[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：接線

0.1 ベクトルの面積分を次の手順に従って求めよ. ただし, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである. また, “$\cdot$” はベクトルの内積（スカラー積）, “$\times$” は外積（ベクトル積）を表す .

$$\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad \text{曲面 } \boldsymbol{S} \ : \ 2x+y+2z=6,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$$

(1) 曲面 $\boldsymbol{S}$ 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ とするとき, a, b, c を求めよ.

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ をそれぞれ求めよ.

(3) 面積素 $d\boldsymbol{S}$ は $d\boldsymbol{S}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}dxdy$ で与えられる. $d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_S \left(x\boldsymbol{i}+3y^2\boldsymbol{j}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ.

(北海道大 2005)　　(m20050104)

0.2 (1) 放物線を表す次の式

$$y=ax^2+1 \quad (a\neq 0) \qquad ①$$

を一般解とする, 階数の最も低い微分方程式を求めなさい.

(2) 式①で表されるどの放物線とも直交する曲線の方程式を求めなさい. ここで, 二つの曲線 C と C' が交点 (x,y) で直交するとは, (x,y) における C の接線と C' の接線とが直交することと定義する.

(3) (2) で求めた曲線のうち, 原点を通るものを求め, それがどんな曲線であるかを述べなさい.

(北海道大 2008)　　(m20080103)

0.3 原点を通り x 軸上に中心を有する円 C は無数にあるが, 一般にその方程式は, $x^2+y^2+ax=0$（a は非ゼロの任意の実定数）と表せる. 曲線 D は, y 軸およびすべての円 C に, 交点において直交する. このような曲線 D を, 以下の手順で求めよ.

(1) 円 C の点 (x,y) $(y\neq 0)$ における円 C の接線の勾配 m を求めよ.

(2) 曲線 D の方程式を $y=y(x)$ $(x\pm y\neq 0)$ とし, 点 (x,y) における曲線 D の接線の勾配 $\dfrac{dy}{dx}$ と, (1) で求めた勾配 m には, 直交関係 $m\dfrac{dy}{dx}=-1$ が成り立つ. これを用いて, 曲線 D の方程式が満たすべき微分方程式

$$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

を導出せよ.

(3) (2) の微分方程式を解き, 題意を満たす曲線群 D が $x-y$ 平面上でどのような図形を描くか答えよ.

(北海道大 2009)　　(m20090104)

0.4 (1) 関数 $y=-x^3+\dfrac{9}{2}x^2-6x-1$ のグラフを描き, 極値を求めよ.

(2) (1) の関数の $x=0$ および $x=2$ における接線を求め, その交点の座標を求めよ.

(北見工業大 2010)　　(m20100202)

0.5 $f(x)=xe^{-x^2}$ とする.

(1) $\big(1,f(1)\big)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式を求めよ

(2) $0\leqq x$ における $f(x)$ の最大値, 最小値を求めよ.

(北見工業大 2014)　　(m20140201)

0.6　曲線 $y = \log x$ の接線で，原点を通るものの方程式を求めよ．

(北見工業大 2015)　　(m20150202)

0.7　関数 $y = e^{-x^2}$ について次の問 (1), (2) に答えよ．

(1) y' および y'' を計算せよ．

(2) y', y'' の符号を調べ，増減，凹凸がはっきりわかるようにグラフを描け．
（変曲点があれば変曲点における $y = e^{-x^2}$ の接線も同じ xy 平面上に描くこと.）

(北見工業大 2019)　　(m20190210)

0.8　xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{t}{\pi}\cos t \\ \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

ここで, $0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $t = \dfrac{m}{2}\pi$（ただし $m = 0, 1, 2, 3$）における点 P の座標, およびそれらの点における曲線 C の接線の傾きを求めよ. さらに, 曲線 C の概形を描け.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int t\,\sin^2 t\,dt$ を求めよ.

(3) 曲線 C と x 軸 $(x \geqq 0)$ および y 軸 $(y \geqq 0)$ によって囲まれる領域の面積を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100502)

0.9　点 $P(0, -1)$ を通る直線と曲線 $C : y = -x^2 + 2x$ が 2 点 Q, R で交わるとき，以下の問いに答えよ．ただし，点 Q の x 座標を a として，$0 < a < 2$ とする．

(1) 点 Q, R それぞれにおける曲線 C の接線 ℓ_Q, ℓ_R の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 ℓ_Q, ℓ_R の交点の軌跡を求めよ．

(3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき，y 軸，曲線 C，接線 ℓ_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し，この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ．

(東北大 2012)　　(m20120503)

0.10　xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる.

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.11 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．

$$f(x) = \frac{-ax^2 - (a-1)}{x^2+1} \qquad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ．ただし，$y = f(x)$ は x 軸と 2 つの交点 A および B をもつものとする．

(1) $y = f(x)$ が x 軸と 2 つの交点をもつ a の条件を示し，交点 A，B の x 座標 x_A，x_B （ただし $x_A > x_B$）求めよ．

(2) $y = f(x)$ の増減表を示し，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 交点 A, B における接線の方程式を求め，その接線 2 本の交点の座標を求めよ．

(4) $y = f(x)$ と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_1 と，(3) で求めた 2 本の接線と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_2 を求め，S_1 と S_2 の大小関係を示せ．

(東北大 2014)　　(m20140501)

0.12 xyz 空間における点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = -a\sin t \end{cases}$$

ここで，a は正の実数である．$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{2}$ と $t = \pi$ のそれぞれに対し，点 P の座標とその点における曲線 C の接線方向を表すベクトルを求めよ．

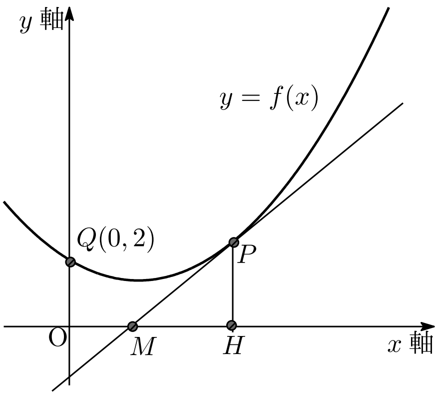
(2) 曲線 C 上の任意の点 P における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C が平面上の曲線であることを示し，その平面の方程式と単位法線ベクトルを求めよ．

