[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：初期条件

0.1 t を実変数，x, y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y \qquad (\mathbf{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる．

$$\frac{dr}{dt} = Ar \qquad (\mathbf{b})$$

ここで，行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ．

(1) 実定数を成分とする 2 行 2 列の正則行列 P を導入すると，上記の (**b**) が次のように書きかえられることを示しなさい．

$$\frac{dR}{dt} = BR \qquad (\mathbf{c})$$

ここで，B, R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる．

$$B = P^{-1}AP, \quad R = P^{-1}r$$

(2) P を次のようにとると，B が対角行列になることが分かった．

$$P = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $\det P\,, P$ の逆行列 P^{-1}，および B を求めよ．

(3) 次式のように，列ベクトル R の成分を X, Y とする．

$$R = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 (**c**) を解き，X, Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ．

(4) $t = 0$ において $x = x_0, y = y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 (**a**) の解を求めよ．

(岩手大 1996)　(m19960304)

0.2 2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \sin \Omega t$$

について, 次の問いに答えなさい. ただし, 初期条件

$$t = 0 \text{ のとき}, \ x = \frac{dx}{dt} = 0$$

とする. また, ω と Ω は正の定数とする.

(1) $\omega \neq \Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(2) $\omega = \Omega$ のとき, 微分方程式の解を求めなさい.

(岩手大 2010)　(m20100303)

0.3　2 階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　関数 $y = A\sin 3x - B\cos 3x$（A, B は任意定数）は一般解であることを証明しなさい．

(2)　初期条件「$x = 0$ のとき $y = 1$, $y' = 3$」を満たす特殊解を求めなさい．

(3)　境界条件「$x = \dfrac{\pi}{3}$のとき $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{9}$のとき $y = 1$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120304)

0.4　2 階微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 14$ について，次の問いに答えなさい．

(1)　上の微分方程式の特性方程式 $S^2 + 3S + 2 = 0$ の解を求めなさい．

(2)　微分方程式 $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 14$ の一般解を求めなさい．

(3)　上の (2) の微分方程式について，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$ を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160303)

0.5　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{2x + y - 1}$ に関する次の問いに答えなさい．

(1)　$u = 2x + y - 1$ とおき，与えられた微分方程式を変数分離形になおしなさい．

(2)　この微分方程式の一般解を求めなさい．

(3)　初期条件「$x = 1$ のとき $y = -1$」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2017)　　(m20170304)

0.6　微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 2x$ について，以下の問いに答えなさい．

(1)　微分方程式の特性方程式を示し，その解を求めなさい．

(2)　微分方程式の一般解を求めなさい．

(3)　微分方程式について，初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ をみたす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2018)　　(m20180304)

0.7　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} - y = -2y^2$ について，次の問に答えなさい．

(1)　$u = y^{-1}$ とおき，与えられた微分方程式を線形微分方程式になおしなさい．

(2)　与えられた微分方程式の一般解を求めなさい．

(3)　初期条件「 $x = 0$ のとき $y = \dfrac{1}{4}$ 」を満たす特殊解を求めなさい．

(岩手大 2020)　　(m20200304)

0.8　関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} - 2x\frac{df(x)}{dx} + 2f(x) = 0 \qquad (x \geqq 1) \tag{a}$$

および，初期条件

$$x = 1 \text{ のとき } \quad f = 1,\ \frac{df}{dx} = 0 \tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1)　方程式 (a) は，変数変換 $t = \log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t = 0 \text{ のとき } \quad y = 1,\ \frac{dy}{dt} = 0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な 2×2 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.9 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005)　　(m20050503)

0.10 t を実数とし，２つの関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ により与えられる xy 平面上の点 $P\,(x(t), y(t))$ を考える．$x(t)$ および $y(t)$ が以下の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \alpha y \end{cases}$$

および初期条件

$$(x(0), y(0)) = (1, 1)$$

を満足するとする．ただし，α は実数の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(2) $\alpha \neq 0$ のとき，与えられた連立微分方程式の解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ．

(3) $t\ (t \geqq 0)$ が変化するとき，点 P が描く曲線の概形を $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$ の場合について描け.

(東北大 2008)　　(m20080502)

0.11 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100504)

0.12 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2x \qquad ③$$

の一般解を求めよ. ここで a は正の定数である.

(2) ③の一般解に対して $at \ll 1$ の場合を考えると, これが $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ の一般解に一致することを示せ.

(3) ③の微分方程式を $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = v_0$ という初期条件の下で解き, その解が $t \to \infty$ で有限な値を持つための条件を求めよ.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100607)

0.13 常微分方程式 $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$（$\lambda$ は正の実数）を解きなさい. ただし初期条件を $t = 0$ で $N = N_0$ とすること.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160605)

0.14 以下の (1)〜(3) に答えよ.

(1) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$x^2\frac{dy}{dx} - xy - y^2 = 0$$

(2) 以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2x + 3$$

(3) 以下の微分方程式を ( ) 内の初期条件のもとで解け.

$$(a)\ \cos x\cos^2 y + \frac{dy}{dx}\sin^2 x\sin y = 0 \qquad \left(x = \frac{\pi}{2},\ y = 0\right)$$

$$(b)\ \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \qquad \left(x = 0,\ y = 1\ \ and\ \ x = \frac{\pi}{4},\ y = 0\right)$$

(お茶の水女子大 2019)　　(m20190601)

0.15 連立微分方程式 $dy(x)/dx = cz(x)$, $dz(x)/dx = cy(x)$ の解を初期条件 $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ の下で求めよ. (ただし, c は定数)

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200608)

0.16 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

の一般解を, $b^2 - \omega^2 \leq 0$ の場合について求めよ.

(2) 上式を，初期条件　$t=0$ で　$x=0$，　$\dfrac{dx}{dt}=1$　のもとに解き，$b>0$ の時の解の特徴を表す概略グラフを描け.

(東京大 1998)　　(m19980701)

0.17 次の微分方程式を，初期条件 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ のもとに解け．ただし，e は自然対数の底である，また，$y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

$$y''-4y'+3y=e^{-x}$$

(東京大 2013)　　(m20130706)

0.18 (1) 関数 $y(x)$ に関する次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+2xy-x^2}{2x^2}$$

(2) 関数 $q(t)$ に関する次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，$R,\ C,\ E$ は 0 ではない正の実定数である．また，$q(t)\leqq CE$ が成り立つ．

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$

(a) 一般解を求めよ．

(b) 初期条件 $t=0,\ q(t)=0$ を満たす解を求めよ．

(c) 前問 (b) で求めた解の $t\geqq 0$ におけるグラフの概形を描け．

(3) 関数 $x(t)$ に関する次の 2 階の微分方程式について，

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

下記のように変数変換を行なって 1 階の連立微分方程式に書き換えるとき，係数行列 A を求めよ．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1=x,\quad x_2=\frac{dx}{dt}$$

ただし，$m,\ c,\ k$ は実数定数であって，m は 0 ではない．

(東京大 2017)　　(m20170701)

0.19 微分方程式 $y'=\dfrac{y}{x^2+1}$ の解 $y=y(x)$ で，初期条件 $y(1)=e^{\frac{\pi}{2}}$ を満たすものを求めなさい.

