[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：接平面

0.1 関数 $f(x,y)=\log(x^2+2y^2)$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 点 $(2,1)$ における勾配ベクトルを求めなさい．

(2) 点 $(2,1)$ におけるグラフの接平面の，点 $(3,2)$ における z 座標と，接点の z 座標との差を求めなさい．

(秋田大 2012)　(m20120404)

0.2 x,y を実数とし，$0<x<2\pi$，$0<y<2\pi$ の表す領域において，関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ を満足するすべての点 (x,y) を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の極大値，極小値を求めよ．

(4) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の $x=\dfrac{\pi}{2}$，$y=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ．

(東北大 2007)　(m20070505)

0.3 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　(m20090501)

0.4 xyz 空間の曲面 $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a,b,c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z)=0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点となるとき，a,b,c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z)=0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a,b,c の値を求めよ．

(東北大 2015)　(m20150504)

0.5 半径 a の球を考える. ただし, 球の中心は原点とする.

(1) 球面上の任意の点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とおくとき, この点で球面に接する平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{f}$ が満たす方程式を示せ.

(2) 上記 (1) で求めた接平面と x 軸との交点を求めよ. ただし, x 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}_x$ とする.

(3) 上記 (2) で求めた交点の x 座標が $3a$ となるような, 球面上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす方程式を求めよ. また, そのような点 P の集まりはどのような図形を描くか, 図を用いて説明せよ.

(東京大 2001)　　(m20010702)

0.6 (1) 直交座標空間 (x, y, z) において，xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4a^2}=1$ $(a>0)$ が y 軸のまわりを回転してできる表面の方程式を求めよ.

(2) (1) の表面上の点 $(x.y, z)=(x_0, y_0, z_0)$ での接平面の方程式を求めよ．ただし，$z_0>0$ とする.

(3) (1) の表面上において，正の z 成分を持つ 2 点 P_1, P_2 は，それぞれ $\left(\dfrac{a}{2},\ -a\right)$，$\left(-\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2a}{3}\right)$ の (x, y) 成分を持つとする．点 P_1, P_2 での接平面の交線を含み，かつ原点を通る平面の方程式を求めよ.

(東京大 2007)　　(m20070704)

0.7 関数 $z=x^3-3xy+y^3$ の表す曲面を S とする．S 上の点 $P(-2,1,-1)$ における S の接平面の方程式を求めなさい.

(東京農工大 2006)　　(m20060905)

0.8 関数 $f(x, y)=x^2+3xy-y^3+1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

(2) xyz 空間内の曲面 $z=f(x, y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) xy 平面上の曲線 $f(x, y)=0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とする．$\varphi(x)$ を $x=2$ の近くで

$$\varphi(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots$$

とテイラー展開したときの係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ.

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.9 C^1 級関数 $f(r)$ に対して，次の合成関数

$$u(x, y)=f(\sqrt{x^2+y^2}) \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) xyz 空間内の曲面 $S: z=u(x, y)$ を考える．このとき，S 上の点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ f(1))$ における S の接平面と z 軸との交点の z 座標 z_0 を $f(1),\ f'(1)$ を用いて表せ．ただし，α は定数とする.

(2) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ が r の関数として表されることを示せ.

(3) $f(r)=r^2e^{-r^2}$ のとき，次の重積分 I の値を求めよ.

$$I=\iint_D u(x, y)\ dxdy\ , \qquad D=\left\{(x, y)\ \middle|\ x^2+y^2 \leqq 1\right\}$$

(電気通信大 2019)　　(m20191003)

0.10 関数

$$f(x, y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 $S\ :\ z=f(x, y)$ を考える．以下の問いに答えよ.

ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x, y) \neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x, y),\ f_y(x, y)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.11 楕円面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ について以下の問いに答えよ.

(1) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ.

(2) 楕円面上の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式を求めよ.

(3) 楕円面を平面 $z=z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ. ただし, $-c < z_0 < c$ である.