(4) 曲線 C が xz 平面に投影した曲線で囲まれる領域 D の面積を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180503)

0.13 ある曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線と x 軸との交点を点 M，点 P から x 軸に垂直に下した点を点 H とする．線分 MH の長さが一定に値 k となった．点 $Q(0, 2)$ を通るこの曲線の式を求めよ．



(お茶の水女子大 2021)　　(m20210602)

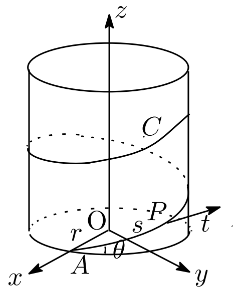
0.14 半径 r の円柱の表面に底面と一定の角度 θ をなすらせん（螺旋）曲線 C がある．直交座標系 O–xyz を図に示すようにとる．また，円柱の表面と x 軸との交点 A を曲線 C が通るとする．以下の各問に答えよ．

(1) 点 A からのらせん曲線の長さを s とするとき，らせん上の任意の点 P の直交座標系 O–xyz での位置 $\mathbf{r}_p$ を s の関数として表せ．

(2) $\mathbf{t}$ を点 P において曲線 C に接する長さ 1 の接線ベクトルとする．$\mathbf{t}$ を s の関数として表せ．ただし，$\mathbf{t}$ の方向は s が増加する向きを正ととることとする．

(3) $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と $\mathbf{t}$ とは直交することを示せ．

(4) 点 P における曲線 C の曲率 k は，$k = \left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ によって表される．k を θ の関数としてグラフに表せ．ただし，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．



(東京大 1998）　　(m19980703)

0.15　2 つの媒介変数 s, θ によって表される曲面 S

$$S\ :\ x(s,\theta) = (s\cos\theta,\ s\sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq s \leq 1)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

について，以下の設問に答えよ．α は 0 以上の定数とする．

(1) $x(s,\theta)$ の媒介変数 s を 1 と固定する事により，曲線 C

$$C\ :\ y(\theta) = x(1,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ \alpha\theta)\ ,\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

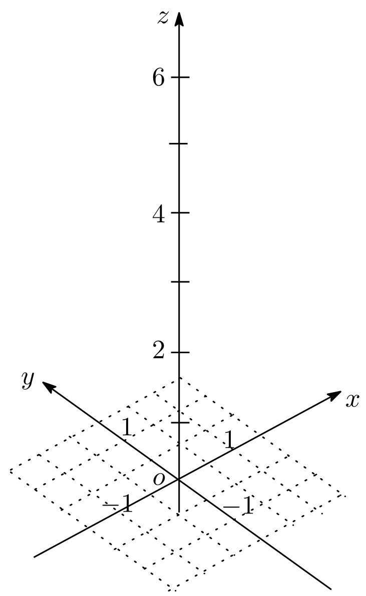
を得る．$\alpha = 1$ の場合について，下図の座標軸を参考にして曲線の概略を解答用紙に手描きせよ．

(2) C 上の点を $P(= y(\theta))$ とする．P における接線の方程式を導出せよ．

(3) (2) で求めた接線と xy 平面の交点を Q とする．θ が 0 から 2π まで連続的に変化するとき，Q が描く曲線の長さ ℓ を求めよ．

(4) $\alpha = 0$ のとき，曲面 S は xy 平面上の単位円盤に一致する．$\alpha = 1$ としたとき，曲面 S の面積は，単位円盤の面積の何倍になるかを求めよ．ただし，次の不定積分の公式を使ってよい．

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2} + \log_e\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right\} + c \qquad (c \text{ は積分定数})$$



(東京大 2009)　　(m20090703)

0.16　カージオイドと呼ばれる極座標形式で表された曲線 $r = 1 + \cos\theta$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲線の概形を図示せよ．ただし，作図の根拠も示せ．

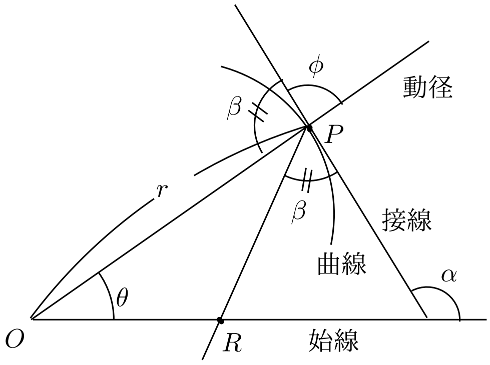
(2) この曲線の全周囲長を求めよ．ただし，$1 + \cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ という関係を用いても良い．

(3) 下図に示すように，曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ における接線と原点 O から点 P を結んだ直線（動径）のなす角度を ϕ とする．また，接線と始線のなす角度を α とする．このとき，$\tan\phi = \tan(\alpha - \theta)$ であることを用い，

$$\tan\phi = \frac{r}{r'}$$

となることを示せ．ただし，$r' = dr/d\theta$ である．また，これを用いて ϕ を θ で表せ．

(4) 下図に示すように，動径と接線のなす角度を β とする．曲線上の点 $P(r, \theta)$ $(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2})$ で接線と角度 β をなすもう一つの直線が始線と交わる点を R とする．このとき，三角形 OPR は二等辺三角形となることを示せ．



(東京大 2014)　　(m20140703)

0.17　xy 平面上において．媒介変数 θ を用いて次式で表されるサイクロイド曲線 C を考える．

$$\begin{cases} x(\theta) - \theta - \sin\theta & (1) \\ y(\theta) = 1 - \cos\theta & (2) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．ただし，必要に応じて次の関係式を用いてよい．

$$\begin{cases} \sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (3) \\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} & (4) \end{cases}$$

(1) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ における曲線 C の概形を，根拠とともに示せ．

(2) 曲線 C 上の任意の点に対して，x 方向に 2π だけ平行移動させた点を考える．その点もまた曲線 C 上にあることを示せ．

(3) 原点 $O(0, 0)$ から，曲線 C 上の点 $P(x(\varphi), y(\varphi))$　(ただし $0 \leq \varphi \leq \pi$) までの曲線の長さを $\ell(\varphi)$ とする．