(東京農工大 2006)　　(m20060907)

0.20 x の関数 y について，次の問いに答えなさい．

(1) 微分方程式　$y'+y=1$ を解きなさい．

(2) 微分方程式　$2y'-y=-y^3$ $\left(\text{初期条件 } x=0,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を，$z=\dfrac{1}{y^2}$ と置いて，z の微分方程式に書き換えて解きなさい．

(東京農工大 2008)　　(m20080904)

0.21 t の関数 $x=x(t),\ y=y(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{cases} x'-3x+y=-2e^{2t} \\ 6x+y'-4y=4e^{2t} \end{cases}$$

の解で，初期条件 $x(0)=4,\ y(0)=1$ を満たすものを求めなさい．ただし，$x'=\dfrac{dx}{dt},\ y'=\dfrac{dy}{dt}$ である．

(東京農工大 2018)　　(m20180904)

0.22 x の関数 $y=y(x)$ についての微分方程式 $\quad y''+6y'+9y=3e^{-3x}\quad$ の解で，

初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=1$ を満たすものを求めなさい．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である．

(東京農工大 2020) (m20200904)

0.23 以下の各問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y'=y^2-1$ の解 $y=y(x)$ で，初期条件 $y(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(2) 次の各微分方程式の一般解をそれぞれ求めよ．

(i) $y'+2y\cos x=\cos x$ (ii) $y''+2y'+2y=\cos 3x$

(電気通信大 2019) (m20191004)

0.24 次の微分方程式を解き，与えられた初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $(2x+y)+(4x+2y-3)\dfrac{dy}{dx}=0$ 初期条件 ： $x=2$ のとき , $y=-1$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6y=-4e^{2x}$ 初期条件 ： $x=0$ のとき , $y=2$, $\dfrac{dy}{dx}=0$

(横浜国立大 2007) (m20071102)

0.25 以下の 3 問から 2 問選択して解答せよ．3 問解答してはならない．

(1) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $y'=\dfrac{4x-2y}{2x-y-1}$

(2) 次の微分方程式の一般解を求めよ． $y''-y'+y=0$

(3) 微分方程式 $xy'-y-x\log x=0$ において，初期条件 $y(1)=0$ を満たす特殊解を求めよ．

(横浜国立大 2016) (m20161103)

0.26 次の微分方程式の初期条件を満たす解を求め，$x\geq 0$ の範囲で解曲線を図示しなさい．

$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=2\cos x$ 初期条件 ： $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(千葉大 2002) (m20021203)

0.27 次の微分方程式を与えられた初期条件のもとで解きなさい．

(1) $y'+y+y^2=0$, $y(0)=1$

(2) $y'+y+x=0$, $y(0)=2$

(千葉大 2012) (m20121203)

0.28 次の微分方程式の一般解を求め，与えられた初期条件を満たす解曲線の概形を図示しなさい．

(1) $\left(x^2-xy\right)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$ 初期条件：$x=e,\ y=e$, ここで，e は自然数の底である．

（ヒント：$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて未知関数 $y(x)$ を $u(x)$ に変換する ）

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+17y=0,\ x\geq 0$ 初期条件：$x=0,\ y=1,\ y'=-1$

(千葉大 2015) (m20151204)

0.29 次の微分方程式を解きなさい．

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=\sin t$ 初期条件：$t=0,\ y=1,\ \dfrac{dy}{dt}=1+\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4xe^{x^2}$ の一般解を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161204)

0.30　次の微分方程式を解きなさい.

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=-2$，初期条件 $t=0$ のとき $y=2,\ \dfrac{dy}{dt}=0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=\cos t-2t$ の一般解を求めなさい.

(千葉大 2017)　　(m20171204)

0.31　環境中における生物の増殖速度は条件が良好な場合，個体数濃度 (x) に比例する．すなわち，比例定数（マルサス指数）を m として，

$$\frac{dx}{dt}=mx \qquad \text{(式 1)}$$

と書くことができる．この数理モデルについて以下の問いに答えなさい．

(1) (式 1) を初期条件 $t=0$ において $x=x_0$ として解き，グラフに図示しなさい．

(2) 環境容量の有限性を考えると (1) の答えは，時間が経過していくと不合理である．この場合，増殖速度は個体数濃度 (x) と空き容量 $(K-x)$ の積に比例するとして

$$\frac{dx}{dt}=mx(K-x) \qquad \text{(式 2)}$$

と変更される．K は環境容量を表す定数．(式 2) を初期条件 $t=0$ において $x=x_0$ として解き，x の時間変化の概略をグラフに示し，$x\to\infty$ の挙動を説明しなさい．

(筑波大 2006)　　(m20061302)

0.32　独立変数が 1 個 (t)，従属変数が 2 個 $(x=x(t),\ y=y(t))$ の連立微分方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+\sqrt{2}y \\ \dfrac{dy}{dt}=\sqrt{2}x+y \end{cases}$$

を考える．初期条件を $x(0)=x_0$，$y(0)=y_0$ としたときの解を次の設問に従って求めよ．

(1) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ とおいて，与えられた微分方程式を行列 A を使って，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ の形に書き換える．A を具体的な行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）し，それを $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ とする．

(3) $\boldsymbol{x}(t)=c_1(t)\boldsymbol{p}_1+c_2(t)\boldsymbol{p}_2$ とおくことにする．$c_1(0),\ c_2(0)$ は x_0，y_0 を使ってどう書けるか．

(4) $c_1(t),\ c_2(t)$ が満たす（t に関する）微分方程式を求めよ．

(5) 前問 (4) で求めた微分方程式を解いて，$c_1(t),\ c_2(t)$ を求めよ．初期条件 $c_1(0),\ c_2(0)$ は，設問 (3) で得ていることに注意せよ．

(6) $x(t),\ y(t)$ を x_0，y_0 を使って表せ．

(筑波大 2009)　　(m20091310)

0.33　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) (2) で求めた $\{\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を使って行列 P を $P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおくとき，その逆行列 P^{-1} は P の転置行列 ${}^tP$ で与えられる．これは P がどのような行列であることによる性質か．また，P^{-1} および $P^{-1}AP$ はどうなるかを書け．

(4) 連立線形微分方程式 $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = -A\boldsymbol{r}(t)$ を考える．ここで，$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ である．

$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ とおくとき，$q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)$ が満たす微分方程式をそれぞれ求めよ．さらに，その一般解を求めよ．