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ.

(筑波大 2000)　　(m20001304)

0.12 球面 $C : x^2+y^2+z^2-6x-4y+4z-8=0$ について以下の問いに答えよ.

(1) C が yz 平面と交わってできる円の中心と半径を求めよ.

(2) C が y 軸から切り取る線分の長さを求めよ.

(3) C 上の点 $A(6,2,2)$ における接平面の方程式を求めよ.

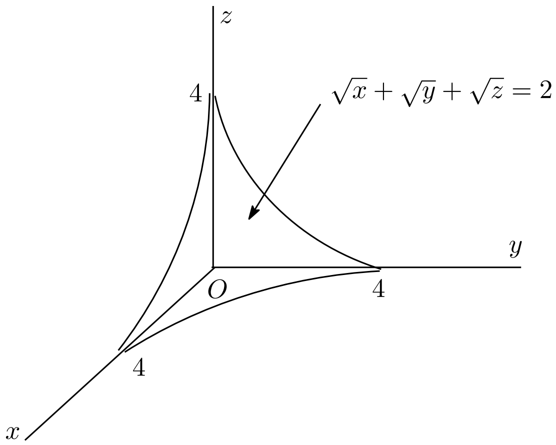
(筑波大 2007)　　(m20071332)

0.13 (1) 複素変数 z のべき関数 $f(z)=z^i$ $(i=\sqrt{-1})$ において, $f(i)$ の値をすべて求めよ.

(2) xyz 空間における曲面 $z=(x+y)^2e^{x-y}$ 上の点 $(1,0,e)$ での接平面の方程式を求めよ.

(筑波大 2009)　　(m20091305)

0.14 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし, 原点 O から点 A, B, C への距離を OA, OB, OC とする. このとき, $OA+OB+OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい.



(筑波大 2011)　　(m20111308)

0.15 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}$ (ただし, $(x,y)\neq(0,0)$) と定義する. ここで, $\log$ は自然対数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ について, 点 $(a,b,f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ.

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x^2+y^2\leq 1\right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon=\left\{(x,y)\,\middle|\,\varepsilon^2<x^2+y^2\leq 1\,,\ \varepsilon\in\boldsymbol{R}\right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.16 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x,y)=(0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x,y)=(1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.17 曲面 $x^2=y(2+3x+z)$ の任意の接平面は，接平面によらない定点 P を通ることを証明して，この点 P の座標を求めなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151318)

0.18 $f(x,y)=x^2+y^2$ とし，xyz 直交座標系において曲面 $S:z=x^2+y^2$ を考える．この座標系上の点を (x,y,z) と表し，座標系の原点を $O(0,0,0)$ とする．

(1) 点 $A(1,1,2)$ における曲面 S の接平面を π とする．π の方程式を求めよ．

(2) (1) の接平面 π と平行で原点 O を通る平面を π_0 とし，平面 π_0 と曲面 S の交線の xy 平面への正射影を曲面 C とする．C はどのような図形になるか．

(3) (2) の平面 π_0 と曲面 S で囲まれた領域を D とする．このとき，3 重積分

$$I=\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$

の値を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191306)

0.19 $z=\dfrac{1}{xy}$, $x>0$, $y>0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x,y)=(1,2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x+3y+9z+18=0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.20 $x+2y+z+e^{2z}-1=0$ から定まる陰関数 $z=f(x,y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が表す曲面上の点 $(x,y,z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x,y)$ の原点 $(x,y)=(0,0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい.

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.21 2 変数関数 $z=f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ について, 以下の各問に答えよ.

(1) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,2,11)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) $a,\ b$ を定数とする. 極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(1+at\,,\ 2+bt)-f(1,2)}{t}$ を求めよ.

(3) 「$f(0,0)$ は極大値である」,「$f(0,0)$ は極小値である」,「$f(0,0)$ は極値ではない」の 3 つの記述の中から正しいものを 1 つ選び, 理由を付けて答えよ.