(a) $\ell(\varphi)$ を求めよ．

(b) 図 3.1 に示すように，点 P における曲線 C の接線上の点 Q を考える．
ただし，$\overline{PQ} = \ell(\pi) - \ell(\varphi)$ であり，また，$\overline{OQ} > \overline{OP}$ とする．　点 P を $0 < \varphi < \pi$ の間で動かしたときの点 Q の軌跡を求め，その概形を示せ．

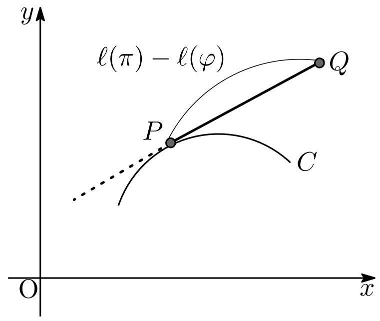


図 3.1

(東京大 2015)　　(m20150703)

0.18　関数 $f(x,y)=3x^2+2y^3-6xy-3$ について，次の問に答えなさい．

(1)　$f(x,y)$ の極値を求めなさい．

(2)　$f(x,y)=0$ の表す曲線 C 上の点 $(1,\sqrt{3})$ における C の接線の方程式を求めなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080902)

0.19　(1)　$xy-$平面内の曲線 $f(x,y)=x^3+3xy+4y^4-x-4=0$ 上の点 $(2,-1)$ におけるこの曲線の接線の方程式を求めよ．

(2)　点 (x,y) が条件 $y^2-x^2-1=0$ を満たしながら動くときの関数 $f(x,y)=y^3+2x$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2005)　　(m20051003)

0.20　関数 $y=f(x)$ のグラフ C が　$(x,y)=(\sin t\,,\ t\cos t)$,　$(0\leq t\leq \pi/2)$　と表されるとする．$t=\pi/4$ のときの C 上の点を $P(x_0,y_0)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$f'(x_0)$ を計算し，点 P における C の接線の方程式を求めよ．

(2)　$f''(x_0)$ を計算せよ．　　(3)　曲線 C と x 軸とが囲む部分の面積を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071004)

0.21　次の関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$f(x,y)=xy(1-x-y)\ ,\qquad g(x,y)=3x^3+y^3+2x^2y$$

(1)　関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2)　曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141003)

0.22　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　（ただし，a, $b>0$）が下に図示されている．点 A の座標は $(a,0)$，点 B の座標は $(0,b)$ であり，点 $\mathrm{P}(x_0,y_0)$ は楕円の弧 AB（第一象限）上の点（ただし，点 A と点 B を除く）である．次の設問に答えなさい．

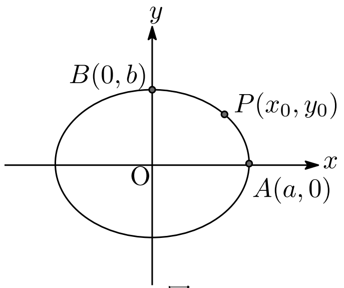
(1)　点 P で楕円に接する接線の方程式を x, y, a, b, x_0, y_0 を用いて表しなさい．

(2)　$x_0=a\cos\theta$, $y_0=b\sin\theta$ （ただし，$0<\theta<\pi/2$ ）とおいたとき，設問 (1) で求めた接線の方程式を x, y, a, b, θ を用いて表しなさい．

(3)　設問 (2) で求めた接線の方程式と x 軸および y 軸との交点をそれぞれ点 C および点 D とするとき，線分 CD の長さを a, b, θ を用いて表しなさい．

(4)　線分 CD の長さが最小となる θ の値を a, b を用いて表しなさい．

(5) 線分 CD の最小値を a, b を用いて表しなさい.



図

(千葉大 2017)　　(m20171207)

0.23 曲線 $y=x^2$ 上の点 (t,t^2) における接線を $C(t)$，直線 $x=2$ の $y>0$ の部分を m とする.

(1) $C(t)$ の方程式を求めなさい.

(2) $C(t)$ と m が交点をもつための t の範囲を求めなさい.

(3) $C(t)$, m および x 軸で囲まれてできる三角形の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ を t の式で表しなさい.

(4) $S(t)$ の最大値を求めなさい.

(筑波大 2006)　　(m20061321)

0.24 Newton 法は方程式 $f(x)=0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ ,\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n)=\dfrac{d}{dx}f(x_n)\neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 x_1, x_2, $\cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty)=0$ を満たす. 上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ.

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ.

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$, $n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする.

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right|\leq k<1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる.

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.25 二次曲線 $y=2x^2+5x+3$ を考える.

(1) 二次曲線上の点 $P(-2,1)$ における法線（点 P を通り，点 P における接線と垂直に交わる直線）の方程式を求めよ.

(2) (1) の法線と二次曲線の交点の座標を求めよ.

(3) (1) の法線と二次曲線により囲まれる面積を求めよ．

(群馬大 2009)　　(m20091504)

0.26 放物線 $y = 4x^2 + x + 3$ と直線 $y = kx + 2k + 1$ がある．

(1) 直線が放物線の接線となる場合の，定数 k を求めよ．

(2) 2 本の接線の交点と 2 つの接点を結んで作られる三角形の面積を求めよ．

(群馬大 2013)　　(m20131503)

0.27 2 つの曲線 $y = x^2$ と $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$ とする) が，$x = -1$，$x = 0$，$x = 2$ の 3 点で交わっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) b と c をそれぞれ a の式で表せ．

(2) 2 つの曲線で囲まれる部分の面積を a の式で表せ．

(3) 2 つの曲線の $x = -1$ における接線が直交するときの a を求めよ．

(群馬大 2016)　　(m20161501)

0.28 a, b, c を定数として，3 次関数

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

を考える．このとき以下の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて，点 $(\alpha, f(\alpha))$ における接線と法線の方程式を求めよ．