(5) 初期条件が $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{z}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と与えられたとき，$x(t), y(t), z(t)$ を求めよ．ここで，$\dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt},\ \dot{y}(t) = \dfrac{dy(t)}{dt},\ \dot{z}(t) = \dfrac{dz(t)}{dt}$ である．

(筑波大 2014)　　(m20141311)

0.34 連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) - y(t) + 2z(t)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = x(t) + 3y(t)$$
$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) + y(t) + z(t)$$

を初期条件 $x(0) = 4,\ y(0) = 4,\ z(0) = 1$ の下で解け．

(筑波大 2015)　　(m20151309)

0.35 (1) 以下の微分方程式を解け．

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \tan x \cdot \tan y$

(b) $\cos x \dfrac{dy}{dx} - y \sin x = 2\cos x\ \sin x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = e^x$

(2) $y(t)$ が時刻 t における物体の位置を表すとすると, $f'(t)$ は速度, $f''(t)$ は加速度を表す．

(a) 下記の運動方程式を満たすこの物体の位置 $y(t)$ を求めよ．

$y''(t) + k^2 y(t) = 0$　($k > 0$ の定数)

(b) 初期条件　$y(0) = A_0\ ,\ y'(0) = 0$　を満たす解を求めよ．

(埼玉大 2010)　　(m20101408)

0.36 $x = x(t),\ y = y(t)$ のとき，次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0,\ y(0) = 1$ のもとで解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

(茨城大 2008)　　(m20081706)

0.37 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x$ を解け.

(2) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ を解け.

(3) 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ のもとで解け.

$$\frac{dx}{dt} = -y\ , \quad \frac{dy}{dt} = x$$

(茨城大 2009) (m20091703)

0.38 初期条件 $x = 1$, $y = 1$ のもとで, 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} = y(1+y)$ の解を求めよ.

(茨城大 2010) (m20101703)

0.39 以下の各問に答えよ.

(1) 初期条件 $x = 0,\ y = 1$ のもとで, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = xy$ を解け.

(2) 初期条件 $x = 0,\ y = 1$ のもとで, 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x + y$ を解け.

(茨城大 2012) (m20121706)

0.40 $x = x(t),\ y = y(t)$ のとき, 次の連立微分方程式を初期条件 $x(0) = 5$, $y(0) = 2$ のもとで解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 4y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \ \ x - 2y \end{cases}$$

(茨城大 2013) (m20131704)

0.41 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} + \frac{y}{x} \ \cdots\cdots\ (*)$$

について, 以下の各問に答えよ.

(1) 新しい未知関数 $u = u(x)$ を $u = \dfrac{y}{x}$ によって定義する. このとき, 微分方程式 $(*)$ を $u = u(x)$ に関する微分方程式に書き換えよ.

(2) 初期条件 $x = 2,\ y = 4$ のもとで, 微分方程式 $(*)$ の解を求めよ.

(茨城大 2014) (m20141703)

0.42 $x = x(t)$ に関する 2 つの微分方程式

(i) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 0$

(ii) $x'' - 4tx' + (4t^2 - 3)x = 4t^4 - 11t^2 + 2$

について, 以下の各問に答えよ. ただし, (1),(2) は答のみを書けばよい.

(1) $x_1(t) = e^{t^2+t},\ x_2(t) = e^{t^2-t}$ はそれぞれ (i) の解である. (i) の一般解を求めよ.

(2) $x_0(t) = t^2$ は (ii) の解の 1 つである. (ii) の一般解を求めよ.

(3) 初期条件 $x(0) = 0,\ x'(0) = 2$ のもとで (ii) の解を求めよ.

(茨城大 2020) (m20201706)

0.43 虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0=I,\qquad e^X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n=I+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J}=f(\theta)I+g(\theta)J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\qquad=1-\frac{1}{2!}\theta^2+\cdots$$

$$\sin\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}=\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t)=\omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}p(t)\\q(t)\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}p(t)\\q(t)\end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix}p(t)\\q(t)\end{pmatrix}=e^{Kt}\begin{pmatrix}p(0)\\q(0)\end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0)=p_0$，$q(0)=q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.44 連立微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}$$

の初期条件 ： $x(0)=0$, $y(0)=1$ を満たす解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ について，以下の問に答えよ．

(1)　$z(t) = x(t) + y(t)$　とおくとき，　$z = z(t)$　が満たす微分方程式および初期条件を求めよ．

(2)　$z(t)$　を求めよ．

(3)　$x(t)$, $y(t)$　を求めよ．

(長岡技科大 1995）　　(m19952103)

0.45　(1)　微分方程式 ： $\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$ の初期条件 $y(0) = b$ を満たす解を求めよ. ここで a, b は定数である.

(2)　微分できる関数 $f(t)$ に対して, $z = f(x + 2y)$ とおく. この z が $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$ を満たし, かつ $f(0) = 2$ となる $f(t)$ を求めよ.

(長岡技科大 2005)　　(m20052105)

0.46　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + ay = 0$ (a は $a > 1$ なる定数) について、以下の問に答えなさい.

(1)　一般解を求めなさい.

(2)　初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ を満たす解を求めなさい.

(3)　前問で求めた解が $y(\pi) = 0$ を満たすような定数 a の値を求めなさい.

(長岡技科大 2006)　　(m20062104)

0.47　微分方程式 $y'' - \dfrac{(y')^2}{y} + y = 0$ の解で初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たすものを $y = y(x)$ とする. 以下の問いに答えなさい.

(1)　$z = \log y$ とおくとき, $z = z(x)$ の満たす微分方程式を求めなさい.

(2)　y を求めなさい.

(長岡技科大 2007)　　(m20072105)

0.48　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$（$\omega$ は正の定数）について, 以下の問いに答えよ.

(1)　一般解を求めよ.

(2)　初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解を求めなさい.

(3)　前問で求めた解が $y(1) = 0$ を満たすような ω の値を求めなさい.

(長岡技科大 2008)　　(m20082104)

0.49　連立微分方程式

$$\begin{cases} x'(t) &= -4y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{cases}$$

について以下の問いに答えなさい.

(1)　一般解を求めなさい.

(2)　初期条件 $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ を満たす解を求めなさい.

(長岡技科大 2009)　　(m20092104)

0.50　t の関数 $x(t)$ に対し, 初期条件 $x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$ の下で, 微分方程式 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ の解を求めなさい. ただし, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt},\ \ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ であり, $0 < \gamma < \omega_0$ とする.