(茨城大 2010)　　(m20101701)

0.22 座標平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,x,\ y$ は実数で $x^2+y^2\leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x=0.01,\ y=0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n=1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.23 関数 $f(x)$ は R 上で微分可能で導関数 $f'(x)$ が連続であるとする. a を 0 でない定数として

$$z=f(x+ay)$$

と定める. 以下の各問に答えよ.

(1) 次の等式を示せ.

$$\frac{\partial z}{\partial y}-a\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

(2) $z=f(x+ay)$ が表す曲面上の点 $\big(0.0.f(0)\big)$ におけるこの曲面の接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2015)　　(m20151707)

0.24 実 2 変数関数 $f(x,y)=x^3-3x-3y^2$ に対して, xyz 空間内の曲面 S を

$$S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \mid\ z=f(x,y)\big\}$$

とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) k を正の定数とする. 曲面 S 上の点 $(k,k,f(k,k))$ における接平面が原点 $(0,0,0)$ を通るように定数 k の値を定めよ.

(茨城大 2017)　　(m20171702)

0.25 実 2 変数関数 $f(x,y)=x^3+3y^2-3x-6y+2$ を考える. 以下の各問に答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) $z = f(x, y)$ で表される曲面の点 $(1, 2, f(1, 2))$ における接平面の方程式を求めよ.

(茨城大 2019)　　(m20191703)

0.26 $-\infty < x < \infty$ である x に対して, $\tan y = x$ 満たす y で $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす唯一のものを $y = \mathrm{Arctan}\, x$ と表わす. 以下の各問に答えよ.

(1) $\cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ を示せ.

(2) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 上の点 $P = \left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$ での接平面を求めよ.

(3) 関数 $y = x\sqrt{x^2 + 1} + \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ の微分を求めよ.

(4) 曲面 $z = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ の, xy 平面上の有界閉領域 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq 1\right\}$ の真上にある部分の曲面積を求めよ.

(茨城大 2022)　　(m20221702)

0.27 $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2 + 7$ とする. 点 $(1, 2)$ での曲面 $f(x, y) = 0$ の接平面の方程式を求めよ.

(山梨大 2005)　　(m20051805)

0.28 方程式 $z = f(x, y) = x^2 + g(y) - 1$ で表される曲面 S について次の設問に答えよ.
但し, $g(y)$ はすべての y において微分可能な関数である:

(1) 点 $(1, s, f(1, s))$ における曲面 S の接平面 S' の方程式を求めよ.

(2) 接平面 S' の z 軸切片が $z = -3s^4 + 2s^2 - 1$ であるとき, $g(y)$ を求めよ.

(3) $z = f(x, y)$ は $(x, y) = (0, 0)$ に停留点を持つとする. このとき, (2) で求めた $g(y)$ を用いて, $z = f(x, y)$ が極大または極小となる (x, y) およびそのときの極値を全て求めよ.

(山梨大 2016)　　(m20161805)

0.29 次の問に答えよ.

(1) $[a, b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a, b]$ 上で $f''(x) > 0$ となるとする. $0 < h < b - a$ となる h をとるとき $[a, b - h]$ で定義される関数 $g(x) = f(x + h) - f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ.

(2) 曲面 $z = y^2 - x^2$ 上の点 $(1, 2, 3)$ における接平面の方程式を求めよ.

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.30 曲面 $z = x^2 y^3$ 上の点 $(2, 1, 4)$ における接平面の方程式を求めよ.

（新潟大 2004）　　(m20042003)

0.31 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) A を 3 次の実正則行列とする. $\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する. 点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り, 零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を W とする. このとき, $T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り, ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ. ここで, ${}^t(A^{-1})$ は, A の逆行列 A^{-1} の転置行列である.

(2) a, b, c を正の実数とし, 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を C とする. C 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ.