(2) どのような場合に，関数 $y = f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとるといわれるのかを説明せよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ が x のいかなる値でも極値をとらない条件を a, b, c を用いて示せ．

(茨城大 2002)　　(m20021701)

0.29 点 $P(0, -1)$ から曲線 $y = 4x^2$ に引いた接線の方程式, および接点の座標を求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102011)

0.30 (1) 関数 $f(x) = \exp(2x)$ 上の x 座標が負である点 P における接線と，両座標軸とで囲まれる図形の面積を S とする．点 P の x 座標を p とし，S を p で表せ．

(2) 前問 (1) において p の関数 S の最大値を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = \exp(ax)$ とその逆関数 $g(x) = \dfrac{1}{a}\log x$ のグラフが $x = e$ で接する（すなわち，この点で接線を共有する）ように定数 $a(\neq 0)$ の値を求め，この 2 曲線と x 軸，y 軸の囲む部分の面積を求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172001)

0.31 中心 O，半径 1 の円がある．円外の点 P からこの円に 2 本の接線を引き，O と接点 A, B とで作られる 3 角形 OAB の面積を S とする．P が動くときの S の最大値，およびその値を与える点 P と O との距離 $\overline{OP}$ を求めよ．

(長岡技科大 1994)　　(m19942102)

0.32 $f(x)$ を微分可能な関数とし，$g(x) = \log f(x)$，$f(0) = \dfrac{1}{2}$，$f'(0) = \dfrac{8}{3}$ とする．曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(0,\ g(0))$ における接線の方程式を求めよ．

(長岡技科大 2001)　　(m20012101)

0.33 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)) = (\cos t,\ \sin t,\ t)$ で表される曲線を考える．

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ での単位接線ベクトルを求めなさい．

(b) $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で，この曲線に沿って線積分 $\displaystyle\int_C xy^2 ds$ を求めなさい．ただし ds は曲線の線素とする．

(金沢大 2021)　　(m20212213)

0.34 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(x, y)$ における接線が常に x 軸との交点 Q，y 軸との交点 R を持つとき，次の問に答えよ．

(1) P が常に線分 QR の中点であるという条件を，$y = f(x)$ に関する微分方程式で表せ．

(2) 線分 PR が常に x 軸で 2 等分されるという条件を，$y = f(x)$ に関する微分方程式で表せ．

(3) (2) の微分方程式の，点 $(1, 4)$ を通る解曲線 $y = f(x)$ を求めよ．

(富山大 2000)　　(m20002305)

0.35 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ a, b$ は正の定数）によって描かれる $x - y$ 平面上の図形 S について，以下の問いに答えよ．

(1) θ を消去して x, y のみたす関係式を導け．

(2) S の概形を描け．

(3) S 上の点 P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ における S の接線 l の方程式を求めよ．

(4) l が x 軸，y 軸の両方に交わるとき，その交点をそれぞれ A, B とする．線分 AB の長さを求めよ．

(5) 線分 AB の長さの最小値を求めよ．

(富山大 2001)　　(m20012302)

0.36 (1) 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の接線の集合が表す微分方程式を求めよ．

(2) 線形微分方程式 $y' + y = 2 + 2x$ の一般解を求めよ．

(3) 法線影の長さが一定の長さ $a(> 0)$ に等しい曲線群のうち， 原点 $O(0, 0)$ を通る第一象限の曲線を求めよ．ここで法線影とは，曲線上の一点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸の交点を H，P における法線が x 軸と交わる点を N としたときの有向線分 HN の長さをいう．

(富山大 2012)　　(m20122306)

0.37 次の曲線に与えられた点から引いた接線の方程式を求めなさい．

(1) $y = \log x$ ，点 $(0, 0)$

(2) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ ，点 $(2, 2)$

(福井大 2000)　　(m20002401)

0.38 $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ のとき，$t = t_0$ に対応する点 (x_0, y_0) における接線と法線の方程式を求めよ．

(福井大 2006)　　(m20062402)

0.39 (1) 次の関数を微分せよ．

(a) $y = \sin^3 4x$

(b) $y = a^x$

(2) 極座標系 (r, θ) についての方程式 $r = 2a\cos\theta$ の $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求める．以下の各問に従って解答せよ．

なお，必要に応じて右下の公式を利用せよ．

$$\left\{\begin{array}{l} \sin 2A = 2\sin A\cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \\ \cos(A \pm B) = \cos A\cos A \mp \sin A\sin B \end{array}\right\}$$

(a) 極座標系 (r, θ) と直交座標系 (x, y) との関係を求めよ．

$x =$

$y =$

(b) $\theta = \alpha$ における接線の傾き dy/dx を求めよ．

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\theta=\alpha)} =$$

(c) $\theta = \alpha$ における接線の方程式を求めよ．ただし，解答は途中の計算を示すとともに，$\boxed{}$ 内に記号または数字を入れて方程式を完成せよ．

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\left(\boxed{}\boxed{} - \boxed{}\right)}{\boxed{}\,a\cos^2\boxed{}}$$

(福井大 2009)　　(m20092401)

0.40　$f(x) = x^2 - 4x + 5$ とする．関数 $f(x)$ のグラフ上の 2 点 $(2,\ f(2))$ と $(4,\ f(4))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しくなる a の値を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142420)

0.41　接線の x 軸, y 軸にはさまれる部分の中点が, ちょうど接点になっている曲線の方程式を求めよ．

(静岡大 2005)　　(m20052507)

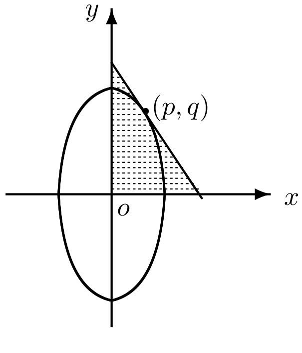
0.42　$y = 2x + \sin x$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(岐阜大 2006)　　(m20062616)

0.43　以下の各問いに答えよ．

(1) $4x^2 + y^2 = 4$ で表される楕円上の点 (p, q) における接線の方程式は，$4px + qy = 4$ となることを示せ．

(2) $p > 0, q > 0$ のとき，問 (1) の接線と x 軸および y 軸で囲まれる面積（下図の斜線部）を最小にしたい．この面積が最小になる楕円上の点 (p_0, q_0) を求める場合の計算方法を示し，その点 (p_0, q_0) の値を示せ．



(豊橋技科大 2000)　　(m20002704)

0.44　2 次曲線 $y = x^2 + (m+2)x + (m^2+4)$ の接線のうち, 原点を通る傾き k_1, k_2 の 2 本の直線のなす角を θ とする. θ が最大となるときの m の値を求めたい. ただし, m は実数, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\tan(\alpha - \beta)$ を $\tan\alpha,\ \tan\beta$ を用いて表せ.