(金沢大 2021)　　(m20212212)

0.51　(1)　次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = t + e^t$$

(2) 次の常微分方程式を解き，初期条件 $t=0$ で $x=x_0$ を満たす特殊解を求めよ.;

$\dfrac{dx}{dt} - x = -2x^2$

(3) 次の方程式で表される曲線族が満たす微分方程式を導け．また，この曲線族の直交曲線を求めよ．(α は曲線族のパラメータ)

$y^2 + \alpha x = 0$

(富山大 2021)　　(m20212305)

0.52 次式に示す微分方程式に対して下記の設問に答えよ．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - ax(t) = 0 \quad (\text{a は非零の実定数})$$

(1) 次に示す初期条件の下で解 $x(t)$ を求めよ．また，$a>0$，$a<0$ に対する解 $x(t)$ の特徴を明らかにせよ．

$$x(0) = x_0\,,\quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

(2) $a>0$ とする．このとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ を満たす非零の初期条件を求めよ．

(福井大 2003)　　(m20032411)

0.53 微分方程式 $\dfrac{df(x)}{dx} = f(x)$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 一般解を求めよ.　　(2) 初期条件 $f(0)=1$ のもとに解け.

(福井大 2007)　　(m20072413)

0.54 次の微分方程式の一般解を導出して, 初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$ 　($x=1$ のとき，$y=0$)

(2) $x\dfrac{dy}{dx} + x + y = 0$ 　($x=1$ のとき，$y=0$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (x+y)^2$ 　($x=1$ のとき，$y=-1$)

(福井大 2010)　　(m20102410)

0.55 つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$ 　(初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 2e^x$ 　(初期条件 : $x=0$ のとき，$y=1$)

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin x\,\cos x$ 　(初期条件 : $x=0$ のとき，$y=0$)

(福井大 2011)　　(m20112408)

0.56 つぎの微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$ 　(初期条件 ：$x=0$ のとき，$y=0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = \sin x$ 　(初期条件 ：$x=0$ のとき，$y=0$)

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x(1-x^2)$ 　(初期条件 ：$x=1$ のとき，$y=0$)

(福井大 2012)　　(m20122411)

0.57 次の微分方程式の一般項を導出して，初期条件を満たす解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+x^2y=x^2$ （初期条件：$x=0$ のとき $y=2$ ）

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y^2+y$ （初期条件：$x=0$ のとき $y=1$ ）

なお，必要であれば，$\dfrac{1}{y^2+y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}$ の関係を用いること．

(3) $\dfrac{dy}{dx}+2y\tan x=\sin x$ （初期条件：$x=0$ のとき $y=0$ ）

(福井大 2013) (m20132414)

0.58 次の微分方程式の一般解を導出して，初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y=x$ (初期条件：$x=0$ のとき，$y=1$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ (初期条件：$x=0$ のとき，$y=0$)

(福井大 2014) (m20142411)

0.59 次の微分方程式にいて，以下の (1)〜(3) の問いに答えよ．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2a\frac{dx}{dt}+b^2x=0$$

ただし，x は $t(t \geqq 0)$ の関数で，a および b は正の定数である．

(1) $a<b$ の場合，この微分方程式の一般解を求めよ．

(2) $a<b$ の場合，初期条件「$t=0$ のとき，$x=x_0$，$\dfrac{dx}{dt}=0$」のもとでこの微分方程式の解を求めよ．

(3) $a=b$ の場合，初期条件「$t=0$ のとき，$x=0$，$\dfrac{dx}{dt}=1$」のもとでこの微分方程式の解を求め，t と x の関係を図示せよ．

(福井大 2018) (m20182412)

0.60 (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=xe^{x+y}$ の一般解を求めよ．

(2) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\cos x}{\sin x}y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ の初期条件 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ を満たす解を求めよ．

(静岡大 2008) (m20082503)

0.61 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 一般解を求めよ．

(2) 初期条件

$$y(0)=\frac{1}{2}, \qquad \frac{dy}{dx}(0)=2$$

を満たす特殊解を求めよ．

(3) 一般に，微分方程式（a,b は定数とする）

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

の 2 つの解を $y_1(x),y_2(x)$ とするとき，

$$f(x)=\frac{dy_1}{dx}y_2-y_1\frac{dy_2}{dx}$$

が満たす微分方程式を求めよ．また，この $f(x)$ が，ある x_0 で $f(x_0)\neq 0$ ならば，すべての x で $f(x)\neq 0$ であることを示せ．

(岐阜大 2000) (m20002601)

0.62 初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=1$ を満たす，次の微分方程式の解を求めよ．

$$y''+3y'+2y=0$$

(岐阜大 2003) (m20032605)

0.63 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=(1-y)y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 初期条件 $y(0)=a$ をみたす解を求めよ．ただし，a は正の実数とする．

(2) 上で求めた解 $y(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x)$ を求めよ．

(岐阜大 2007) (m20072605)

0.64 次の微分方程式を，与えられた初期条件の基で解け．

$$x^2\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{初期条件は，} x=1 \text{ で } y=1 .$$

(岐阜大 2007) (m20072617)

0.65 微分方程式 $y\dfrac{dy}{dx}=e^{2x}$ の一般解と初期条件 $y(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ．

(岐阜大 2007) (m20072624)

0.66 y は x の関数であるとする．微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cos x$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 初期条件 $y(0)=0$ を満たす解を求めよ．

(2) 上で求めた解 $y(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値を求めよ．

(岐阜大 2009) (m20092606)

0.67 $y(x)$ を未知関数とする, 次の常微分方程式 (A) について, 以下の問いに答えよ.

$$y'(x)-\tan(x)\,y(x)=2e^{2\sin(x)}\ , \qquad -\pi/2<x<\pi/2 \tag{A}$$

(1) $y(x;y_0)$ を初期条件 $y(0)=y_0$ を満たす微分方程式 (A) の解とするとき, $y(x;y_0)$ を求めよ. ただし, y_0 は実数とする.

(2) (1) の解 $y(x;y_0)$ について, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x;y_0)$ が有限な値となるような初期値 y_0 はあるか. もしもあるなら, そのときの初期値 y_0 と $\displaystyle\lim_{x\to-\pi/2} y(x;y_0)$ を求めよ. また, もしもないのであれば, その理由を述べよ.