(新潟大 2006)　　(m20062006)

0.32 (1) $z = 4 - x^2 - y^2$ 上の点 $(a, b, 4 - a^2 - b^2)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面が点 $(1, 2, 4)$ を通るとき，接点の軌跡を x- y 平面上に投影してできる図形を求めよ．

(新潟大 2011)　　(m20112008)

0.33 2 変数関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^4 - \dfrac{2}{3}y^3 + 1$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $\left(1,\ 1,\ \dfrac{13}{3}\right)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(3) 平面 $z = 2x + 2y + b$ が曲面 $z = f(x, y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ．

(新潟大 2017)　　(m20172021)

0.34 $z = x^2 + y^2$ とする，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を求めなさい．

(2) 空間の曲面 $z = x^2 + y^2$ 上の点 (a, b, c) における接平面の方程式を求めなさい．

(3) 前問の接平面が点 $(0, 0, -\sqrt{2})$ を通るような c の値を求めなさい．

(長岡技科大 2008)　　(m20082102)

0.35 xyz 空間における曲線 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ について下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $z = x^2 + y^2$ 上の点 $(a, b, a^2 + b^2)$ における接平面の方程式を求めなさい． ただし，曲面 $x = f(x, y)$ 上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式は，f_x, f_y を f の偏導関数とすると，

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で与えられる，

(2) 前問の接平面が点 $(0, 0, -1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 $z = x^2 + y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172104)

0.36 関数 $f(x, y) = (x + y)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ 上で点 $(1, 0, f(1, 0))$ における接平面の方程式を $z = ax + by + c$ と表すとき，定数 a, b, c を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を調べよ．

(3) 次の広義重積分の値を求めよ．必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを利用してよい．

$$\iint_D f(x, y) dxdy, \quad D = \{(x, y) \,|\, x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

(金沢大 2018)　　(m20182208)

0.37 関数 $f(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$ を考える. 座標平面の点 $(1, 2)$ を P とする. 以下の問に答えよ．

(1) 点 P での, x および y に関する偏微分係数を求めよ.

(2) 点 P での, ベクトル $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

(3) 点 P での, 曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2005)　　(m20052303)

0.38 関数 $f(x,y,z)=\exp\{-(x^2+2y^2+z^2)\}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f=c$（c は定数）よって与えられる曲面を等位面という．$f=\dfrac{1}{e}$（e は自然対数の底）となる等位面を S とし，等位面 S が xy 平面と交わる曲線を xy 平面上に図示せよ.

(2) $f=c$ の等位面上の点における法線ベクトルは grad $f(=\nabla f)$ で与えられる．等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における単位法線ベクトルを求めよ.

(3) 等位面 S 上の点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082302)

0.39 $(0,-2,0)$ を中心とする球上の点 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が 3 つの座標軸と交わる点をそれぞれ A,B,C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ．

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.40 2 変数関数 $f(x,y)=x^4-4xy+2y^2$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す.
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ.

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ　$f_{xx}(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極小
- $\phi(x_1, y_1) < 0$ かつ　$f_{xx}(x_1, y_1) < 0$ ならば (x_1, y_1) は極大
- $\phi(x_1, y_1) > 0$ ならば (x_1, y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.41　曲線 S が $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ で与えられたとき, S 上の点 $P(1, 2, 3)$ における S の接平面を求めよ．

(岐阜大 2005)　　(m20052605)

0.42　関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の点 $(1, 2, 9)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) $x(t)$, $y(t)$ はともに t について微分可能な関数で $\left(\dfrac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0$ をみたしており，さらに $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} > 0$ とする．$t = 0$ のとき，

単位ベクトル $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2019)　　(m20192701)

0.43　曲面 $x^2 + y^2/4 + z^2 = 1$ 上の点 $(1/2, \sqrt{2}, 1/2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(名古屋工業大 1998)　　(m19982903)

0.44　関数 $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^3 - y$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $P\big(-1, 1, f(-1, 1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値を調べよ．

(名古屋工業大 2017)　　(m20172901)

