

[選択項目] 年度：1991～2023 年 文中：証明

0.1 z は複素数である.

- (1) $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$ を証明せよ.
- (2) 方程式 $\sin z = 2$ を解け.

(北海道大 1997) (m19970104)

0.2 関数 f が (x, y, z) のスカラー関数であるとき, $\text{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します.

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \mathbf{k}$$

ここで, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです. 以下の間に答えなさい.

- (1) f, h が (x, y, z) のスカラー関数であるとき, h が 0 ではない領域で,

$$\text{grad}\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{h \cdot \text{grad}(f) - f \cdot \text{grad}(h)}{h^2}$$
 であることを証明しなさい.
- (2) (1) の結果を用いて, 点 $(1, 1, 1)$ における $\text{grad}\left(\frac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい.

(北海道大 2006) (m20060104)

0.3 次の設問に答えよ. ここで, z は複素数である.

- (1) $e^z \neq 0$ を証明せよ.
- (2) $e^z = e^{2z}$ を満足する z を求めよ. また z の値を複素平面上に図示せよ.
- (3) e^{nz} は正則であることを示せ. n は整数とする.
- (4) $\frac{d}{dz} e^{nz} = n e^{nz}$ を証明せよ.

(北海道大 2007) (m20070103)

0.4 z, w は複素数であり, $i = \sqrt{-1}$ である. また, x, y, r, θ は実数である.

- (1) 複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が与えられたとき, $w^n = z$ (n は正の整数) の根は n 個であり,

$$w_k = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1)$$

と表せることを示せ.

- (2) 方程式 $w^5 = 1$ を満たす 1 つの解が, $w = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ と表せることを示せ. また, $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.
- (3) 複素数 $z = x + iy$ が与えられたとき, 関数 $w(z) = e^z$ が正則であることを証明せよ.

(北海道大 2009) (m20090101)

0.5 以下の設問に答えよ. 途中の計算手順を詳しく記述すること.

- (1) $w = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$,
 $\alpha_k = a_k + ib_k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) とするとき, w の実部 $\text{Re}(w)$ および $\text{Im}(w)$ を求めよ.
- (2) $f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ ($z = x + iy$) が正則か否かを調べよ.
- (3) 次の式を証明せよ.

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

0.6 複素数に関する以下の設問に答えよ.

- (1) z を複素数, \bar{z} を z の複素共役とするとき, 次式が成り立つことを示せ. ただし, $\operatorname{Re}[z]$ は z の実数部分を表す.

$$\operatorname{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

- (2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$|z| \geq |\operatorname{Re}[z]| \geq \operatorname{Re}[z]$$

- (3) 複素数 z_1, z_2 に対して次の 2 式が成り立つことを, それぞれ証明せよ.

$$|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

- (4) 複素数 $z = x + iy$ (x, y は実数, i は虚数単位) に対し, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\left| e^{2z+i} + e^{iz^2} \right| \leq e^{2x} + e^{-2xy}$$

(北海道大 2013) (m20130103)

0.7 $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ での $x = \tan y$ の逆関数を $y = \arctan x$ とする.

- (1) $\arctan x$ の導関数を書け. (証明は省略しても良い.)
 (2) 関数 $f(x) = \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$ の $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ での最大値と最小値を求めよ.

(北見工業大 2019) (m20190203)

0.8 3つのベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ の大きさを, それぞれ $|\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, |\mathbf{w}|$ で表す. ベクトルの内積を

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \phi \quad (a)$$

で定義する. ただし, ϕ はベクトル \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角である. この定義より, 次の内積の基本的性質が得られる.

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (b)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (c)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (d)$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \quad (e)$$

さらに, 右の図のような三角形 OAB を考え,

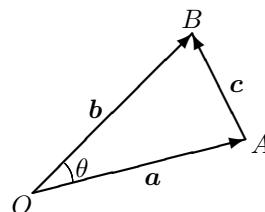
3つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する. ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角を θ とする. 次の式を証明せよ.

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

なお, 内積の定義 (a) および基本的性質 (b)~(e) を利用した場所を明示せよ.



(岩手大 1996) (m19960303)

0.9 $f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ($x > 0$) とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x+1) = xf(x)$ を部分積分を用いて証明せよ.

(2) x が自然数 n のとき, $f(n) = (n-1)!$ を証明せよ.

(3) $f(5)$ を求めよ.

(4) $f(\frac{5}{2})$ を求めよ. ただし, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である.

(岩手大 1997) (m19970302)

0.10 次のような行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで, a は実定数とする. 次の問に答えよ.

(1) A^2, A^3 を求めよ.

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ. A^n の形を正しく推定し, 数学的帰納法により証明すればよい.

(3) 行列 A に対し, A^0 , 指数関数 $\exp A$ を次のように定義する.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

$\exp A$ を求めよ. なお, 行列の無限級数の和を求めるためには, 各成分ごとに無限級数の和を求めればよい.

(岩手大 1998) (m19980311)

0.11 次の問いに答えよ.

(1) $f(\theta) = \sin \theta$ を, 以下のマクローリンの定理を用いて無限級数へ展開せよ.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

(ただし $0 < \theta < 1$)

(2) $f(i\theta) = e^{i\theta}$ を無限級数へ展開せよ. ただし, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする.

(3) $f(\theta) = \cos \theta$ を無限級数へ展開し, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を証明せよ.

(4) $f(t) = 5 + 0.4 \sin \omega t + 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t + 0.3 \sin 3\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 C_2 と C_{-2} を求めよ.

$$f(t) = \sum_{n=-3}^3 C_n e^{in\omega t}$$

(5) $f(t) = 0.4 \sin 2\omega t + 0.3 \cos 2\omega t$ を, 以下の形式に書き直した場合の係数 A を求めよ.

$$f(t) = A \sin(2\omega t + \phi)$$

(岩手大 2004) (m20040303)

0.12 (1) 次の行列の積を求めなさい.

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ のとき, 次のものを求めなさい.

(i) A の行列式 $|A|$ (ii) A の逆行列 A^{-1}

(3) 次の等式を証明しなさい.

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1$$

(岩手大 2008) (m20080302)

0.13 xyz 空間内に 4 点 $A(-3, -3, 1)$, $B(2, -8, 1)$, $C(-2, -3, -2)$, $D(2, 1, 4)$ があるとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 4 点 A, B, C, D を通る球 S の方程式を求めなさい.
- (2) 球 S の中心を P とするとき, ベクトル $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ は線形独立であることを証明しなさい.
- (3) 点 C を通り, ベクトル \overrightarrow{AD} に垂直な平面 α の方程式を求めなさい. また, 平面 α と直線

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = z-2$$

との交点の座標を求めなさい.

- (4) 点 D から平面 α に直線を引き, α との交点を E とするとき, 線分 DE の長さが最小となるように点 E の座標を定めなさい. このとき, 線分 DE の長さを求めなさい.

(岩手大 2012) (m20120301)

0.14 2 階微分方程式 $y'' + 9y = 0$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 関数 $y = A \sin 3x - B \cos 3x$ (A, B は任意定数) は一般解であることを証明しなさい.
- (2) 初期条件「 $x = 0$ のとき $y = 1, y' = 3$ 」を満たす特殊解を求めなさい.
- (3) 境界条件「 $x = \frac{\pi}{3}$ のとき $y = 1, x = \frac{\pi}{9}$ のとき $y = 1$ 」を満たす特殊解を求めなさい.

(岩手大 2012) (m20120304)

0.15 平面 $2x + y + 2z = 0$ と球面 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$ が交わってできる円の周の長さを求めなさい. ただし, 空間内の点から平面に下ろした垂線の長さを求める公式を用いる場合には, その証明もしなさい.

(秋田大 2003) (m20030403)

0.16 2 行 2 列の行列 $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ と $Q = I - P$ について, 次の問いに答えよ. ただし, I は 2 行 2 列の単位行列である.

- (1) 点 P^{-1} が存在する条件を書き, そのとき P^{-1} を求めよ.
- (2) 正の整数 n に対して, $Q^n = (p+q)^{n-1}Q$ を証明せよ.
- (3) $|P+q-1| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ を求めよ.

(東北大 1993) (m19930504)

0.17 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する.

- (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする. 直線 $y = ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y = ax$ 上にあるような a の値を求めよ.
- (3) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する. このとき, $U^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ. ただし, n は自然数, α は 0 でない実数とする.

- (4) 行列 P を $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する. このとき, $P^{-1}AP$ を求めよ. また, その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2003) (m20030503)

0.18 \mathbb{R}^3 において x, y の標準内積を (x, y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

- (1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.
 (2) \mathbb{R}^3 の一次変換 f_j ($j = 1, 2, 3$) を

$$f_j : x \mapsto (x, \phi_j)\phi_j, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. \mathbb{R}^3 の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

- (3) $m = 1, 2, \dots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005) (m20050506)

0.19 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - \sin x$ と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.
 (2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.
 (3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.
 (4) 任意の実数 x について不等式 $|x| \geq \sin|x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006) (m20060502)

0.20 (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ (証明はしなくてよい).

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$$

- (2) $x > 0$ で定義された関数 $h(x) = x^4 \log x$ を考える. $\lim_{x \rightarrow +0} h(x)$ を求めよ.
 (3) $0 < m < 4$ であるような自然数 m に対し, (2) で定義した $h(x)$ の m 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ. また, $\lim_{x \rightarrow +0} h^{(m)}(x)$ を求めよ.
 (4) $\lim_{x \rightarrow +0} h^{(4)}(x)$ は存在するか.