(岐阜大 2010) (m20102605)

0.68 $y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1) \quad y'-yx=0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2) \quad y'-yx\cos(x^2)=0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，$\alpha,\ \beta$ を実数とする．微分方程式

$$(E_3)\quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4)\quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222602)

0.69 常微分方程式 $(2x+y)y' - (x+2y) = 0$ について次の問いに答えよ．

(1) 方程式の一般解を求めよ．　　(2) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす特殊解を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062908)

0.70 関数 $f(x)$ が $[0, \infty)$ において微分可能で，次の微分方程式を満たす．

$$f'(x) - \frac{1}{x+1} f(x) = (x+1)^2 e^x$$

このとき，

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ．

(2) 初期条件 $f(0) = 1$ を満たす特殊解 $f(x)$ を求めよ．

(名古屋工業大 2009)　　(m20092907)

0.71 次の (1) から (3) の微分方程式を，それぞれ与えられた初期条件のもとで解きなさい．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 3y$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 5$）

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x}$　（初期条件は $x = 1$ のとき $y = 3$）

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$　（初期条件は $x = 0$ のとき $y = 0$）

(三重大 2009)　　(m20093105)

0.72 (1) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} + xy = x$ について，初期条件 $y(0) = 0$ を満たす解を求めよ．

(2) 未知関数 $y(x)$ についての微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ の一般解を求めよ．

(三重大 2009)　　(m20093111)

0.73 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ において，初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$（ただし，$y'(x) \equiv dy(x)/dx$）を満たす解を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113107)

0.74 微分方程式 $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ の解について，以下の問に答えよ．ただし，$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ であり．初期条件は，$x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$ とする．

(1) $\gamma = 0,\ k = 9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(2) $\gamma = 2,\ k = 9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(3) $\gamma = 6,\ k = 9$ の場合における微分方程式の解を求めよ．

(三重大 2011)　　(m20113110)

0.75 y の x に関する 1 階微分を y' で表すとき，微分方程式

$$y' + 3y = \cos 2x$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで解きなさい．

(三重大 2013)　　(m20133106)

0.76 以下の問いに答えなさい．ただし，y は x の関数であり，$y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ とする．

(1) 初期条件を $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ とするとき，微分方程式　$xy'' + y' = 0$　を解きなさい．

(2) 区間 $\sqrt{3} \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$ において，(1) の解である関数が描く曲線の長さ L を求めなさい．ただし，区間 $a \leqq x \leqq b$ の関数 $y = f(x)$ の曲線の長さ L は，$L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$　で与えられる．

(三重大 2020)　　(m20203109)

0.77 式 (a) の微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{dI(t)}{dt} + \lambda I(t) = v_0 \quad \cdots \quad (a)$$

ここで，$t \geq 0$，λ は正の定数，v_0 は正または 0 の定数である．

(1) $v_0 = 0$ の解は任意定数 C を用いて以下のように与えられることを示せ．

$$I(t) = C\exp(-\lambda t)$$

(2) $v_0 \neq 0$ の解は定数 C が時間に依存するものとして式 (a) に代入することによって得られる．初期条件 $I(0) = 0$ を満たすような解を求め，$I(t)$ を t の関数として図示せよ．

(奈良女子大 2001)　　(m20013208)

0.78 次の微分方程式を解け．初期条件として，$t = 0$ のとき位置は $x = x_0$，速度を v_0 とする．ここで，k は実数である．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0$　　(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$

(奈良女子大 2002)　　(m20023206)

0.79 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 x = A\cos(\omega t) \qquad \cdots (ア)$$

の一般解 $x(t)$ は，$A = 0$ の場合の一般解 $x_0(t)$ と $A \neq 0$ の特解 $x_1(t)$ の和 $x_0(t) + x_1(t)$ で表される．以下の問いに答えよ．ただし，$A,\ \omega,\ \omega_0$ は実定数である．

(1) $x_0(t)$ を求めよ．

(2) $x_1(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$ とおいて式 (ア) に代入し，未知定数 α と β を決定することにより $x_1(t)$ を求めよ．ただし，$\omega \neq \omega_0$ とする．

(3) 初期条件が $x(0) = x_0$，$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ の場合，式 (ア) の解を求めよ．また，$\omega \to \omega_0$ とした時，その解はどうなるか．

(奈良女子大 2012)　　(m20123203)

0.80 以下の微分方程式を考える．

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ア})$$

ただし，μ, ω は正の定数である．以下の問に答えよ．

(1) $x(t)\propto\exp(-at)$ の形の解を考える．$x(t)$ が式（ア）の解となる a の値を，μ と ω を用いて表せ．

(2) $a=a_R\pm ia_I$ のとき，式（ア）の解は振動しながら減衰する．このとき μ と ω が満たす不等式を答えよ．ただし，a_R と a_I は実数で，$i=\sqrt{-1}$ である．

(3) 前問 (2) の場合に，初期条件が $x(0)=0$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$ であるときの 式（ア）の解を求め，a_R と a_I を用いて表せ．

(奈良女子大 2015)　　(m20153203)

0.81 t の関数 $I(t)$ に関する以下の微分方程式を考える．

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)=V(t)$$

ただし，L, R は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(1) $V(t)=0$ のとき，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(2) $V(t)=V_0$（定数）のとき，$I(t)=C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$ とおいて微分方程式を解き，一般解 $I(t)$ を求めよ．

(3) $V(t)=V_0$（定数）のとき，初期条件 $I(0)=0$ を満たす特解 $I(t)$ を求めよ．また，$I(t)$ の概形を図示せよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193208)

0.82 次の微分方程式について，(　　) 内の初期条件を満たす解を求めよ．

(1) $2y\dfrac{dy}{dx}=x^2+2x$　　($x=1$ のとき $y=0$)

(2) $\dfrac{dy}{dx}=ay+\dfrac{b}{y}$　　($x=0$ のとき $y=1$)　　ただし，a, b は定数で $a\neq 0$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=(1-y^2)\tan x$　　($x=0$ のとき $y=2$)

(京都大 2014)　　(m20143301)

0.83 $t>0$ で，次の微分方程式を満たし，(　　) 内の初期条件を満たす関数 $x=x(t)$ を求めよ．

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{1+|x|}$　　($t=0$ のとき $x=-1$)

(京都大 2014)　　(m20143302)

0.84 微分方程式 $y''-y'-2y=0$ の，初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=1$ を満たす解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013407)

0.85 微分方程式　$y''+2y'+5y=10\sin x$　を考える．

(1) $a\cos x+b\sin x$ がこの微分方程式の解になるように定数 a,b を定めよ．

(2) 初期条件 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ を満たす解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2005)　　(m20053410)

0.86 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=1$ の解で，初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ を満たすものを求めよ．

(京都工芸繊維大 2007)　　(m20073405)

0.87 次の微分方程式を考える．

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}-2$$

(1) $\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，$(*)$ を u に関する微分方程式に書き換えよ．

(2) 初期条件 $y(1)=3$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2009)　　(m20093404)

0.88 次の微分方程式を考える．

$$(*) \qquad \frac{dy}{dx}=2x(y^2+1)$$

(1) $(*)$ の一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $y(0)=1$ を満たす $(*)$ の解を求めよ．

(京都工芸繊維大 2012)　　(m20123404)

0.89 次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=2x(t)-3y(t)+F(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=y(t)-2x(t) \end{cases}$$

(1) $F(t)=0$ の場合，一般解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(2) $F(t)=e^{2t}$ の場合，$y(t)$ の特殊解を $y_1(t)=Ae^{2t}$ と表す．このとき，定数 A を求めよ．