(2) k_1, k_2 を m を用いて表せ.

(3) $\tan\theta$ を m を用いて表せ.

(4) θ が最大となるときの m の値と $\tan\theta$ の値を求めよ.

（豊橋技科大 2004） (m20042705)

0.45 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ が $0 < x < \sqrt{3}$ の範囲において上に凸であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線 h の方程式を求めよ.

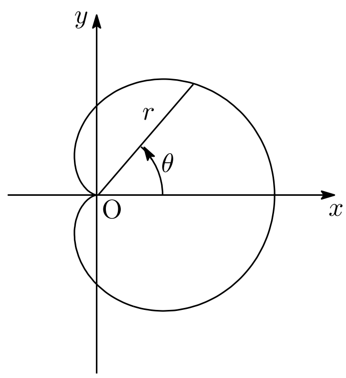
(3) 接線 h と直線 $x = 0$, $x = 1$, および $y = 0$ で囲まれる領域の面積 $S(t)$ を求めよ. ただし, t の範囲は $0 \leq t \leq 1$ とする.

(4) 面積 $S(t)$ が $t = \dfrac{1}{2}$ のときに最小となることを示せ.

(5) $t = \dfrac{1}{2}$ のとき, 曲線 $y = f(x)$ と接線 h, および直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれる領域の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2007) (m20072703)

0.46 極方程式 $r = 1 + \cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線について, 以下の問いに答えよ.



(1) 曲線上の点の座標 (x, y) を, θ を用いて表せ.

(2) 曲線上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ における点を P とする. 点 P における曲線の接線の方程式を, x と y を用いて表せ.

(3) 曲線に囲まれた領域の面積を求めよ.

(4) 曲線の全長を求めよ.

(豊橋技科大 2020) (m20202703)

0.47 次に示す関数 $f(x)$ について, 以下の設問に答えよ.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 10$$

(1) 関数 $f(x)$ の極値をすべて求めよ.

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(3, 7)$ における接線 $y = g(x)$ と曲線 $y = f(x)$ が囲む領域のうち, 領域 $\left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$ に含まれる部分の面積を求めよ.

(豊橋技科大 2021) (m20212704)

0.48 次の曲線 (asteroid) に対して，以下の問いに答えよ． $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0)$

(1) 曲線の長さを求めよ．

(2) 曲線の接線と両座標軸との交点を求め，その 2 点間の長さを求めよ．ただし，接点の座標を (x_0, y_0) で表し，$x_0y_0 \neq 0$ とする．

(3) 曲線が囲む図形の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032801)

0.49 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad (a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) $\theta = \pi$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n：偶数) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n：奇数) \end{cases}$$

ただし，$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n：偶数) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n：奇数) \end{cases}$

(名古屋大 2008)　　(m20082802)

0.50 x, y 平面上に, 中心を点 (a, b) とし, 半径が r の円 A がある. A の外部にある原点 $O(0, 0)$ から, A に引いた 2 本の接線の接点を P, Q とするとき, 以下の (1),(2) に答えよ.

(1) 直線 PQ の方程式を求めよ.

(2) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103115)

0.51 xy 平面上に, 曲線 $C\ :\ y = x^3 + 3x^2 + x$ と点 $A(1, a)$ がある. A を通って C に 3 本の接線が引けるとき, a の値の範囲を求めよ.

(三重大 2010)　　(m20103116)

0.52 (1) 曲線 $y = \log_e x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線が曲線 $y = ae^x$ の接線でもあるとき，定数 a の値を求めよ．

(2) この接線，曲線 $y = ae^x$，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(三重大 2016)　　(m20163112)

0.53 関数 $f(x) = e^x - e^{-x}$ のグラフ G に関して次の問いに答えよ．

(1) 原点におけるグラフ G の接線 L の方程式を求めよ．

(2) 接線 L は，グラフ G と原点以外で交わらないことを示せ．

(3) グラフ G，接線 L および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(奈良女子大 2009)　　(m20093203)

0.54 xy平面上の曲線

$$C\ :\ y = xe^{-x}$$

について次の問に答えよ．

(1) C 上の点 $(a,\ ae^{-a})$ における C の接線の方程式を求めよ．ただし a は実数とする．

(2) C 上の点 $(1,\ e^{-1})$ における C の接線を ℓ とする．C, ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) y 軸上の点 $(0, b)$ を通る C の接線がちょうど 2 本存在するための，b のみたすべき条件を求めよ．

(奈良女子大 2014)　　(m20143207)

0.55 $xy-$ 平面上の曲線

$$C : y = \log(1 + x^2) \ \ (x \geqq\ 0)$$

および C 上の点 $(3,\ \log 10)$ における C の接線 ℓ に対して，次の問に答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C の概形をかけ．

(3) 曲線 C，接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153208)

0.56 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) a を実数とする．$y = f(x)$ の接線で点 $A(a, 0)$ を通るものがちょうど 2 本存在するための a の条件を求めよ．

(奈良女子大 2022)　　(m20223203)

0.57 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の座標系 (x, y) と実数値のパラメータ t を用いて表される曲線

$$C\ :\ \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

について以下の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 曲線 C とその x 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．また，y 軸に平行な接線との接点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C が自分自身と交差する点の座標を求めよ．さらに，その交点において 2 本ある曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(3) (1),(2) の結果を用い，さらに $t \to \pm\infty$ のときの様子に注意して，曲線 C の概形を描け．