(東北大 2006) (m20060507)

0.21 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
(東北大 2009) (m20090506)

0.22 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x} \cos x$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\frac{d^n f}{dx^n}$ とするとき,

$$\frac{d^n f}{dx^n} = (-\sqrt{2})^n e^{-x} \cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

(2) 関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概略を描け.

(3) 曲線 $y = f(x)$ (区間 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と x 軸および y 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

(東北大 2011) (m20110502)

0.23 以下の問いに答えよ.

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ.

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ.

$$b_1 = 0, \quad b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(3) 次の条件を満たす c_2, c_3 および c_4 を求め, 数列 $\{c_n\}$ を推定せよ. また, その推定が正しいことを, 数学的帰納法によって証明せよ.

$$c_1 = 2, \quad c_{n+1} = \frac{c_n}{1 + c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(東北大 2014) (m20140503)

0.24 $a_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ も収束することを示せ. また, 逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ (証明不要).

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束し, $a_n \neq 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 - a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015) (m20150508)

0.25 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定める.

(1) f は $x = 0$ で連続であることを証明せよ.

(2) f は $x = 0$ で何回微分可能か.

(東北大 2015) (m20150509)

0.26 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ.

(2) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $a_{n(k)} < \frac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) において, 「 $a_{n(k)} < \frac{1}{n(k)}$ 」を「 $|a_{n(k)}| < \frac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか, もし成り立つならばそれを証明し, 成り立たない場合は反例をあげよ.

(東北大 2016) (m20160508)

0.27 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$b_{n+2} = |b_{n+1} - b_n| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし, b_1 と b_2 は正の整数とする.

(a) $b_1 = 21, b_2 = 27$ のとき, b_3, b_4, b_5, b_6 を求めよ.

(b) b_1 と b_2 が正の整数 d の倍数であるとき, b_n も d の倍数であることを数学帰納法により証明せよ.

(3) 次の条件を満たす数列 $\{c_n\}$ について, 以下の問いに答えよ.

$$-1 < c_1 < 0, \quad c_{n+1} = \frac{2}{1 - c_n} - 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(a) $c_1 = -1/2$ のとき, c_2 を求めよ.

(b) $-1 < c_n < 0$ となることを数学帰納法により証明せよ.

(c) 数列 $\{c_n\}$ が単調減少列となることを示し, さらに数列 $\{c_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ の極限を求めよ.

(東北大 2017) (m20170503)

0.28 \mathbb{R} 内の閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 $f(x)$ は $\int_0^1 f(x) dx = 1$ をみたすとする. 正の整数 n に対し

$$b_n = \int_0^1 f(x) \cos \frac{x}{\sqrt{n}} dx$$

とおくとき,

(*) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f(x) dx\right)$

が成り立つことを以下の設問に沿って証明せよ.

(1) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$0 \leq \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の n に対し

$$\left| b_n - 1 + \frac{1}{2n} \int_0^1 x^2 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{6n\sqrt{n}} \int_0^1 x^3 |f(x)| dx$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の実数 α, β に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n\sqrt{n}} \right)^n = e^\alpha$$

が成り立つことを示せ.

(4) (2) および (3) の結果を利用して (*) を結論せよ.

(東北大 2018) (m20180511)

0.29 次の行列 \mathbf{X} と数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) について, 以下の問に答えよ. ただし, x は実数とする.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) \mathbf{X}^3 を求めよ.

(2) n が 1 以上の整数であるとき, \mathbf{X}^n が次の形式で表されることを, 数学帰納法を用いて証明せよ;

$$\mathbf{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n & c_n \\ 0 & 1 & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) n が 2 以上の整数であるとき, (2) の a_n, b_n, c_n で構成される数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(東北大 2022) (m20220502)

0.30 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え, V の元を \mathbb{R} 上の実数値関数と考える. V の二つの元 f, g と実数 s に対して, 和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると, V は \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間となる. V から 4 次元実列ベクトル空間 \mathbb{R}^4 への線形写像 $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める. ただし f' は f の導関数である. 以下の問いに答えよ.

- (1) V と \mathbb{R}^4 の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ. ただし V の基底は $\{1, x, x^2, x^3\}$, \mathbb{R}^4 の基底は $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とし,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする.

- (2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1) = 3, \quad f'(-1) = 2, \quad f(1) = -1, \quad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ. 存在する場合はそのような多項式をすべて求め, 存在しない場合はそれを証明せよ.

(東北大 2022) (m20220509)

- 0.31** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $p > 1$ ならば収束し, $p \leq 1$ ならば発散することを証明せよ.

(お茶の水女子大 1997) (m19970604)

- 0.32** (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

- (2) n 行 n 列の実対称行列 A の, n 個の固有ベクトル b_1, \dots, b_n が, 全て求めたとしよう. ベクトル b_1, \dots, b_n はそれぞれ列ベクトルとし, 互いに直交するように取った. 次に, 列ベクトル b_1, \dots, b_n を横に並べて作った, n 行 n 列の行列を B としよう. 即ち, $B = (b_1, \dots, b_n)$. このとき, 行列の積 $B^T A B$ は対角行列であることを証明せよ. 但し, B^T は B の転置行列を表すものとする.

(お茶の水女子大 2000) (m20000614)

- 0.33** A を与えられた実係数 n 次正方行列とするとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 零ベクトル o ではないあるベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とある自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A^m x = o$ が満たされるとき, A は正則行列ではないことを示せ.

- (2) $A^n \neq O$ (n は行列 A の次数) かつ $x \neq o$ であるが, $A^n x = o$ となるような行列 A とベクトル x の組の例を挙げよ.
- (3) あるベクトル $x \neq o$ に対して (1) のような仮定が満たされているとする.

$$k = k(x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m x = o\}$$

とおくとき, k 個のベクトル $x, Ax, \dots, A^{k-1}x$ は一次独立であることを証明せよ.

- (4) $A^m = O$ がある自然数 m に対して満たされているならば, $k \leq n$ となる自然数 k で $A^k = O$ となるものが存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2001) (m20010607)

0.34 行列 A の固有値 λ と固有ベクトル ψ は,

$$A\psi = \lambda\psi$$

という関係式を満足する. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & a-b \end{pmatrix}$$

ただし, a, b は正の実数とせよ.

(2) エルミート行列の固有値は, 実数であることを証明せよ. ただし, エルミート行列 H とは, 複素数の成分をもつ行列であり, 転置して複素共役を取った (これをエルミート共役を取るといふ) 行列が, もとの H と一致する行列である.

(お茶の水女子大 2003) (m20030614)

0.35 (1) 線形写像の定義を書きなさい.

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 ($\text{Ker} f$) と像 ($\text{Im} f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

$$(a) f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}, \quad (b) f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$$

(注) ただし, 線形空間 V から W への線形写像 $F: V \rightarrow W$ の核とは, $\text{Ker} F = \{v \in V | F(v) = \mathbf{0}\}$ のことで, 像とは $\text{Im} F = \{F(v) \in W | v \in V\}$ のことである. また, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2007) (m20070603)

0.36 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 ($\text{Ker} f$) と像 ($\text{Im} f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ -3x+2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012) (m20120607)

0.37 行列に関する次の問いに答えよ.

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

の固有値 λ_1, λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と, その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に, n 行 n 列の実対称行列 B は, ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて $O^T B O$ とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい。

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し、 C が (*) で与えられるとき (すなわち $C = A$) にそれが成り立っていることを示しなさい。

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\text{Tr } C = c_1 + c_2$$

を証明し、 C が (*) で与えられるとき (すなわち $C = A$) にそれが成り立っていることを示しなさい。

(お茶の水女子大 2013) (m20130605)

0.38 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T F P$ へと変換された。ここで T は行列の転置を表す。以下の問に答えなさい。

(1) F のトレース (対角成分の和) はこの変換により不変であること、つまり $T_r F = T_r F'$ を証明しなさい。

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき、 P と F' を求めなさい。

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい。

(お茶の水女子大 2016) (m20160604)

0.39 (1) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx$ を求めよ。なお計算過程も示せ。ただし、 m, n は $m, n > 0$ の整数とする。

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx$ を求めよ。なお計算過程も示せ。ただし、 m, n は $m, n > 0$ の整数とする。

(3) フーリエ級数 $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ について、

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^2 + b_n^2] \quad \text{を証明せよ。}$$

(東京大 1998) (m19980704)

0.40 A を 2 次 の 正 方 行 列 と す る 。 A の 行 列 式 を $|A|$ で 表 し 、 ま た 、 そ の 対 角 成 分 の 和 を $\text{tr}(A)$ で 表 す 。 さ ら に A の 固 有 値 を λ_1, λ_2 と す る 。 以 下 の 問 に 答 え よ 。

(1) 特性多項式は $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + |A|$ であることを示せ。

(2) $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $|A| = \lambda_1 \lambda_2$ であることを示せ。

(3) $A^2 - \text{tr}(A)A + |A|E = O$ を示せ。ただし、 E は単位行列で、 O は零行列である。

(4) (3) の結果を用いて、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき、 $n \geq 2$ に対して、次の関係が成り立つことを証明せよ。

$$A^n = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1} A + \frac{\lambda_1^n \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1} E$$

(東京大 2000) (m20000704)

0.41 以下の設問に答えよ。ただし、 $a > 0$ である。

- (1) 次の定積分の値を求めよ. $\int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx$
- (2) 次の定積分の値を求めよ. 必要ならば, 直交座標系 (x, y) を極座標系 (r, θ) に変換せよ.
 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dx dy$
- (3) 次の等式を証明せよ. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- (4) 次の定積分の値を求めよ. ただし, n は 2 以上の整数である. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$
 (東京大 2004) (m20040702)

0.42 1 回の試行において事象 A の起こる確率を p とする. この試行を独立に n 回くり返すときに A が起こる回数を X とすると, X は 0 から n までの整数値をとる確率変数であり, この確率分布を二項分布 $B(n, p)$ とよぶ.