(3) $F(t)=e^{2t}$ の場合，一般解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(4) $F(t)=e^{2t}$ の場合，初期条件 $x(0)=2$, $y(0)=0$ の下で解 $x(t)$, $y(t)$ を求めよ．

(大阪大 2011)　　(m20113502)

0.90 次の微分方程式に関する以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=0$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=x^2+3x+1$ の一般解 $y=y(x)$ を求めよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+y=x^2+3x+1$ の解 $y=y(x)$ を
初期条件「$x=0$ の時に，$y=10$ かつ $\dfrac{dy}{dx}=-6$」のもとで求めよ．

(大阪大 2012)　　(m20123502)

0.91 実定数 a,b,c は $b^2-ac>0$, $b>0$ を満たしている．$D=b^2-ac$ と記す．以下の設問に答えよ．

(1) 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}+bx+cy=0,\ t\geq 0$$
$$\frac{dy}{dt}-ax-by=0,\ t\geq 0$$

の解 $x=x(t)$, $y=y(t)$ で初期条件 $x(0)=0$, $y(0)=1$ を満たすものを求め b, c, D と t を用いて表せ．

(2) (1) の解 $y = y(t)$ に対して，$y(t) > 0$ が任意の $t \geq 0$ に対して成立することを示せ.

(3) (1) の解を用いて

$$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \quad t \geq 0$$

と置くと

$$\frac{dz}{dt} + az^2 + 2bz + c = 0, \quad z(0) = 0$$

を満たすことを示せ.

(4) $\lim_{t\to\infty} z(t)$ と $\lim_{t\to\infty} \frac{dz(t)}{dt}$ の値を求め $b,\ c,\ D$ を用いて表せ.

(大阪大 2016)　　(m20163504)

0.92 関数 $x(t),\ y(t)$ に関する次の連立微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 2y + \cos 2t \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

(1) $x(t)$ および $y(t)$ の一般解を求めよ.

(2) 初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ として $x(t)$ と $y(t)$ を求めよ.

(3) $t \to \infty$ において $x(t)$ が $A\cos(\omega t + \theta)$ なる関数形に漸近することを示し，その時の $A,\ \omega,\ \theta$ の値を求めよ．ただし，$A,\ \omega,\ \theta$ は実数であり，$A > 0,\ \omega > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また，θ は逆三角関数を用いて表しても構わない.

(大阪大 2016)　　(m20163509)

0.93 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} - \frac{1}{2x^2} \qquad (x \neq 0) \qquad\qquad (*)$$

(1) $u(x) = xy$ とおくとき，関数 $u(x)$ が満たすべき微分方程式を示せ.

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解 $y = y(x)$ を求めよ.

(3) 微分方程式 $(*)$ の解 $y = y(x)$ を，初期条件「$x = 1$ のときに $y = 2$」のもとで求めよ.

(大阪大 2017)　　(m20173502)

0.94 α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_2^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^\alpha dt + 1 \qquad\qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ.

(1) $f(1) = A$ を満たす実数 A を求めよ.

(2) $y = f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^\alpha \qquad\qquad ②$$

が成り立つことを示せ.

(3) 初期条件「$x = 1$ のとき $y = A$　(ただし A は (1) で求めた値)」のもとで微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ.

(大阪大 2018)　　(m20183505)

0.95　以下 α を与えられた実数とする．1 階微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) + e^{-t}$$

の，初期条件 $x(0) = \alpha$ を満たす解を $x_\alpha(t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　1 階微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2y(t)$$

の，初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解 $y(t)$ を求めよ．

(2)　$y(t)$ を (1) で求めた関数とする．関数 $C(t)$ を $C(t) = \dfrac{x_\alpha(t)}{y(t)}$ によって定めると，

$$\frac{dC(t)}{dt} = e^{-3t}\ , \qquad C(0) = \alpha$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} x_\alpha(t) = \infty$ となるための α に対する必要十分条件を求めよ．

(大阪大 2019)　　(m20193508)

0.96　関数 $w(t)$ は初期条件「$t = 0$ のとき $w = 3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = \frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1)　関数 $w(t)$ を求めよ．

(2)　関数 $w(t)$ を用いて，2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$f(x,y) = \frac{3}{7}w(x+y) + \frac{1}{17}w(x-2y)^2$$

と定める．次の 2 重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy\ , \qquad D = \big\{(x,y)\ \big|\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq 4\big\}$$

(大阪大 2020)　　(m20203505)

0.97　(1)　関数 $y = y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy + (1+x^2)^2 + y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z = z(x)$ を

$$z = \frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2)　(1) の微分方程式の，初期条件 $y(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(3)　(2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)| = \lim_{x\to b-0}|y(x)| = \infty$$

を満たしている．このような a, b を求めよ．

(4) 関数 $u=u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx}=2xu+(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2+u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0)=0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022) (m20223509)

0.98 未知関数 $x(t),y(t)$ に関する微分方程式 $x'(t)=y(t)\,,\ y'(t)=-x(t)$
を，初期条件 $x(0)=a\,,\ y(0)=b$ の下で解け.

(神戸大 2004) (m20043806)

0.99 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}-y=-y^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

について, 以下の問いに答えよ.

(1) $z=y^{-1}$ とおいて, z を満たす微分方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた微分方程式の一般解を求めよ.

(3) 初期条件「$x=0\,,\ y=1/2$」のもとで, 微分方程式 $(*)$ を解け.

(神戸大 2010) (m20103805)

0.100 常微分方程式

$$y''-y=e^{-x}$$

を初期条件 $y(0)=a,\ y'(0)=b$ のもとで解け．また，$x\geq 0$ で有界な解が存在するための a と b の必要十分条件を求めよ．（ここで $y'=\dfrac{dy}{dx},\ y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ である.）

(神戸大 2011) (m20113805)

0.101 質量 m の雨の粒子が落ちはじめてから t 秒後の速度を $v(t)$ とすると,

$$m\frac{dv(t)}{dt}=mg-cv(t)\ \ (m,g,c \text{ は定数})$$

が成り立つ. この微分方程式を満たす $v(t)$ を変数分離法で求めよ. ただし, 初期条件は, $t=0$ で $v=0$ とする.

(鳥取大 2006) (m20063905)

0.102 方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x(1-x)$ を初期条件 $x(0)=x_0\ (>0)$ の下で解け.

(鳥取大 2009) (m20093903)

0.103 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=0\,,$ 　初期条件 $\left(t=0 \text{ のとき},\ x=1 \text{ かつ} \dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3t\,,$ 　初期条件 $\left(t=0 \text{ のとき},\ x=0 \text{ かつ} \dfrac{dx}{dt}=0\right)$

(広島大 2008) (m20084107)

0.104 次の微分方程式について，以下の問いに答えよ．ただし，a,b は 0 でない定数とする．

$$\frac{dx}{dt}=a-bx$$

(1) この微分方程式の一般解を求めよ.

