形であるから，ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

これらにならって極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を求めてみる．以下の問いに答えよ．

(1)　ロピタルの定理が使える様に，$\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を式変形せよ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ を求めよ．

(高知大 2008)　　(m20084505)

0.8　次の関数が与えられている．

$f(x)=1-\cos x$

$g(x)=x\sin x$

(1)　これらの関数をそれぞれ x の 4 乗までの多項式に展開せよ．

(2)　これらの関数を次式に代入し, その極限を求めよ. また, その結果がロピタルの定理を用いた結果と一致することを示せ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

(長崎大 2005)　　(m20055010)