例えば, 表の出る確率が 0.5 のコインを 3 回投げる場合, 表の出る回数は 0 回, 1 回, 2 回, 3 回のいずれかであり, この各回数の確率の分布が二項分布 $B(3, 0.5)$ である.

- (1) A が r 回起こる確率を $P(r)$ とする. $P(r)$ を n, r, p を用いて表せ.
- (2) 二項定理を用いて $\sum_{X=0}^n P(X) = 1$ を証明せよ.
- (3) 横軸を X , 縦軸を $P(X)$ として, 二項分布 $B(3, 0.5)$ および $B(8, 0.5)$ のグラフを示せ. ただし, 有効数字を二桁とする.
- (4) 二項分布 $B(n, p)$ の平均 μ を n, p を用いて表せ. またその導出過程を示せ.
 (東京大 2006) (m20060705)

0.43 (1) (a) X を値が自然数 $1, 2, \dots, a$ のみをとる確率変数とする. X の平均 $E(X)$ は,

$$E(X) = \sum_{k=1}^a kP(X = k)$$

で定義される. ここで, $P(X = k)$ は, $X = k$ となる確率である. このとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ. ただし, $P(X \geq k)$ は, $X \geq k$ となる確率である.

$$E(X) = \sum_{k=1}^a P(X \geq k) \quad (1)$$

(b) X の 2 乗の平均は,

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^a k^2 P(X = k)$$

で定義される. このとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^a (2k - 1)P(X \geq k) \quad (2)$$

- (2) 袋の中に白い玉が 1 個, 赤い玉が $a - 1$ 個入っている. 袋から, 玉を一つずつ無作為に取り出し, 袋の中に返さないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.
- (a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ. ただし, この確率は, 「最初の $k - 1$ 回は, 常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい.
- (b) (a) の回答と式 (1) を用いて, 白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ.
- (c) (a) の回答と式 (2) を用いて, 白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ. ただし, 確率変数 X の分散 $V(X)$ は, $E(X^2) - (E(X))^2$ で与えられる.

(東京大 2009) (m20090702)

- 0.44 A と B の二人で以下のゲームを行う。プレイごとに、 A と B のどちらか一方が 1 点を獲得するものし、 A が 1 点を獲得する確率を p とする。このプレイを繰り返し、
- A の点が B の点を 2 点上回ったとき、 A の勝利。
 - B の点が A の点を 2 点上回ったとき、 B の勝利。

とする。

A が i 点、 B が j 点を獲得しているときに、 A がゲームを勝利する確率を $S(i, j)$ とする。

例えば、 $S(1, 1)$ は A, B がそれぞれ 1 点獲得しているときに、 A がゲームに勝利する確率である。また、 $S(2, 0) = 1$ であり、 $S(0, 2) = 0$ である。このとき、次の問いに答えよ。ただし、全ての自然数 n に対して、 $S(n, n) = S(0, 0)$ であることを証明せずに用いて良い。

- (1) $S(0, 0)$ と $S(1, 0)$ と $S(0, 1)$ が満たす関係式を求めよ。また、 $S(1, 0)$ と $S(1, 1)$ が満たす関係式を求めよ。
- (2) i, j を $|i - j| < 2$ を満たす非負整数とする。このとき、

$$S(i, j) = pS(i + 1, j) + (1 - p)S(i, j + 1) \quad (*)$$
 であることを示せ。
- (3) 式 (*) を利用して、 $S(0, 0)$ の値を p を用いて表せ。
- (4) $S(0, 1)$ の値を p を用いて表せ。
- (5) $S(0, 1) = 1/2$ となる p の値は、 $3/5 < p < 2/3$ を満たすことを示せ。

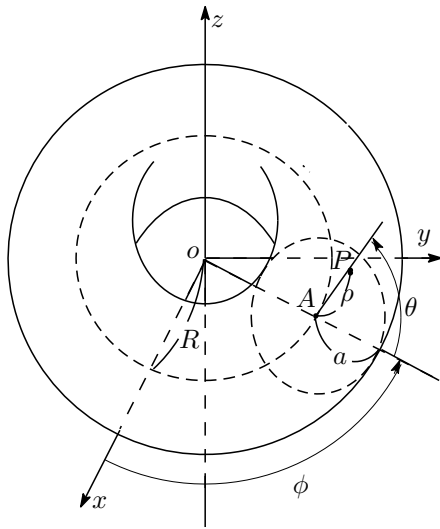
(東京大 2012) (m20120702)

- 0.45 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} \quad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ。ただし、 \mathbf{r} は位置ベクトル、 $d\mathbf{S}$ はベクトル面積素である。

- (2) 下図のように、あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり、 z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる。このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると、その断面は半径 a の円となり、この円の中心は z 軸から距離 R の円周上 (トーラス中心軸と呼ぶことにする) にある ($R > a$)。トーラス表面および内部の任意の点を P とする。点 P と z 軸とを含んだ平面と、トーラス中心軸との交点を A とする。線分 AP の長さを ρ 、 x 軸と \overrightarrow{OA} のなす角を ϕ 、 \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{AP} のなす角を θ とする。点 P の位置ベクトル \mathbf{r} の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ。
- (3) 同図のトーラスの表面 ($\rho = a$) においてベクトル面積素 $d\mathbf{S}$ を、前問 (2) の結果を用いて、 ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ。この結果を用い、変数の範囲に注意して、このトーラスの表面積を求めよ。なお円周率を π とする。
- (4) 式 (*) と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ。



(東京大 2012) (m20120703)

0.46 3個の一次独立な実数ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ に対して、3次の正方行列 A の (i, j) 成分を $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ で定義する。ここで $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は、ベクトル \vec{a} と \vec{b} の内積を表すものとする。ただし、 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 = 0$ であるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A の行列式を求めよ。さらに、その値が正であることを示せ。
- (2) 実数 x に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

で定義する。 $f(x)$ を定めよ。

- (3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ。さらに、 $f(x)$ の最小値を求めよ。
- (4) 設問(3)で求めた x に対して、ベクトル \vec{b} を $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + x\vec{a}_3$ とおく。このとき、 \vec{b} と \vec{a}_3 は直交することを示せ。
- (5) 任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して、

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

であることを証明せよ。さらに、等号が成立するための必要十分条件を示せ。

(東京大 2015) (m20150705)

0.47 表が出る確率が p であるコイン投げを考える。このとき、以下の問いに答えよ。

ただし、 p は、 $0 < p < 1$ を満たすとする。

- (1) コイン投げを5回行う。
 - (a) 表, 表, 裏, 裏, 表の順に出る確率を求めよ。
 - (b) 表がちょうど3回出る確率を $f(p)$ とする。このとき、 $f(p)$ を求めよ。
 - (c) (b)で求めた $f(p)$ を最大にする p を求めよ。
- (2) 二人のプレイヤー A と B が、次のルールに従い、ゲームを行う。
 ルール: コイン投げを4回行う。表が3回以上出た時は A の勝ち、2回以下の時は B の勝ちとする。

- (a) A の勝つ確率を $g(p)$ とする. このとき, $g(p)$ を求めよ.
 (b) $g(p) = \frac{1}{2}$ となる p の値は, $\frac{3}{5} < p < \frac{2}{3}$ を満たすことを証明せよ.

(東京大 2016) (m20160702)

- 0.48** n を奇数とする, n 次正方行列 B が ${}^t B = -B$ を満たすならば, B は正則行列ではないことを証明せよ. ただし, ${}^t B$ は B の転置行列を表すものとする.

(東京工業大 2000) (m20000803)

- 0.49** A, B を 2 次正方行列とする. 次の命題が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

- (1) λ が A の固有値で, μ が B の固有値のとき, $\lambda\mu$ は AB の固有値である.
 (2) A は正則行列とし, λ が A の固有値とすると, $\lambda \neq 0$ であり λ^{-1} は A^{-1} の固有値である.

(東京工業大 2002) (m20020806)

- 0.50** 実数を要素とする集合の間の演算 \star を下のように定義する.

$$A \star B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

- (1) 次の集合の要素をすべて示せ. $\{-1, 0, 1\} \star \{1, 4, 7\} \star \{0, 10\}$
 (2) 次の式を証明せよ. ただし, \cup は和集合を作る演算である. $A \star (B \cup C) = (A \star B) \cup (A \star C)$
 (3) どんな A に対しても, $X \star A = A \star X = A$ となるような X を求めよ.
 (4) どんな A に対しても, $Y \star A = A \star Y = Y$ となるような Y を求めよ.
 (5) いま, 一円玉, 五円玉, 十円玉, 五十円玉, 百円玉, 五百円玉, 千円札, 二千円札, 五千円札, 一万円札をそれぞれ一枚ずつ持っているとする. このとき, 釣り銭なしで, 一度に払える金額の集合を \star を用いて示せ. 集合に 0 を含んでいてよい.

(東京農工大 2006) (m20060909)

- 0.51** (1) 同じ数字を 3 個並べてできる 10 進 3 桁の整数 (例えば, 444, 555 など) は 3 で割りきれれることを証明せよ.

(a を任意の数字とするとき, $aaa = a \times (10^2 + 10^1 + 10^0)$ と表せることに注意せよ.)