(4) 曲線 C によって囲まれる領域の面積を求めよ．

(京都大 2009)　　(m20093301)

0.58 xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて　$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ で与えられている．ここで，r は正の定数とする．このとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1) 曲線 C の長さ l を求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C 上の両端以外の点 P に対して，P における C の法線と x 軸との交点を考え，その座標を $(a, 0)$ とする．P を動かすとき，P における C の接線と直線 $x = a$ との交点は，どのような図形を描くか．

(京都大 2012)　　(m20123303)

0.59　滑らかな曲線 C 上を動く点 P について，次の問 (1)〜(2) に答えよ．なお，図 $4-1$ に示すように，P における曲線の単位接線ベクトルを $\boldsymbol{m}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ と表すものとする．

(1) C 上の点 P とそれに非常に近い点 P_1，P_2 の 3 点を通る円を C_0 とし，C_0 の中心を点 O，半径を ρ，線分 P_1P の中点と線分 PP_2 の中点の間の距離を ds，直線 P_1P と直線 PP_2 のなす角を $d\varphi$，とする（図 $4-1$, $4-2$）．点 P_1，P_2 間の C に変曲点はないものとする．

(a) 直線 P_1P，直線 PP_2 上の単位ベクトル $\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{m}_2$ は近接する 2 つの単位接線ベクトルとみることができ $\boldsymbol{m}_2-\boldsymbol{m}_1=d\boldsymbol{m}$ である．このとき $\left|\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}\right|=\dfrac{1}{\rho}$ となることを示せ．

(b) $\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}$ は $\boldsymbol{m}$ と垂直であり，$\dfrac{d\boldsymbol{m}}{ds}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n}$ となることを示せ．

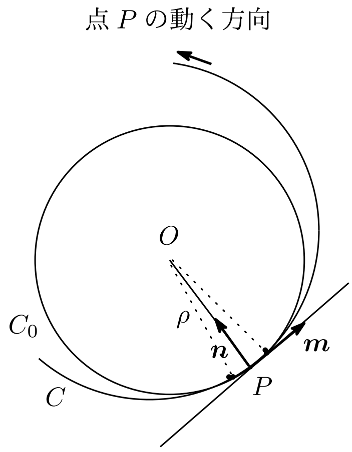


図 $4-1$

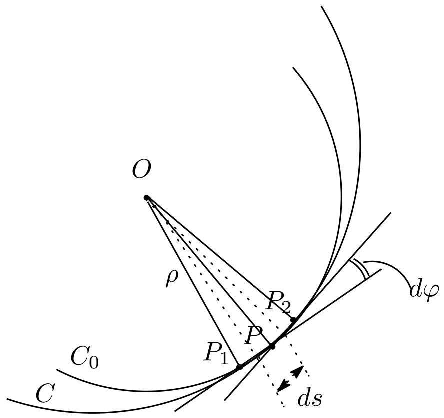


図 $4-2$

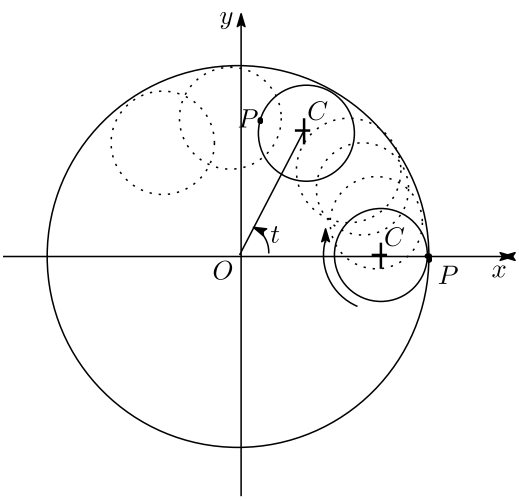
(2) 点 P の時刻 t における位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が，

$\boldsymbol{r}(t)=[b\cos t \quad b\sin t \quad ct]$　（b, c は正の定数）

で表されるとき，P の速度 $\boldsymbol{v}(t)$，および，加速度 $\boldsymbol{a}(t)$ を，P の軌跡における，単位接線ベクトル $\boldsymbol{m}$ と単位主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で表せ．

(京都大 2013)　　(m20133304)

0.60　原点を中心とした半径 a の大円がある．大円の中に半径 $a/4$ の小円があり， 初期状態において座標 $(a,0)$ にある点 P で大円に内接している．　小円が大円に内接したまま時計回りに回転すると，小円は反時計回りに大円の内側を移動する．　点 P は小円の移動と回転に従って移動する．大円と小円の接触点では滑りは生じないものとする．　このとき，(1)〜(6) に答えよ．



(1) 原点 O と小円の中心 C を結ぶ線分と x 軸が成す角が t のとき，　点 P の座標 (x_p, y_p) を t で表せ，ただし，$0 < t < \pi/2$ とする．

(2) 点 P の軌跡のうち第 1 象限の部分 $(0 < t < \pi/2)$ の曲線の方程式を求めよ．

(3) 小円が大円の中を一周して元の位置に戻るまでに点 P が描く軌跡 M を解答用紙に作図せよ．

(4) 軌跡 M の全長を求めよ．

(5) 軌跡 M で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(6) 軌跡 M のうち，$0 < t < \pi/2$ における接線が x 軸および y 軸によって切り取られる線分の長さを求めよ．

(京都大 2016)　　(m20163302)

0.61 平面上に 2 点 A , B がある．線分 AB を直径とする円を考え，その中心を C ，半径を R とする．

(1) 2 点 A , B の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ とし，円周上の任意の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{p}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}) = 0$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(2) この点 P における接線を l とする．接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とし，円の中心点 C の位置ベクトルを $\overrightarrow{c}$ としたとき，

$$(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{q} - \overrightarrow{c}) = R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ．

(3) 2 点 A , B の座標をそれぞれ $(2, 4)$, $(4, 2)$ とする．接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ．

(大阪大 1997)　　(m19973504)

0.62 曲線 C 上の点を $P(x, y)$ で表す．また，P での曲線 C の接線の傾きを y' で表す．P での曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とする．曲線 C 上のすべての点で，線分 PQ の長さが点 Q の x 座標に等しいとき，この曲線がみたす微分方程式を求めよ．この微分方程式を解いて曲線 C の方程式を求めよ．