(2) 初期条件「$t=0$ のとき $x=0$」を満たす解を求めよ.

(3) $t \to \infty$ のとき, (2) で求めた解の極限を求めよ.

(広島市立大 2013)　　(m20134203)

0.105 次の微分方程式を，与えられた初期条件のもとで解け.

$$\frac{dy}{dx} = \log x \quad \text{初期条件「}x=1\text{ のとき }y=1\text{」}$$

(山口大 2000)　　(m20004302)

0.106 粘性流体中の粒子の運動は, 微分方程式

$$\frac{d\nu}{dt} + \alpha\nu = -\beta\nu^2 \qquad \text{初期条件 } \nu(0) = \nu_0$$

で記述される. 変数変換 $u = 1/\nu$ を実行して, この解 $\nu(t)$ を求めなさい.

(山口大 2005)　　(m20054310)

0.107 $y = y(x)$ に対する微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ を考える.

(1) 一般解を求めよ.

(2) a を定数として，初期条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = a$ を満たす解を求めよ.

(3) (2) の解が $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$ となるように，a の値を定めよ.

(徳島大 2003)　　(m20034403)

0.108 $y = y(x)$ が微分方程式 $y'' + 2y' + 5y = 0$ を満たす. 次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 最終結果に複素数が現れてはならない.（必要ならオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてもよい.）

(2) 初期条件 $y(0) = y'(0) = -e^{\frac{3}{4}\pi}$ を満たす微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $y(x)$ に対し, $y\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ と $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} y(x)$ を求めよ.

(徳島大 2005)　　(m20054404)

0.109 (1) $y' + xy = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $y' + xy = x$ の一般解を求めよ.

(3) $y' + xy = x$ の両辺を x で微分した式を求めよ.

(4) $y'' + xy' + y = 1$ の解のうち, 初期条件 $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ を満たすものを求めよ.

(徳島大 2010)　　(m20104405)

0.110 次の各問いに答えよ.

(1) $z(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dt^2} + mz = 0$ の一般解を求めよ．ただし，m は正定数とする.

(2) 連立微分方程式 $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2x - y = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - x + 2y = 0 \end{cases}$ の解を求めたい．そのため，この微分方程式に一次変換 $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = ax_1 + bx_2 \end{cases}$ を施す．x_1 に関する方程式が x_2 を含まないように，x_2 に関する方程式が x_1 を含まないようにするための $a,\ b$ の値を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする.

(3) x_1, x_2 の一般解を用いて，初期条件 $t=0$ で，$x=2,\ \dfrac{dx}{dt}=0,\ y=0,\ \dfrac{dy}{dt}=0$ のときの解 $x,\ y$ を求めよ．

(九州大 1998)　　(m19984706)

0.111 $x(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+20\dfrac{dx}{dt}+\alpha x=0$ について考える．ただし，$\alpha>0$ であるとする．

(1) $\alpha=64$ とし，初期条件を $t=0$ で $x=1$，$\dfrac{dx}{dt}=8$ としたときの微分方程式の解を求めよ．

(2) $t=0$ で，$x=1$，$\dfrac{dx}{dt}=-15$ であるとする．このとき，常に $x(t)>0$ が成り立つような α の範囲を求めよ．

(九州大 2001)　　(m20014703)

0.112 次の 2 階微分方程式について以下の問に答えよ．

$$y''+y'-6y=e^x$$

(1) 同次形の微分方程式 $y''+y'-6y=0$ の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式 $y''+y'-6y=e^x$ を次の初期条件の下に解け．

$$y(0)=1\ ,\ y'(0)=1$$

(九州大 2004)　　(m20044703)

0.113 (1) 次の定数係数線形常微分方程式について，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+ay=F(x)$$

ただし，$x,\ y(x),\ F(x)$ は実数である．

(a) $F(x)=0,\ a=0$ のときの一般解を求めよ．

(b) $F(x)=0,\ a=1$ のときの一般解を求めよ．

(c) $F(x)=0,\ a=2$ のときの一般解を求めよ．

(d) $F(x)=e^{2x},\ a=1$ とする．初期条件 $y(0)=1,\ \dfrac{dy}{dx}(0)=0$ を満足する解を求めよ．

(2) 常微分方程式

$$y\frac{dy}{dx}=-4(x-1)\ ,\qquad y(1)=2$$

の解が描く曲線を xy 平面上に図示せよ．

(九州大 2014)　　(m20144702)

0.114 (1) 次の $y(x)$ に関する微分方程式を初期条件 $y(0)=2,\ y'(0)=0$ のもとで解け．

$$y''+4y'+20y=0$$

(2) 次の $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ．

$$y''+2y'+y=50\sin x\cos x$$

(3) 次の完全微分形の方程式について，一般解を求めよ．

$$(4x^3-6xy)dx+(8y-3x^2)dy=0$$

(九州大 2018)　　(m20184701)

0.115 微分方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+r\dfrac{dx}{dt}+kx=0$ を条件 $r^2-4mk=0$ および 初期条件 $(t=0)$

$x=-1\,,\quad \dfrac{dx}{dt}=1$ のもとで解け．

(佐賀大 2005) (m20054927)

0.116 次の微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+r\frac{dx}{dt}+kx=0$$

を条件

$$m>0,\ r>0,\ k>0,\ r^2-4mk>0$$

および初期条件 $(t=0)$

$$x=0\,,\qquad \frac{dx}{dt}=1$$

のもとで解け．

(佐賀大 2010) (m20104915)

0.117 大気中に置かれた物体が冷却する速さは，その物体の温度と周囲の温度の差に比例する．次の設問に答えなさい．

(1) 周囲温度（一定）を θ_{at}，比例定数を k とおき，時刻 t における物体の温度 θ を表す微分方程式を答えなさい．

(2) θ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $\theta=\theta_0$ として, θ の特殊解を答えなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta$ を答えなさい．

(佐賀大 2016) (m20164934)

0.118 ある反応の反応速度が反応物の濃度 C の二乗に比例し，比例定数は k であった．以下の問いに答えなさい．

(1) 時間を t として，C の時間変化を表す微分方程式を答えなさい．

(2) C の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $C=C_0$ として，C の特殊解を答えなさい．

(4) $C=(1/2)C_0$ となる時間 $t_{1/2}$ を答えなさい．

(佐賀大 2017) (m20174915)

0.119 ある反応の反応速度が反応物 A の濃度 $[A]$ に比例した．比例定数の絶対値が k で表されるとして，以下の問いに答えなさい．

(1) 時間を t として，$[A]$ の時間変化を表す微分方程式を答えなさい．

(2) $[A]$ の一般解を答えなさい．

(3) 初期条件 $t=0$ のとき $[A]=C_0$ として，$[A]$ の特殊解を答えなさい．

(4) $[A]=(1/2)C_0$ となる時間 $t_{1/2}$ を答えなさい．

(佐賀大 2021) (m20214910)