- (2) 同じ数字を 3^2 個並べてできる 10 進 3^2 桁の整数は 3^2 で割りきれれることを証明せよ.
 ($aaaaaaaa = aaa \times (10^2 \times 3 + 10^3 + 10^0)$ と表せることに注意せよ.)
 (3) 1 以上の任意の整数 n に対して, 同じ数字を 3^n 個並べてできる 10 進 3^n 桁の整数は 3^n で割りきれれることを, n に関する数学的帰納法で証明せよ.

($\underbrace{a \cdots a}_{3^{k+1}} = \underbrace{a \cdots a}_{3^k} \underbrace{a \cdots a}_{3^k} \underbrace{a \cdots a}_{3^k} = \underbrace{a \cdots a}_{3^k} \times x$ と表したとき, x はどのような数になるかを考えよ.)

(電気通信大 2000) (m20001001)

- 0.52** $A = \{0, 1, 2\}$ とする. A^n を, A の要素を n 個並べてできる列全てからなる集合とする. さらに A^n の要素のうち, n 個の数の総和を 3 で割った剰余が k ($k = 0, 1, 2$) になるものの集合を $A^n(k)$ とする.

$$\text{例: } A^2 = \{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22\}$$

$$A^3 = \{000, 001, 002, \dots, 221, 222\}$$

$$A^2(0) = \{00, 12, 21\}, \quad A^2(1) = \{01, 10, 22\}, \quad A^2(2) = \{02, 11, 20\}$$

- (1) $A^3(0), A^3(1), A^3(2)$ の全ての要素を上例のように列挙せよ.
 (2) 任意の正整数 n に対し, $|A^n(0)| = |A^n(1)| = |A^n(2)| = 3^{n-1}$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ.

- (3) $n \geq 4$ のとき, $A^n(0)$ の要素のうち, ちょうど 2 個の 0 で始まる (3 個以上ではいけない) 列の個数を n を用いて表せ.

(電気通信大 2001) (m20011001)

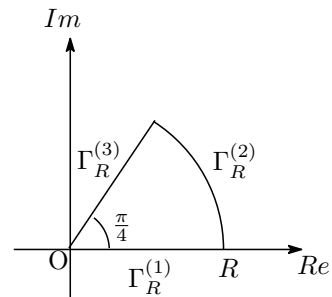
0.53 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし, 線形写像 $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を, $f(x) = 6x - \langle v, x \rangle v$ ($x \in \mathbf{R}^3$) で定義する

るとき, 次の問に答えよ. ただし, \langle, \rangle は, \mathbf{R}^3 の通常のユークリッド内積とする.

- (1) $\langle f(x), v \rangle = 0$ を示せ.
- (2) $f(x) = Ax$ と表すとき, 行列 A を求めよ.
- (3) f の像 $\text{Im } f$ の次元, および f の核 $\text{Ker } f$ の次元を求めよ.
- (4) $\text{Im } f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし, $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば, それを 1 つ求めよ. もしそのようなベクトルが存在しないならば, それを証明せよ.

(電気通信大 2001) (m20011008)

0.54 右図に示すように, 複素平面上にある中心角 $\pi/4$, 半径 $R (> 0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える. また, 図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける.



以下の 3 つの問いに順に答えよ.

- (1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する.

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \tag{①}$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき, 式 ① をこれらを用いて表せ.

$$\begin{aligned} G_R &= \int_0^R e^{-x^2} dx, & P_R &= \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz, \\ C_R &= \int_0^R \cos r^2 dr, & S_R &= \int_0^R \sin r^2 dr, \end{aligned}$$

- (2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに,

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \tag{②}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \frac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って, $\lim_{R \rightarrow \infty} P_R = 0$ を示せ.

- (3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って, 定積分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ. ただし, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい.

(電気通信大 2006) (m20061008)

0.55 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく.

- (1) a_1, a_2, a_3 は 1 次独立であることを証明せよ.
 (2) b_1, b_2 は a_1, a_2, a_3 の 1 次結合で表されるか表されないかを判定し, 表される場合は a_1, a_2, a_3 の 1 次結合で表せ.

(電気通信大 2008) (m20081002)

0.56 複素関数 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ に対して, 以下の各問いに答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, e は自然対数の底とする.

- (1) $f(z)$ のすべての極を求め, 各極における留数を求めよ.
 (2) $z = Re^{i\theta}$ ($R > 1, 0 \leq \theta \leq \pi$) のとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$|f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

(3) 広義積分 $I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$ を求めよ.

(電気通信大 2016) (m20161005)

0.57 (1) 次の等式を証明せよ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ただし, n は自然数とする.

(2) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(k+1)$$

(千葉大 1998) (m19981201)

0.58 $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ のとき, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ となることを証明しなさい. ただし, $(x, y) \neq (0, 0)$ とする.

(千葉大 2003) (m20031202)

0.59 ω は 1 の立方根で $\omega \neq 1$ であるとする.

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \pm 3\sqrt{3}i \quad \text{を証明せよ.}$$

(筑波大 1998) (m19981303)

0.60 実数の定数 α, β に対し, 行列 A, P を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) P^n ($n \geq 2$) を求めよ.
 (2) A, A^2 を α, β, I, P, P^2 を用いて表せ. ただし, I は 3 次の単位行列を表す.
 (3) A^n ($n \geq 2$) を $n, \alpha, \beta, I, P, P^2$ を用いて表せ. A^n はどのような行列になるか.

(4) $\exp A$ を α, β を用いてできるだけ簡単な行列の形に直せ. ただし, $\exp A$ は,

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots$$

で定められる行列を表す.

(5) $\exp(-A)$ を α, β, I, P, P^2 を用いて表し, $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ であることを証明せよ.

(筑波大 2001) (m20011308)

0.61 n 次行列 A について, 次のことを証明せよ. ただし, E を n 次の単位行列とする.

(1) $A^k = E$ となる自然数 k があれば, A は正則である.

(2) $A^2 = A, A \neq E$ であれば, A は正則でない.

(筑波大 2003) (m20031313)

0.62 正方行列の固有値, 固有ベクトルに関する以下の2つの問いに答えよ.

(1) 次の正方行列 A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) n 次の正方行列 B の固有値とその転置行列 tB の固有値とは同じであることを証明せよ.

(筑波大 2003) (m20031317)

0.63 次の等式を証明せよ. (n は自然数) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

(筑波大 2004) (m20041301)

0.64 以下の設問 (1),(2) に答えなさい.

(1) $|x| < 1$ のとき, $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x$ を証明しなさい. また, これを用いて $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を計算しなさい.

(2) 次の不等式が成立することを証明しなさい. ただし, $n > 2$ とする.

$$\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{\pi}{6}$$

(筑波大 2004) (m20041307)

0.65 任意の実ベクトル \mathbf{x} と \mathbf{y} の組に実数 (スカラー) 値を対応させる演算 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) が以下を満たすものとする.

(1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

(3) $(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{z}, \mathbf{y})$

(4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ であり, 等号は $\mathbf{x} = 0$ の場合に限る.

さらに $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ と定義するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ が成り立つ. このことを証明済みとして, $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ を示せ.

(筑波大 2004) (m20041318)

- 0.66 $z = f(x, y)$ が全微分可能で, $x = r \cdot \cos \theta$, $y = r \cdot \sin \theta$ であるとする. このとき, 次式が成立することを証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(筑波大 2006) (m20061309)

- 0.67 単位行列とは異なる n 次の正方行列 A に対し, A^k ($k = 1, 2, \dots$) を k 個の A の積 $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_k$ と定義する. 次の 2 つの問いに答えよ.

- (1) $A^2 = A$ ならば, A は正則ではないことを証明しなさい.
- (2) A が正則ならば, 任意の自然数 $k (= 1, 2, \dots)$ に対して A^k も正則となり, A^k の逆行列 $(A^k)^{-1}$ は A の逆行列 A^{-1} を使って $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ と表せることを証明しなさい. ただし, $(A^{-1})^k$ は A^k の定義と同様に k 個の A^{-1} の積を表すものとする.

(筑波大 2006) (m20061311)

- 0.68 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする. このとき, $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ.
- (2) 関数 $f(x), g(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする. このとき, 閉区間 $[a, b]$ で $g(x) > 0$ であるならば, $\frac{1}{\int_a^b g(x) dx} \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c)$ が成立する点 $x = c$ が区間 (a, b) に少なくとも一つは存在することを証明せよ.

(筑波大 2007) (m20071311)

- 0.69 $x > 0$ のとき次の不等式を証明せよ. ただし \log は自然対数とする. $\log(1+x) > x(1-x)$

(筑波大 2007) (m20071321)

- 0.70 (1) 方程式 $x^3 + 3x^2 - 5 = 0$ は, ただ 1 つの実数解をもち, その解は 1 と 2 の間にあることを証明しなさい.

- (2) (1) で得られる実数解は無理数であることを証明しなさい.

(筑波大 2008) (m20081325)

- 0.71 整数 $n \geq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \int \cos^n x dx$ とするとき, 以下の漸化式を証明しなさい.

$$I_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(筑波大 2009) (m20091316)

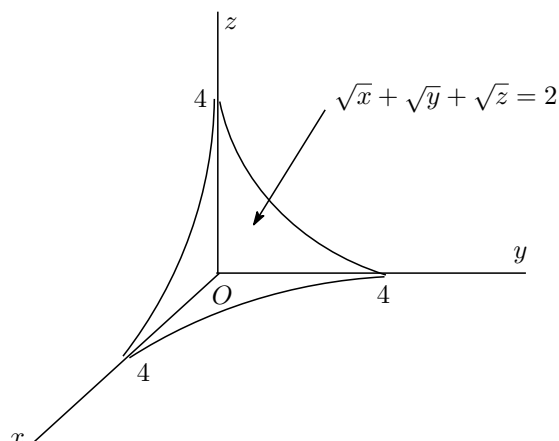
- 0.72 $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ で定義された関数 $f(x, y) = \sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x, f_y と 2 次偏導関数 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求め, この関数が極値をもたないことを証明しなさい.