0.45　3 次元の xyz 空間において，楕円体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ の面上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ における接平面の方程式を求めよ．ただし，a, b, c はいずれも正の実数とする．

(奈良女子大 2022)　　(m20223206)

0.46　関数 $f(x, y) = x^y \ (x > 0,\ y > 0)$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の 1 階および 2 階の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(e, 1, f(e, 1))$ における接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083403)

0.47　関数 $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ について次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 2, 2)$ における接平面を求めよ．

(2) $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2011)　　(m20113403)

0.48 関数 $F(x,y)=x^3+3xy+y^3$ について次の問に答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,1,5)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 微分可能な関数 $y=y(x)$ が $f(x,y(x))=5$ を満たすとき，導関数 $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123402)

0.49 関数 $f(x,y)=(2x+1)e^{-(x^2+y^2)}$ について，次の問いに答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(0,0,1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2015)　　(m20153402)

0.50 xy 平面上の関数 $f(x,y)=\dfrac{x(y^2-1)}{x^2+1}$ について，次の問いに答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z=f(x,y)$ の，点 $(1,1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183404)

0.51 3 次元空間内の定点 O から定点 A への位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と記すことにして, 以下の問いに答えよ.

(1) 定点 A を中心とする半径 r の球面の方程式が, 次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(2) 上式で表された球面上の 1 点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ とすると, 点 P における球の接平面の方程式が次式で表されることを示せ.

$(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})\cdot(\overrightarrow{\boldsymbol{p}}-\overrightarrow{\boldsymbol{a}})=r^2$

(3) 定点 O を通って上記の球面と交わる直線 l を考える. l 上の長さ 1 のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ として, l と球との交点の一つを Q,　$\overrightarrow{OQ}=t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ とする.　$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $t\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ および半径 r の関係式を求め, その式から得られる t の 2 つの値を t_1, t_2 とすれば積 $t_1\cdot t_2$ は一定になることを示せ.

(大阪大 2005)　　(m20053503)

0.52 x,y 実数とし,

$$f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}\quad(x\neq 0)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) 曲線 $z=f(x,y)$ の, 点 $(1,1,\pi/4)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) $f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ を求めよ.

(神戸大 2010)　　(m20103804)

0.53 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\quad(a,b>0)$ で表される曲面の曲面上の点 (x_0,y_0,z_0), $(x_0\neq 0,\ y_0\neq 0)$ における 接平面と法線の方程式を求めよ.

(鳥取大 2007)　　(m20073905)

0.54 $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3) (2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ を求めよ．

(広島大 2009) (m20094105)

0.55 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ とする．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(3) 空間における領域

$$\Omega=\Big\{(x,y,z)\ :\ x^2+y^2\leqq\ a^2\ \ 0\leqq\ z\leqq\ f(x,y)\Big\}$$

の体積を求めよ．ただし，$0<a<1$ とする．

(愛媛大 2013) (m20134603)

0.56 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+2x^2+3y^2}$ とする．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $\big(2,1,f(2,1)\big)$ における接平面の方程式を求めよ．

(愛媛大 2022) (m20224608)

0.57 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z=f(x,y)$ で定義される曲面の点 (a,b,c)，$c=f(a,b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003) (m20034702)

0.58 $f=x^2+y^2+\dfrac{1}{4}z^2-1$ とする. 座標系の原点を O，x,y,z 軸上で正の向きをもつ単位ベクトルをそれぞれ i,j,k とし, 以下の問に答えよ．

(1) スカラー場 f の勾配を計算せよ．

(2) 曲面 $f=0$ 上の点 $P(x_0,y_0,z_0)$ における勾配ベクトル a とベクトル $\overrightarrow{OP}$ とのなす角を，z_0 を用いて表せ．

(3) $x=\sin\theta\cos\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，$z=2\cos\theta$ とおく．ただし，$0\leq\theta\leq\pi$，$0\leq\varphi\leq 2\pi$ である. 曲面 $f=0$ 上の点 $Q(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ 2\cos\theta)$ における接平面を張る二つのベクトルの組を示し, 法線ベクトルを計算せよ．