0.120 次の微分方程式が与えられているとき, 設問 (1) から (3) に答えよ．

$$y''(x)+4y'(x)+7y(x)=Q(x) \qquad \text{(i)}$$

(1) 上の (i) 式において $Q(x) = 0$ とする．初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = -3$ が与えられているとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) 上の (i) 式において $Q(x) = 3e^{-5x}$ のとき, 微分方程式の解を少なくとも一つ求めよ．

(3) 次に，$Q(x)$ が具体的に与えられていない場合を考える．(i) 式の解の 1 つを $y_1(x)$ とするとき，$y_2(x) = 5y_1(x)$ は必ず, 微分方程式

$$y''(x) + 4y'(x) + 7y(x) = 5Q(x) \qquad \text{(ii)}$$

の解であるか. 理由を述べて説明せよ．

(長崎大 2004)　　(m20045008)

0.121 以下の問に答えよ. ただし, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) 微分方程式 $y' - y = 0$ を解け．

(2) 初期条件 $y(0) = 1$ を満たす微分方程式 $y' - y = e^{2x}$ の解を求め, この解のグラフを描け．

(長崎大 2005)　　(m20055012)

0.122 次の微分方程式を解け，ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y' + y = 0$　　(2) $y' + y = (x + 1)^2$

(3) 初期条件 $y(0) = 0$ ($x = 0$ のとき $y = 0$) を満たす $y' + y = (x + 1)^2$ の解を求めよ．

(長崎大 2007)　　(m20075006)

0.123 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y'' + 16y = 0$　　(2) $y'' + 16y = 17e^x$

(3) 初期条件 $y(0) = 6$, $y'(0) = -2$, ($x = 0$ のとき $y = 6$, $y' = -2$) を満たす $y'' + 16y = 17e^x$ の解を求めよ．

(長崎大 2008)　　(m20085006)

0.124 次の微分方程式を解け．ここで，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．

(1) $y'' + 4y = 0$

(2) $y'' + 4y = \sin 3x$

(3) 初期条件 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1.4$　（$x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 1.4$）を満たす $y'' + 4y = \sin 3x$ の解を求めよ．

(長崎大 2009)　　(m20095009)

0.125 次の微分方程式の解を求めなさい. ここで, 初期条件は, $x = 0$ のとき $y = 0$, $y' = 0$ を満たすものとする．

$$y'' - 2y' - 3y = 4$$

(鹿児島大 2005)　　(m20055407)

0.126 次の微分方程式を解きなさい．ただし，初期条件（$x = 0$ のとき，y=1）が成り立つものとする．

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

(鹿児島大 2014)　　(m20145418)

0.127 以下の微分方程式 :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{5}{2}\frac{df(x)}{dx} - \frac{3}{2}f(x) = 0$$

を, 初期条件 :

$$f(0) = 1\,, \qquad f'(0) = 1$$

のもとで解きなさい.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055507)

0.128 微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{du}{dx} - 2u = x + \dfrac{5}{2}$ を初期条件 $u(0) = 0,\ u''(0) = 1$ のもとで解き，解の関数 $u = u(x)$ の概形を $x \geqq\ 0$ の範囲でグラフに描け．ただし，x の増加にしたがって $u = u(x)$ が漸近する関数も式とともに図中に記すこと.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075502)

0.129 微分方程式 $x\dfrac{dy}{dx} - 3y + x = 0$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ とおくと，与えられた微分方程式が $x\dfrac{du}{dx} = 2u - 1$ と書けることを示せ.

(2) 初期条件 $x = 1$ のとき $y(1) = 2$ のもとで，与えられた微分方程式を解け.

(室蘭工業大 2007)　　(m20075510)

0.130 (1) 微分方程式 $\dfrac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = 0$ を初期条件 $y(0) = 1$ として解きなさい.

(2) (1) の解を $f(x)$ として $y(x) = u(x)f(x)$ とおく．このとき常微分方程式 $\dfrac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = e^x$ を x と $u(x)$ の常微分方程式として表しなさい.

(3) 常微分方程式 $\dfrac{dy(x)}{dx} - 3y(x) = e^x$ を解きなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085510)

0.131 次の微分方程式の特殊解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -y\ ,$ 　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 5$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - e^x + \cos(x)\ ,$ 　初期条件 $x = 0$ のとき $y = 2$

(室蘭工業大 2009)　　(m20095506)

0.132 常微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 13\sin 2x$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) この方程式の右辺がゼロの場合の解（同次解）y_0 を求めよ.

(2) 特解 y_1 を $y_1 = A\sin 2x + B\cos 2x$ の形を仮定して求めよ．ただし，$A,\ B$ は定数とする.

(3) 初期条件を，$x = 0$ で，$y = 0,\ \dfrac{dy}{dx} = 2$ として，解 y を求めよ.

(室蘭工業大 2018)　　(m20185510)

0.133 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y' + 2y = 3e^x$$

を初期条件 $y(0) = 2$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013)　　(m20136301)

0.134 未知関数 $y = y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + y = \cos x$$

を初期条件 $y(0) = y'(0) = 1$ のもとで解け.

(はこだて未来大 2013)　　(m20136302)

0.135 次の微分方程式の一般解を求め, さらに, 与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = x^3$,　$y(1) = 1$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \cos 3x$,　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$,　$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(和歌山大 2010)　　(m20106503)

0.136 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$,　$y(0) = 1$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$,　$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x$,　$y(0) = 1$

(和歌山大 2012)　　(m20126506)

0.137 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい.

(1) $y\dfrac{dy}{dx} = 2x^2$,　$y(0) = 1$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \sin 2x$,　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$,　$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

(和歌山大 2013)　　(m20136505)

0.138 次の微分方程式について，与えられた初期条件を満たす特殊解を求めなさい..

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$,　$y(0) = 2$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = x$,　$y(0) = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$,　$y(0) = 1$,　$\dfrac{dy}{dx}(0) = y'(0) = -1$

(和歌山大 2014)　　(m20146507)

0.139 微分方程式 $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0$ に対して，次の (1)～(3) に答えなさい.

(1) 一般解を求めなさい.

(2) 初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ を満たす解を求めなさい.

(3) (2) で求めた解 $y(t)$ に対して，極限値 $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ を求めなさい.

(和歌山大 2018)　　(m20186504)

0.140 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y$ の一般解を求めなさい.

(2) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9y$ を，次の初期条件のもとで解きなさい.

$$x = 0 \text{ のとき } y = 2,\ \ \frac{dy}{dx} = 1$$

(和歌山大 20221) (m20216505)