(筑波大 2009) (m20091317)

- 0.73 x の関数 $f(x) = e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

- (1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.
- (2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき, ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって, $f^{(n)}(x) = \phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.
- (3) n を任意に固定する. このとき $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか. それとも発散するか. 理由を付して答えなさい.

- 0.74 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$ の接平面が x 軸 y 軸, z 軸と交わる点を A, B, C とし, 原点 O から点 A, B, C への距離を OA, OB, OC とする. このとき, $OA + OB + OC$ の値は接平面によらず一定であることを証明しなさい.



(筑波大 2011) (m20111308)

- 0.75 自然数 n について, $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ とする. このとき, 次の (1) から (3) の示す不等式が成立することを証明しなさい.

- (1) $0 < a_1 \leq 1$ かつ $a_2 \geq 1$ ならば $a_1 + a_2 \geq a_1 a_2 + 1$
- (2) $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1$ ならば $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$
- (3) $\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

(筑波大 2012) (m20121323)

- 0.76 次の問いに答えよ.

- (1) $\sinh x$ と $\cosh x$ をマクローリン展開せよ.
- (2) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \cosh x \, dx$$

- (3) 次の積分を計算せよ.

$$\int_0^1 (1-x) \cosh x \, dx$$

- (4) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^1 (1-x)^n \cosh x \, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n!}{(2m+n+1)!}$$

(筑波大 2013) (m20131304)

- 0.77 自然数から自然数への写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して, 集合 X_n, A_n ($n \in \mathbb{N}$) を

$$X_n = \{f(k) \mid k \geq n\}$$

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid f(k) = f(n)\}$$

で定める. このとき, 以下を証明せよ.

- (1) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ である必要十分条件は, ある $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである.

- (2) $\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \neq X_{n+1}\}$ が有限集合である必要十分条件は、 $\{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{が有限集合}\}$ が有限集合となることである。

(筑波大 2013) (m20131305)

0.78 A を正方行列, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($n \geq 2$) を A の固有値, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ を各固有値に対する固有ベクトルとすると、以下の問いに答えよ。

- (1) 一般に, k 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が線形独立で, $k+1$ 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ が線形従属ならば, \mathbf{a}_{k+1} は $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ の線形結合であることを示せ。
- (2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は線形独立であることを示せ。
- (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ がすべて異なるとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ は線形独立であることを, 数学的帰納法によって証明せよ。

(筑波大 2013) (m20131307)

0.79 実ベクトル空間 V と線形写像 $F: V \rightarrow V$ を考える。

- (1) $B = \{v_1, v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ。
- (2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ。
- (3) $\dim V = 2$ とし, v_1, v_2 を F の固有値 λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) に対応する固有ベクトルとする。
 - (a) v_1, v_2 は一次独立であることを示せ。
 - (b) n を自然数とし, F^n を F を n 回合成した写像とする。 F^n の $B' = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ。

(筑波大 2015) (m20151302)

0.80 実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは, 標準的な論理式で書くと

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} (\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)) \quad (*)$$

が成り立つということである。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを, (*) にならって理論式で書け。
- (2) (1) の内容の否定を理論式で書け。ただし, その時に否定記号 \neg やそれを暗黙に含む \neq などの記号を使ってはならない。
- (3) (2) の内容から, ある正の実数 ε が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n - a| < 1/n$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ。
- (4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ。また, 実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ。
- (5) これまでの議論 (特に (3) と (4)) をもとに, 実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら, f は連続であることを証明せよ。

(筑波大 2015) (m20151305)

0.81 正方行列 A に対して \mathbf{x} をその固有ベクトル, λ を対応する固有値とする。次の命題を証明しなさい。

- (1) 各 $k = 1, 2, \dots$ について, $A^k \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき $A^k \mathbf{x}$ は A の固有ベクトルである。
- (2) 行列 A が正則なら $\frac{1}{\lambda}$ は A の逆行列の固有値である。

(筑波大 2015) (m20151313)

0.82 曲面 $x^2 = y(2 + 3x + z)$ の任意の接平面は、接平面によらない定点 P を通ることを証明して、この点 P の座標を求めなさい。

(筑波大 2015) (m20151318)

0.83 f を実数全体で定義された実数値関数とする。

- (1) 「 f は至るところ連続ある」という定義を述べよ。
- (2) 「 f は一様連続ある」という定義を述べよ。
- (3) 関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ。
- (4) 関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ。

(筑波大 2016) (m20161305)

- 0.84 (1) 関数 $f(x) = e^x$ をマクローリン展開 ($x = 0$ のまわりでテイラー展開) せよ。
 (2) 以下の性質 (A) を用いて、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{1!} + \frac{n-1}{2!} + \cdots + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

が成り立つ。

- (3) 上の性質 (A) を証明せよ。

(筑波大 2017) (m20171312)

0.85 実ベクトル空間 W のベクトル $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が次の 2 つの条件を満たしているものとする。

- (A) $\|\mathbf{v}_1\| = \cdots = \|\mathbf{v}_n\| = 1$
 (B) 相異なる $j, k \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle = 0$

ただし、 \langle, \rangle は W の内積、 $\| \cdot \|$ はこの内積で定まる長さを表す。また、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を V とする。以下の (1)-(4) を証明しなさい。

- (1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ は 1 次独立である。
- (2) 任意のベクトル $\mathbf{x} \in V$ が実数 x_1, \dots, x_n を用いて

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j$$

と表されるとき、次の等式が成り立つ。

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$$

- (3) V は W の部分空間である。
- (4) $V \neq W$ であれば、 $\mathbf{w} \notin V$ かつ $\mathbf{w} \in W$ を満たす任意のベクトル \mathbf{w} に対して $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ は 1 次独立である。

(筑波大 2017) (m20171313)

0.86 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ。

- (2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする. このとき等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ を証明せよ.
- (3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \rightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し, 関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする. このとき等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ.
- (4) 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は単射であるとする. このとき f も単射であることを示せ.

(筑波大 2017) (m20171318)

0.87 x を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 全体が作る線形空間 V と W について, $V \rightarrow W$ の写像 F は, $f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする.

ただし, $f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数 (導関数) を表す. 以下の設問に答えよ.

- (1) F が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ.
- (2) $\{x+1, x^2+x+1, 1\}$ が W の基底となることを証明せよ.
- (3) V の基底 $\{x, -x^2+1, x^2-4x+3\}$ と W の基底 $\{x+1, x^2+x+1, 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ.
- (4) A を対角化して, 行列 A^n を求めよ. (n は正の整数)

(筑波大 2018) (m20181307)

0.88 関数 $f(x, y)$ は, x および y について偏微分可能で $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ なる関係を満足する.

関数 $f(x, y)$ を $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) で変数変換したときの $f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ は, 変数 r を含まない関数となることを証明しなさい.

(筑波大 2018) (m20181315)

0.89 $y = \tan x$ の逆関数を $y = \arctan x$ と書く. ある y の値に対して $y = \tan x$ を満たす x は多数存在するが, 定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に限る場合, $y = \tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる. この定義域における $y = \tan x$ の逆関数を $y = \text{Arctan } x$ と書くこととする.

上記の定義域において, 次の問に答えよ

- ① $y = \text{Arctan } x$ について, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ を証明せよ.
- ② 次の無限級数 S の値を求めよ. ただし, その導出過程を示すこと.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

(筑波大 2020) (m20201305)

0.90 (1) 以下の命題を証明せよ.

(a) V, W を \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間とし, f は V から W への線形写像であるとする. V の有限個の元 v_1, v_2, \dots, v_k について, $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k)$ が線形独立ならば, v_1, v_2, \dots, v_k も線形独立である.

(b) α は 1 より大きい定数とする. このとき, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ は収束する.

(2) 以下の命題に対する反例を与え, それが反例であることを示せ.

(a) \mathbb{R} 上の数ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば, 部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である.

- (b) \mathbb{Z} の任意の部分集合 A, B に対して, $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ. ただし, 集合 X に対して, $P(X)$ は X のべき集合 (X の部分集合全体の集合) を表す.
- (c) 写像 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ に対して, 写像 $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が \mathbb{Z} 上の恒等写像に等しいものが存在すれば, f は全単射である.

(筑波大 2020) (m20201317)

- 0.91 (1) $x > 0$ に対して, 次の関数を定義する.

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して, $\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ.

- (2) 次の定積分を $u = -(n+1) \log x$ ($\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}}$) とする置換積分により計算せよ. ただし, n は任意の正の整数を表す.

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

- (3) 以下の恒等式を証明せよ.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \left\{ = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n}) \right\}$$

ただし, (2) の結果, および, 次のマクローリン展開の結果を用いること.

$$x^{-x} = e^{(-x \log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^n}{n!}$$

また, 積分 \int と和 \sum の順序は交換してもよいとする.

(筑波大 2022) (m20221307)

- 0.92 次の方程式が開区間 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で互いに異なる解をちょうど n 個持つことを証明しなさい.

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 2)^n = 0$$

(筑波大 2022) (m20221312)

- 0.93 A を $m \times n$ の実行列とする. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を未知数とする一次方程式

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{i}$$

を考える.