(大阪大 2009)　　(m20093503)

0.63 曲線 C : $y = u(x)$ 上の点 (x, y) における接線が y 切片 $2xy^2$ をもち，かつ，曲線 C が点 $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ を通るとき，関数 $u(x)$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153502)

0.64 θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x = 2\cos\theta$,　$y = 2\sin 2\theta$ で表される点 (x, y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y = f(x)$ とする．$y = f(x)$ の 1 点 (a, b) における接線の方程式が $y = -2(x - c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ．

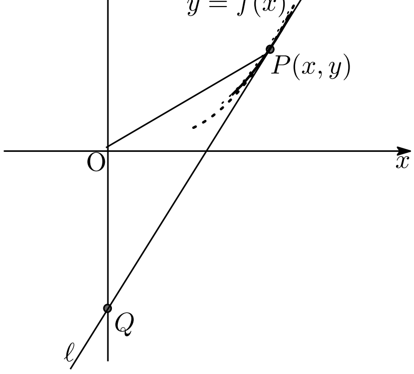
(2) 区間 $0 \leq x \leq a$ における曲線 $y = f(x)$ と区間 $a \leq x \leq c$ における直線 $y = -2(x - c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.65 xy 平面上の $x > 0$ に微分可能な曲線 $y = f(x)$ がある．

この曲線上の点 $P(x, y)$ における接線 ℓ は右図のように y 軸と交わり，その交点を Q とする．

また，右図の O は原点を表す．



(1) x に関する $f(x)$ の一階微分 $f'(x)$ が $f'(x)>0$ であり，線分 $\overline{OP}$ と線分 $\overline{OQ}$ が同じ長さであるとして，x と y の関係を微分方程式で表せ.

(2) $u=\dfrac{y}{x}$ とおくことにより (1) の微分方程式を解いて，曲線 $y=f(x)$ を求めよ.
ただし，曲線は点 $(2,0)$ を通るものとする.

(大阪大 2021)　　(m20213503)

0.66 極座標 (r,θ) で表示して $r=1+\cos\theta$ で表わされる曲線を考える．極座標で $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ と表わせるこの曲線上の点 A での接線の方程式を求めよ.

(広島市立大 2012)　　(m20124203)

0.67 曲線 $y=x^2$ の接線のうち, 点 $(2,3)$ を通る接線をすべて求めなさい.

(山口大 2004)　　(m20044301)

0.68 円 $x^2+y^2=r^2$ の接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P, Q とし， 円と接線の交点を $A(x_0.y_0)$ とする． このとき， 線分 PQ の最小値を求めたい． 以下の問いに答えなさい． ただし，$r>0$ とし，交点 A は第 1 象限 $(x_0>0,\ y_0>0)$ にあるものとする.

(1) 接線の方程式を書きなさい.

(2) 線分 PQ の最小値が $2r$ であることを示しなさい

(山口大 2011)　　(m20114304)

0.69 曲線 $y=x^3+kx+1$ を C とする（k を実数とする）.
点 $P(1,0)$ を通る曲線 C の接線が 3 本存在する時の k の範囲を求めよ.

(山口大 2012)　　(m20124303)

0.70 二つの放物線，$y=x^2+5x+9$ と $y=-\dfrac{x^2}{2}+x-2$ の両方に接する接線の方程式を求めなさい.

(山口大 2016)　　(m20164303)

0.71 $f(x,y)=x^2y-4xy+y^2$ について，次の問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 方程式 $f(x,y)=0$ で表される曲線上の点 $(1,3)$ における接線の方程式を求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(徳島大 2012)　　(m20124402)

0.72 関数 $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\ x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $y=\sin^{-1}x$ とする．次の問いに答えよ.

(1) 開区間 $(-1,1)$ 上で関数 $y=\sin^{-1}x$ を微分せよ.

(2) $y=\sin^{-1}x\quad(-1<x<1)$ の接線の傾きは 1 以上であることを示せ.

(3) 直線 $y=2x$ と平行な，曲線 $y=\sin^{-1}x$ の接線の方程式をすべて求めよ.

(高知大 2009)　　(m20094501)

0.73 定数 a, b が $a>b>0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x= & a\cos t \\ y= & b\sin t \end{cases}\qquad (0\leqq\ t\leqq\ 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.74 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y=x\log x$,　$(a,b)=(e,e)$　　　(b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$,　$(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$　　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010)　　(m20104601)

0.75 曲線 $x^2-y^2=-1$ 上の点 $(1,\ \sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ.

(愛媛大 2017)　　(m20174608)

0.76 次の方程式で与えられる曲線の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ.

$$f(x,y)=x^3-2xy+y^2-x-3=0$$

(愛媛大 2018)　　(m20184603)

0.77 $\phi=x^2+y^2+z$ とするとき, $\phi=0$ は曲面を表す. また, この曲面はパラメータ u,v を用いて $\boldsymbol{r}(x,y,z)=(u,v,-u^2-v^2)$ と表すことができる. ここで, $\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) 曲面上の点 $P=(1,1,-2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる. このときの接平面を表す式を x,y,z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.78 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし, 次の条件を満たすとする.

- C は y 軸上の点 $(0,a)$ $(a>0)$ を通る.
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられ, 第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられる.

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ, 第二象限内では $x=a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し, C の概形を描け.

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ.