(4) (3) と同じ表記の下で, $0\leq\theta\leq\theta_0$，$0\leq\varphi\leq 2\pi$ により囲まれる曲面の面積を $S(\theta_0)$ とする．$\dfrac{dS}{d\theta_0}$ を求めよ．ただし, $0\leq\theta_0\leq\pi$ である．

（九州大 2004） (m20044707)

0.59 $\phi=x^2+y^2+z$ とするとき，$\phi=0$ は曲面を表す． また，この曲面はパラメータ u,v を用いて $\boldsymbol{r}(x,y,z)=(u,v,-u^2-v^2)$ と表すことができる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元空間での点ベクトルである．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) 曲面上の点 $P=(1,1,-2)$ における u 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と v 方向の接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求めよ.

(2) この 2 つの接線ベクトル $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ によって作られる平面は曲面上の点 P における接平面となる. このときの接平面を表す式を x,y,z を用いて表せ.

(九州大 2007)　　(m20074703)

0.60 曲面 $z=x^2+y^2$ の点 $(3,4,25)$ における接平面と法線の式を求めよ.

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034803)

0.61 2 変数関数 $z=f(x,y)=e^{-x}\sin y$ について, 次の各問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めよ.

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の上の点 $P\left(0,\dfrac{\pi}{2},1\right)$ における接平面の方程式を求めよ.

（宮崎大 2004）　　(m20045301)

0.62 2 つの 2 変数関数

$f(x,y)=x^3+2x^2y-4x+y$,

$g(x,y)=e^{-x^2-y^1}$

について, 次の各問いに答えよ.

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $g_x(x,y)$, $g_y(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ における値 $f(0,0)$, $g(0,0)$, そして $(x,y)=(0,0)$ における偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $g_x(0,0)$, $g_y(0,0)$ を求めよ.

(2) $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\big(0,0,f(0,0)\big)$, $\big(0,0,g(0,0)\big)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ.
ただし, 曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\big(a,b,h(a,b)\big)$ における接平面の方程式は

$z-h(a,b)=h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$

である.

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば, 交わりの図形を表す方程式を求めよ. 交わらないならばその理由を書け.

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.63 以下の式で表される多変数関数 z について, 次の問いに答えよ.

$$z=\sqrt{25-x^2-y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ.

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ.

(3) この曲面上の $x=2$, $y=2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする. V の値を求めるための二重積分の式, ならびにその積分領域 D を数式で表せ.
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.64 $z=2y^3-x^2y+3$ の $(x,y)=(2,1)$ における接平面の方程式を求めよ.

(香川大 2018)　　(m20185702)

0.65 $z = 2x^3 + x^2y + 3y^2 + 1$ の $x = 1,\ y = 3$ における接平面の方程式を求めよ.

(香川大 2021) (m20215702)

0.66 $f(x,y) = \dfrac{4}{(2 + x^2 + y)^2}$ とする．次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の偏導関数を求めよ.

(2) 点 $P(1,-1,1)$ における，曲面 $z = f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) $a > 0$ に対して，$D(a) = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \leq x \leq a\ ,\ 0 \leq y \leq x^2\right\}$ とおく.
2 重積分 $I(a) = \displaystyle\iint_{d(a)} f(x,y)\, dxdy$ を計算せよ．さらに $\displaystyle\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ.

(島根大 2020) (m20205807)

0.67 曲面 $z = \sqrt{x^2 + y}$ の $(x,y) = (1,3)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2007) (m20076505)

0.68 曲面 $z = e^{x-y-1}$ の $(x,y,z) = (3,2,1)$ における接平面の方程式を求めなさい.

(和歌山大 2010) (m20106507)

0.69 関数 $z = x + y^2$ のグラフ上の点 $(x,y,z) = (0,0,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(和歌山大 2022) (m20226503)