- (1) 方程式 (i) の解全体は, \mathbf{R}^n の線形部分空間をなすことを示せ.
- (2) (1) の線形部分空間の次元と, A の階数 ($\text{rank } A$) の関係式を記せ. (証明不要)
- (3) B も $m \times n$ の実行列とし, 一次方程式

$$B\mathbf{x} = \mathbf{o} \tag{ii}$$

を考える. $\text{rank } A + \text{rank } B < n$ が成り立つとき, 方程式 (i) と方程式 (ii) に \mathbf{o} 以外の共有解が存在することを示せ.

(埼玉大 1999) (m19991405)

0.94 \mathbb{R}^n のベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) を次のように定義する.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

さらに, \mathbf{x} の長さを $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ と定義する.

次の (1),(2),(3) に答えよ.

- (1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ が成り立つことを証明せよ.
- (2) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ が成り立つことを証明せよ.
- (3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ.

(埼玉大 2002) (m20021403)

0.95 n 次正方行列 A が次のように与えられているとする. ただし, $n \geq 2$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $A = LU$ となる下三角行列 L , 上三角行列 U は存在しないことを証明せよ.

(埼玉大 2002) (m20021404)

0.96 E を 3 次単位行列とし,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく. 整数 $n \geq 1$ に対し, $A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E)$ であることを証明せよ.

(埼玉大 2003) (m20031407)

0.97 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

すべての自然数 n に対して $a_n \geq 0$ であり, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ である.

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0, \infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0, \infty)$ に対し $f(x) \geq 0$ である.
- $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$ である.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005) (m20051407)

0.98 (1) 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の固有値をすべて求め、さらに、それぞれの固有値に対する固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) 次の主張は正しいか、それとも誤りか、正しければ証明し、誤りならば反例を挙げよ。

(主張) 「2次実正方行列 B が相異なる実数の固有値 α, β を持つならば、ある実正則行列 P が存在し、 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となる。」

(埼玉大 2014) (m20141406)

0.99 数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(群馬大 2007) (m20071502)

0.100 $\tan \frac{\theta}{2} = x$ のとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}$ を証明せよ。

(2) $\cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ を証明せよ。

(群馬大 2007) (m20071504)

0.101 n を自然数とすると、 $2^{2n+1} + 1$ が3で割り切れることを、数学的帰納法により証明せよ。

(山梨大 2007) (m20071809)

0.102 n を自然数とすると、

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。

(山梨大 2009) (m20091806)

0.103 数学的帰納法を用いて次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n k^{-1/2} \geq \sqrt{n}$$

(山梨大 2015) (m20151803)

0.104 (1) 関数 $f(x)$ が $x=0$ を含む区間で n 回微分可能であるとき、下式を満たす点 $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在する。ただし、 $f^{(n)}(x)$ は第 n 次導関数とする。

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$$

上式の最終項を除いた n 項までの和の部分関数 $f(x)$ の近似式と呼ぶ。

$f(x) = (1+x)^k$ (k は任意の実数) を2次式で近似し、 $\sqrt{1.1}$ の近似値を求めなさい。

(2) n 回微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x) \cdot g(x)$ の第 n 次導関数 $(f(x) \cdot g(x))^{(n)}$ が次の式で与えられることを数学的帰納法によって証明しなさい。

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n {}_n C_i f^{(n-i)}(x) \cdot g^{(i)}(x)$$

(山梨大 2016) (m20161804)

0.105 命題の証明に関する以下の問いに答えなさい。

- (1) p と q を命題とする. 命題 $p \rightarrow q$ が真であることを証明するために, 下表に示す 3 つの方法がある. 直接法に関する説明を参考にして, 対偶法と背理法についてそれぞれ説明しなさい.

直接法	p を真と仮定して, q が真であることを証明する.
対偶法	(解答用紙に説明しなさい)
背理法	(解答用紙に説明しなさい)

- (2) 命題関数 $P(n)$ を「最初の n 個の正の奇数の和は n^2 である」とする. すべての正の奇数 n に対して $P(n)$ が真であることを, 数学的帰納法を用いて証明しなさい.

(山梨大 2018) (m20181804)

0.106 ${}_nC_r$ ($0 \leq r \leq n$) は式 (1)-(3) で与えられる.

$${}_nC_0 = 1 \quad (1)$$

$${}_nC_n = 1 \quad (2)$$

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1} \quad (1 \leq r \leq n) \quad (3)$$

数学的帰納法を用いて式 (4) が成り立つことを証明せよ.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^k b^{n-k} \quad (4)$$

(山梨大 2020) (m20201804)

0.107 10 進表記の m ($m \geq 1$) 桁の自然数 n の各位の数字を d_i ($1 \leq i \leq m$, $0 \leq d_i \leq 9$) と表すものとし, $r(n)$ を以下と定義する.

$$r(n) = \sum_{i=1}^m d_i$$

このとき, $r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ.

(山梨大 2021) (m20211801)

0.108 関数 $f(x) = e^x \sin(x + \alpha)$ の第 n 階導関数は

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \alpha + \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを証明せよ.

(信州大 1998) (m19981901)

0.109 自然数 n に対して, $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$ とする. このとき, $n \neq m$ に対し, 次が成立することを証明せよ.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

(信州大 1998) (m19981902)

0.110 (1) 次の行列式を因数分解せよ.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- (2) 1 直線上にない平面上の 3 点 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) の x 座標が相異なるとき, この 3 点を通る放物線 $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ は存在し, ただ 1 つであることを証明せよ.

(信州大 1998) (m19981904)

- 0.111 実数上の n 次元ベクトル空間 V に自然な内積 (\circ, \circ) が定義されているとする. V の n 個の数ベクトル $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ が

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

を満たすならば $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ は V の基底となることを証明せよ.

(信州大 1999) (m19991906)

- 0.112 A を n 次正方形行列とし \mathbf{x} を n 次元列ベクトルとする. ある正の整数 k があって $A^{k-1}\mathbf{x} \neq 0$, $A^k\mathbf{x} = 0$ であるとする. このとき k 個の列ベクトル

$$\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \dots, A^{k-1}\mathbf{x}$$

は一次独立であることを証明せよ.

(信州大 2003) (m20031903)

- 0.113 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\mathbf{x}(t) = (f(t), g(t))$ で与えられている. 但し, $f(t), g(t)$ は閉区間 $[0, 1]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり, それらの導関数 $f'(t), g'(t)$ は同じ開区間で連続である.

さて, 動点 P が時刻 $t = 0$ に原点 $O(0, 0)$ を出発して時刻 $t = 1$ に点 $A(1, 1)$ に到着するとせよ. このとき, 途中のある時刻で速度ベクトル $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = (f'(t), g'(t))$ がベクトル \overrightarrow{OA} の定数倍になることを証明せよ.

(信州大 2007) (m20071904)

- 0.114 (1) $|x| \leq \frac{1}{2}$ ならば, $|\log(1+x) - x| \leq 2x^2$ が成立することを証明せよ.
 (2) 次の等式を証明せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{n} \cos \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \cos x \, dx$$

(信州大 2012) (m20121903)

- 0.115 $f(x)$ を \mathbb{R} 上で定義された実数値関数とする. $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは, 次の主張が成り立つ事として定義される.

P : 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ である.}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) 命題 P の否定を書け.
 (2) $f(x)$ を次で定義する.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて, $f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ.

(信州大 2019) (m20191906)

- 0.116 n を自然数とする. すべての成分が 1 であるような n 次元列ベクトルを $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ とする. A, B, C を実数成分の n 次正方形行列とする.

(1) 行列 A が逆行列を持つとする. このとき, $A\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを証明せよ.

(2) $B\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つだけ存在するとする. このとき B は逆行列を持つことを証明せよ.

(3) $C\mathbf{v} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ および ${}^t C\mathbf{w} = \mathbf{u}$ を満たすベクトル

$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする. ここで, ${}^t C$ は C の転置行列である. このとき \mathbf{v} およ

び \mathbf{w} の成分の和が一致すること, すなわち $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i$ であることを, を証明せよ.

(信州大 2019) (m20191911)

0.117 自然対数の底を e とする.

(1) 任意の正整数 k に対して, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \lambda^k = 0$ を証明せよ.

(2) 任意の正整数 n に対して, $g_n(\lambda) = \int_0^\lambda x^n e^{-x} dx$ と置くと, $g_n(\lambda)$ を求めよ.

(3) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g_n(\lambda)$ を求めよ.

(新潟大 1998) (m19982003)

0.118 閉区間 $[a, b]$ を含むある开区間上で定義された実数値関数 $f(x)$ が 2 回連続微分可能で, 任意の点 $x \in [a, b]$ において, $f''(x) \geq 0$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $c \in [a, b]$ に対して, 次の不等式が成立することを証明せよ.

$$(b-c)f(a) + (c-a)f(b) \geq (b-a)f(c)$$

(2) (1) の不等式で, 真に不等号 $>$ が成立するのはどんな場合か.

(3) 上の結果を用いて, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ となることを示せ.

(新潟大 1999) (m19992001)

0.119 一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の極限值を求めるとともに, その値が極限值になることを証明せよ.

(1) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(2) $\frac{10^n}{n!}$

(3) $\sqrt[n]{a}$, (a は正の定数)

(新潟大 1999) (m19992002)

0.120 数列 $\{a_n\}$ に対して, $a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) の定義は, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって, $n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である.

$a_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$), $a_n \rightarrow \beta$ ($n \rightarrow \infty$) であるとき, $a_n + b_n \rightarrow \alpha + \beta$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立つことを上の定義に従って証明せよ. ただし, α, β は実数とする.