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.79 $x^2+y^2=4$ について，$x=1$ における接線の式を求めなさい．

（佐賀大 1999）　(m19994905)

0.80 曲線 $y=2\sin x$ において，

(1) $x=\pi/3$ [rad] の点における接線の傾きを求め，この接線と直交する直線が曲線 y と接する点 (x,y) の値を求めなさい．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

(2) 接線と直交する直線が曲線と接点を持たない x の範囲を式および図で示しなさい．

(佐賀大 2003)　(m20034902)

0.81 $y=ax^2$ $(a>0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上に点 $P(x_p,y_p)$ がある．また，点 P の接線と x 軸との交点を点 A とする．

(1) 点 P を中心点として x 軸に接する円を描く．この円に対して，原点 $(0,0)$ を通る接線 $(y=kx)$ を求めよ．

(2) 交点 A の x 座標値を求めよ．

(3) $y=ax^2$，点 P の接線，x 軸で囲まれる面積 S を求めよ．

(4) 点 P と x 軸の両方に接する円の中心点 $Q(x_q,y_q)$ の座標値 x_q を求めよ．

(佐賀大 2003)　(m20034909)

0.82 点 $(1,4)$ を通る関数 $y=x^2+2x$ の接線は存在しないことを証明しなさい．

(佐賀大 2016)　(m20164909)

0.83 関数 $y=e^{-3x}$ において, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数のグラフを描きなさい.

(2) グラフ曲線上の任意の点 A より x 軸に下ろした垂線の足を B とし, 点 A における接線と x 軸との交点を C とするとき, 線分 BC の長さを求めなさい.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-3x}\,dx$ を求めなさい.

(熊本大 2010)　(m20105203)

0.84 (1) 曲線 $y=\log x$ の $x=a$ における接線の方程式を求めなさい,

(2) 方程式 $\log x=kx$ が実数解を持たない k の範囲を求めなさい.

(鹿児島大 2007)　(m20075406)

0.85 (1) 曲線 $y=x^2$ 上の点 $P(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい．また，そのグラフも描きなさい.

(2) 曲線 $y=x^2$ と (1) で求めた点 P での接線と x 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2008)　(m20085406)

0.86 曲線：$y=2x^2$ と，その曲線上の点 $P(1,2)$ での接線と，x 軸によって囲まれた部分の面積を求めなさい.

(鹿児島大 2011)　(m20115413)

0.87 曲線 $y=f(x)$ の任意の点 $(t,\ f(t))$ における接線が x 軸と点 $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ で交わるような $f(x)$ を求めなさい．ただし，$f(x)$ は微分可能であるとする.

(鹿児島大 2016)　(m20165417)

0.88 曲線 $y=xe^{-2x}+1$ の点 $P(0,1)$ における接線の方程式を求めよ.

(鹿児島大 2017)　(m20175412)

0.89 平面座標系 $(o-xy)$ において，曲線 C を $y=x^2-4x+3$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸との交点の x 座標 $x_1,\ x_2\ \ (x_1>x_2)$ を求めよ．

(2) 曲線 C の頂点の座標 $(x_0,\ y_0)$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を描き，頂点及び x 軸との交点を図示せよ．

(4) 点 $(x_1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ．

(5) 曲線 C と x 軸の囲む面積を求めよ．

(島根大 2015)　　(m20155801)

0.90 xy 座標平面において放物線を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y=x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2>x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.91 平面直交座標系 $(O-xy)$ において曲線 C を $Y=x^3-2x^2+\dfrac{3}{4}x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸の交点は 3 つあるが，1 つは原点 $O(0,0)$ である． 残りの 2 つの点を $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ とするとき，点 $A(x_1,y_1)$ および点 $B(x_2,y_2)$ の座標を求めよ． ただし． $x_1<x_2$ とする．

(2) 原点を通り曲線 C と接する接線は 2 本ある． この 2 本の接線を ℓ_1，ℓ_2 とし，接線 ℓ_1 と曲線 C の接点を $Q(x_3,y_3)$，接線 ℓ_2 と曲線 C の接点を $R(x_4,y_4)$ とする．ただし，$x_3<x_4$ とする． このとき，接線 ℓ_1，ℓ_2 の方程式および接点 $Q(x_3,y_3)$，$R(x_4,y_4)$ の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 接線 ℓ_1 と曲線 C の交点 $S(x_5,y_5)$ の座標を求めよ．ただし，S は接点 Q 以外の点とする．

(4) 接線 ℓ_1 上の線分 QS，接線 ℓ_2 上の線分 OR および曲線 C 上の曲線 RBS で囲まれる領域の面積を求めよ．

(島根大 2019)　　(m20195801)

0.92 曲線 $y=2\sin^2 x$ 上の点 $x=\dfrac{\pi}{4}$ における接線の傾きと，接線の方程式を求めよ．

(工学院大 2004)　　(m20046210)

0.93 t を媒介変数として，方程式

$$x=\cos^3 t\ ,\qquad y=\sin^3 t\qquad \left(0\leqq\ t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

で表される座標平面上の曲線を D とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 D の接線のうち，接点の x 座標が $\dfrac{27}{125}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 D の長さを求めよ．

(はこだて未来大 2014)　　(m20146304)

0.94 (1) $f(x)=e^{x^2+1}$ のマクローリン展開を，4 次の項まで求めなさい.

(2) 曲線 $x^4+3x^2+2xy^2+4y^3-10=0$ の $(x,y)=(1,1)$ における接線の方程式を求めなさい.

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^2+x+1}\,dxdy$,　$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 1\,,\ x\leq y\leq x+1\}$ を求めなさい.

(和歌山大 2009)　　(m20096502)

0.95 xy 平面上において, 原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と, 放物線 $C_2 : y=\dfrac{2}{3}x^2-a\ (a>1)$ を考える. C_2 の接線のうち, 傾きが $\tan\theta$ となるものを l とし, C_2 との接点を P とする. ただし, θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. また, 原点 O を通り, l と直交する直線を m とし, m と円 C_1 との交点のうち第 4 象限の点を Q とする.

(1) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, θ の値を求めよ. また, このときの点 P の座標が $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt{3},\ \dfrac{9}{8}-a\right)$ となることを示せ.

(2) 直線 l の傾きが $\sqrt{3}$ であるとき, 直線 m を表わす方程式を求めよ. また, 点 Q の座標を求めよ.

(3) 3 点 $O,\ P,\ Q$ が同一直線上に並ぶための必要十分条件は $\tan\theta=\sqrt{\dfrac{8}{3}a-2}$ であることを示せ.

(4) $a=\dfrac{9}{8}$ のとき, C_1 上の点と C_2 上の点を結ぶ線分の長さの最小値を求めよ.

(東京工科大 2010)　　(m20106907)