(新潟大 2002) (m20022003)

0.121 (1) 次の行列式の値を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2) 行列 A の行列式の定義は、例えば、

$$|A| = \sum_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix} \right] \in S_n} \operatorname{sgn} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix} \right] a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

で与えられる。ここで、 S_n は n 次の置換のすべての集合であり、 sgn は置換の符号である。このとき次式を証明せよ。

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & B & & \\ * & & & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし、 B は $(n-1)$ 次の正方行列とする。

(新潟大 2006) (m20062011)

0.122 物理によく用いられるオイラーの公式 ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位) は、指数関数と三角関数を結びつける重要な公式である。この公式を使って、次の関係式を証明せよ。

$$(1) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

(新潟大 2007) (m20072003)

0.123 (1) 三角関数に対して次のような公式がある。

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (\text{a})$$

ここで、 $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする。式 (a)、または、三角関数の加法定理、倍角公式などを用いて、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x \quad (\text{b})$$

(2) 式 (b) の両辺を x で微分することにより

$$\sin 5x = (16 \cos^4 x - 12 \cos^2 x + 1) \sin x \quad (\text{c})$$

となることを証明せよ。

(3) $\cos \frac{\pi}{5}$ を求めよ。

(新潟大 2008) (m20082002)

0.124 (1) A を 3 次実正方行列とする。連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つための必要十分条件は、 A が正則 (可逆) でないことである。このことを証明せよ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-a & 2 & 2 \\ 1 & 2-a & -1 \\ -1 & 1 & 4-a \end{pmatrix}$ に対して、連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つとき、 a の値を求めよ。更に、求めた a の値に対して、 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解を求めよ。

(新潟大 2009) (m20092006)

0.125 a を実数とする。このとき、3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

(1) A を対称行列と交代行列の和で表せ。

(2) A が正則であるための a の値に関する条件を求めよ。また、 A が正則であるとき、 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(3) $a \geq 0$ のとき、 A は対角化可能であることを証明せよ。

- 0.126 (1) 実数 a, b, c について, 不等式 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 証明せよ.
 (2) 2次方程式 $x^2 - 5x + d = 0$ が虚数解を持つような d の範囲を求めよ.

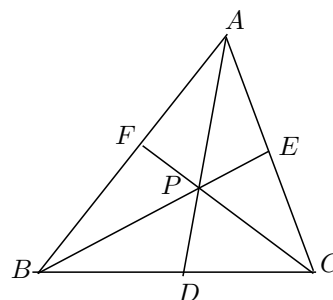
(新潟大 2011) (m20112012)

- 0.127 (1) 右図のように三角形 ABC の各頂点から対辺を結ぶ線分が一点 P で交わるとする. このとき, 各線分の間に

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

の関係が成立することを証明せよ.

- (2) この三角形において,
 「 $AF : FB = 2 : 3, AE : EC = 4 : 3$ 」のとき,
 ベクトル \vec{AP} をベクトル \vec{AB} とベクトル \vec{AC} で表せ.



(新潟大 2011) (m20112016)

- 0.128 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 において $ax + by + cz + d = 0$ で与えられる平面 H を考える. 平面 H 上にない点 P_0 の座標を (x_0, y_0, z_0) とし, H 上の点 P_1 の座標を (x_1, y_1, z_1) とする. また, $\mathbf{v} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ とする. このとき, 次の各問いに答えよ.

- (1) H の単位法線ベクトル \mathbf{u} (H と直交する長さ 1 のベクトル) を求めよ.
 (2) $\mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}$ と \mathbf{u} は直交することを示せ. また $\mathbf{v} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}$ の幾何学的な意味を説明せよ. ただし, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ は \mathbf{u} と \mathbf{v} の内積を表す.
 (3) 点 P_0 と平面 H との距離は $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|$ で与えられることを説明せよ.
 (4) (3) を用いて点 P_0 と平面 H との距離の公式

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

を証明せよ.

(新潟大 2012) (m20122015)

- 0.129 関数 $f(x)$ を

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{2x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定める. このとき, $f(x)$ は区間 $(-1, 1)$ で微分可能かどうかを答えよ. すなわち微分可能ならば導関数を求め, 微分可能でないなら, そのことを証明せよ.

(新潟大 2013) (m20132001)

- 0.130 三角関数に関する以下の問いに答えよ.

- (1) $e^x, \cos x, \sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ.
 (2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つことを, 問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

- (3) 任意の正の整数 n について, 次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

(4) 問(3)の恒等式を用いて、以下の式を証明せよ.

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$$

(新潟大 2016) (m20162010)

0.131 \mathbb{R}^m を m 次元ベクトル空間, \mathbb{R}^n を n 次元ベクトル空間とする. f, g を \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への線形写像とする. \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への写像 h を

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

により定める. このとき, 次の各問い答えよ.

(1) h は \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への線形写像となることを証明せよ.

(2) $\text{Im}(f), \text{Im}(g), \text{Im}(h)$ をそれぞれ, f, g, h の像空間とする. このとき,

$$\dim(\text{Im}(h)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) A, B を実数を成分とする $n \times m$ 行列とする. このとき,

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

が成り立つことを証明せよ.

(新潟大 2022) (m20222005)

0.132 以下の問いに答えよ.

(1) 平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ について, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ が成り立つとき, \vec{a} と \vec{b} のなす角, \vec{b} と \vec{c} のなす角, \vec{c} と \vec{a} のなす角を求めよ.

(2) 一直線上にない3つの定点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ がある. A, B, C と異なる点 $P(x, y)$ に対して $z = |\vec{AP}| + |\vec{BP}| + |\vec{CP}|$ とおくと, 次の式を証明せよ.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{\vec{AP}}{|\vec{AP}|} + \frac{\vec{BP}}{|\vec{BP}|} + \frac{\vec{CP}}{|\vec{CP}|}$$

(3) ある点 P で z が極小となったとする. このとき前問(1)(2)を利用して $\angle APB, \angle BPC, \angle CPA$ を求めよ.

(長岡技科大 1994) (m19942105)

0.133 (1) 1周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \end{aligned}$$

- (2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

- (3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

- (4) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.134 連続時間 $t[s]$ の関数 $f(t)$ のフーリエ変換は,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

により計算される. このことを利用して以下の問に答えよ. ただし, $j = \sqrt{-1}$ であり, ω [rad/s] は角周波数を表す. また, a は正の実数とする.

- (1) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t < a \\ 0 & , \quad t < 0, t > a \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, $f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ. ただし, $|F(\omega)|$ は複素関数 $F(\omega)$ の絶対値を意味する.

- (2) $f(t) = \begin{cases} \exp(-at) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ. また, $f(t)$ と $|F(\omega)|$ をそれぞれ図示せよ.

- (3) $f(t-a)$ のフーリエ変換が $F(\omega)e^{-j\omega a}$ となることを証明せよ.

- (4) $f(at)$ のフーリエ変換が $a > 0$ に対して $\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2006) (m20062105)

0.135 次のベクトル解析の公式を証明しなさい.

(1) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

(2) $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$

(金沢大 1999) (m19992210)

0.136 関数 $f(x) = \log(1+x)$, $x > -1$ について, 次の問いに答えよ. ただし, \log は自然対数とする.

- (1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

- (2) $f(x)$ にマクローリンの定理を当てはめ, 次の不等式を証明せよ.

$$\left| \log 1.1 - 0.095 \right| < \frac{1}{3000}$$

(金沢大 2002) (m20022201)

0.137 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geq 3$ に対して,

$$\sum_{n=3}^N f(n) < \int_2^N f(x) dx$$

が成り立つことを示せ. ただし必要ならば, $e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012) (m20122206)

0.138 変数 x, y が集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq x + y\}$$

を動くとき, 関数

$$f(x, y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$$

の最大値を求めよ (その値が最大値となることの証明をつけること).

(金沢大 2016) (m20162217)

0.139 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる \mathbf{R} 上のベクトル空間とする.

n を 2 以上の自然数とし, 線形写像 $\varphi: V_n \rightarrow V_{n-1}$ と $\psi: V_{n-1} \rightarrow V_n$ を, それぞれ,

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \quad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y) dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $\text{Ker}(\varphi)$ および $\text{Im}(\varphi)$ の次元を求め, 次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ.

(2) $\text{Ker}(\psi)$ および $\text{Im}(\psi)$ の次元を求め, 次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ.

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi: V_n \rightarrow V_n$ と $\varphi \circ \psi: V_{n-1} \rightarrow V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ. 同型写像の場合には証明を与え, そうでない場合には理由を述べよ.

(金沢大 2020) (m20202209)

0.140 (1) $\alpha > 1$ のとき, 関数 $f(x) = (x + |x|)^\alpha$ は \mathbf{R} 上の C^1 級関数であることを証明せよ.

(2) 集合 $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{1}{4}(x + |x|)^2 + y^2 \leq 1, x \geq -2 \right\}$ の面積を求めよ.

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin(x^2)}$$

(金沢大 2022) (m20222201)

0.141 次の命題の真偽を判定し, 命題が真の場合は証明を与え, 命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ.

(1) V を \mathbf{R} 上のベクトル空間とし, m 個の元 $e_1, \dots, e_m \in V$ は \mathbf{R} 上 1 次独立とする. ベクトル $v \in V$ が e_1, \dots, e_m の \mathbf{R} 上の 1 次結合であるとき, $v = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$ を満たす実数の組 (c_1, \dots, c_m) はただ一通りに定まる.

(2) 2×2 行列 A, B について, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する.

(3) \mathbf{R} 上のベクトル空間 $\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R} \right\}$ に対し, 写像 $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ x - 2y + 1 \end{pmatrix}$$

で定めると, f は線形写像である.

(4) n を任意の自然数とする. 正則な $n \times n$ 行列は, 固有値 0 を持たない.

(金沢大 2022) (m20222203)

0.142 直角三角形の各辺の長さをそれぞれ a, b, c (c は斜辺) として, 次の間に答えよ.

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ であることを証明せよ.
- (2) $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) を 2 つ示せ.
- (3) 正の整数 n に対して, $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ であることを証明せよ.
- (4) (3) で示した結果を用いて, $a^2 + b^2 = c^2$ を満たす整数の組 (a, b, c) が無限個存在することを証明せよ.

(富山大 2000) (m20002301)

0.143 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ. ただし, $\lambda_1 > \lambda_2$ とする.
- (2) λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ のうちで, 長さが 1, 第 1 成分が正のものを求めよ.
- (3) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ は直交することを証明せよ.
- (4) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とするとき, $\mathbf{x} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2$ をみたす実数 k_1, k_2 を求めよ.

(富山大 2001) (m20012306)

0.144 行列 $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ および 2 次の正方行列 P について, P が逆行列 P^{-1} をもち, $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成り立つとき, α, β は行列 C の固有値であることを証明せよ. また, 自然数 n に対して C^n を求めよ.

(富山大 2004) (m20042308)

0.145 正の整数 a に対する関数 f の値を, a が 3^n で割り切れて 3^{n+1} で割り切れないとき $f(a) = n$ と定める. ただし, n は 0 以上の整数である. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(ab) = f(a) + f(b)$ を証明せよ.
- (2) $f(a+b) \geq \min\{f(a), f(b)\}$ を証明せよ. また, 等号が成り立たない a, b の例を一組あげよ.

(富山大 2009) (m20092307)

0.146 収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを証明せよ.

(富山大 2009) (m20092308)

0.147 U, V, W を実ベクトル空間とし, $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow W$ を線形写像とする. 次の (1), (2) を証明せよ.

- (1) $g \circ f : U \rightarrow W$ は線形写像である.
- (2) $\text{Im}(g \circ f) = \{0\} \iff \text{Im} f \subset \text{Ker} g$
ただし, $\text{Im} f$ は f の像を, $\text{Ker} g$ は g の核を表す.

(富山大 2009) (m20092309)

0.148 (1) 正方行列 A, P, D の間に $P^{-1}AP = D$ の関係があるとき, A^n (n は自然数) を P, P^{-1}, D, n を用いて表せ. ただし, 帰納法などによる証明は不要とする.

- (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルのうち、大きさが1の二つを $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とする。ただし、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ で、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が固有値の小さいほうに対応した固有ベクトルとする。このとき、 $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とした場合の $Q^{-1}BQ$ を求めよ。
- (3) (1), (2) の結果をもとに、 B^{10} を求めよ。ただし、帰納法などによる証明は不要とする。なお、必要ならば $2^{10} = 1024$, $3^{10} = 59049$, $5^{10} = 9765625$ の値を用いよ。

(富山大 2010) (m20102304)

0.149 次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しいければ証明を与え、正しくなければ反例をあげよ。

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が絶対収束する。
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ が絶対収束する $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する。

(富山大 2012) (m20122309)

0.150 点 (x_1, y_1) から、直線 $ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の長さは $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で表されることを証明せよ。

(福井大 2003) (m20032401)

0.151 半径 r の円の面積を積分により計算し、その値が πr^2 となることを証明しなさい。

(福井大 2004) (m20042409)

0.152 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k$ (一定, $k \neq 0$) のとき, xyz 直交座標系上の平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ が, 一つの定点を通ることを証明し, その定点を求めなさい。ただし, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ とする。

(福井大 2004) (m20042415)

0.153 a, b を正の数とするとき, 以下の関係が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(福井大 2005) (m20052420)

- 0.154** (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$ (ただし $x > -1$) の1~4階の導関数 (つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$) をそれぞれ求めよ。
- (2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し, $f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (3) (2) の結果を使い, 関数 $f(x)$ のマクローリン展開 ($x=0$ でのテーラー展開) を, 無限級数の和の形 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形} \right)$ で求めよ,
- (4) (3) の結果を用いて, 関数 $g(x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ (ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$) のマクローリン展開を, 無限級数の和の形で求めよ (経過を書く必要はあるが, 証明の必要はなし)。

(福井大 2008) (m20082401)

0.155 (1) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のとき

(a) $AP = PA$ となる条件を求めよ.

(b) $AQ = QA$ となる条件を求めよ.

(2) 次の3つの列ベクトルがある.

(a) ベクトルは a, b, c は1次独立か1次従属か.

(b) その理由も述べよ.

(c) もし1次従属なら, それらの関係式を書け.

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(3) A と B を正則行列とすると, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ.

(4) 次の連立方程式がある.

(a) 連立方程式が解を持つように式中の a を決定せよ.

(b) 決定された a の値の連立方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = a \\ 8x - 6y + 4z = 13 \end{cases}$$

(福井大 2009)

(m20092403)

0.156 (1) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ y+z & z+x & x+y \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ を証明せよ.

(2) $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & 11 \\ 12 & 11 & 3 \end{vmatrix}$ を求めよ.

(福井大 2011)

(m20112409)

0.157 次の問いに答えよ.

(1) 行列 B と C と D があるとき, $(BC)^T = C^T B^T$ が成り立つとして, 次の関係が成り立つことを証明せよ. ここで, B^T は B の転置行列である.

$$(BCD)^T = D^T C^T B^T$$

(2) A を二次正方行列とする. A を含む次の式を満たす A を求めよ.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(福井大 2013)

(m20132412)

0.158 次の設問に答えなさい.

(1) 等比数列 $2, 6, 18, 54, \dots$ がある. この数列の何項までの和をとれば, 初めて 10000 を超えるか. ただし, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

(2) n を自然数とすると $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ を証明しなさい.

- 0.159 ベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ は一次独立であるとする. これら $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ の一次結合である以下のような 3 つのベクトル $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ を考える.

$$\vec{P} = \alpha\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}, \quad \vec{Q} = \vec{A} + \beta\vec{B} + \vec{C}, \quad \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \gamma\vec{C}$$

ただし, α, β, γ は定数とする.

上記の 3 つのベクトル $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ が一次独立であるためには, 定数 α, β, γ に関して, $\alpha\beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 2 \neq 0$ が成り立たなければならないことを証明せよ.

(福井大 2018) (m20182414)

- 0.160 (1) 次の連立微分方程式の解を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y(x) + z(x) + 1 \\ \frac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 \end{cases}$$

(a) $z(x)$ を消去して, $y(x)$ のみに対する微分方程式を導出せよ.

(b) $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を (a) を利用して求めよ.

- (2) 次の連立微分方程式の $y(x)$ と $z(x)$ の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = y(x) + z(x) + 1 \\ \frac{dz(x)}{dx} = -y(x) + 3z(x) + 3 + \frac{e^{2x}}{(1+x)^2} \end{cases}$$

- (3) 次の連立微分方程式の解を求めたい. 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} = -y(x)z(x) \\ \frac{dz(x)}{dx} = y(x)z(x) \end{cases}$$

(a) $y(x) + z(x)$ が常に一定の値 (定数) c_1 をとること, すなわち,

$$y(x) + z(x) = c_1$$

が成立することを証明せよ.

(b) 初期値として,

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

が与えられたとき, $y(x)$ と $z(x)$ の解を (a) を利用して求めよ.

(福井大 2020) (m20202416)

- 0.161 体積が一定で, 各辺の長さが変化する直方体について, 以下の問いに答えよ.

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし, 直方体の体積を定数 $C > 0$ とおく.

このとき, z を x, y, C を用いて表せ. ただし, $x > 0, y > 0, z > 0$ とする.

(2) 直方体の表面積を $f(x, y)$ とする. $f(x, y)$ を x, y, C を用いて表せ.

(3) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ を求めよ. ただし,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

である.

- (4) $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を, C を用いて表せ.
 (5) 一般に, 以下の定理が知られている

定理

二階偏微分可能な二変数関数 $g(x, y)$ について,

$$g_x(a, b) = 0, \quad g_y(a, b) = 0$$

のとき,

$$D = \{g_{xy}(a, b)\}^2 - g_{xx}(a, b)g_{yy}(a, b)$$

とおくと, $g(x, y)$ は $x = a, y = b$ において, $D < 0$ かつ $g_{xx}(a, b) > 0$ のとき極小となる.

上記の定理を用いて, $f(x, y)$ は (4) で求めた x, y において極小となることを示せ. なお, 定理の証明は不要である.

(福井大 2020) (m20202417)

0.162 非負の整数 n , および $-1 \leq x \leq 1$ を満たす任意の実数 x に対して,

$$T_n(x) = \cos nz, \quad \text{ただし, } \cos z = x \tag{1}$$

と定義する. 式 (1) において, $n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり, $n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる. 以下の問いに答えよ.

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \tag{4}$$

を利用し, $T_2(x)$ を x の多項式として表せ.

(b) $T_n(x)$ は, $T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される. これを次のようにして証明したい. 以下の下線部 (A)~(C) を適当に埋めよ.

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz + z) = \cos nz \cos z - \underline{\hspace{2cm}} \text{(A)} \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz - z) = \underline{\hspace{2cm}} \text{(B)} \tag{7}$$

と書ける. 式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}} \text{(C)} \tag{8}$$

が得られる. 式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり, これより式 (5) が導きられる.

(c) 式 (5) に基づいて, $T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて, $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して, 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \quad (10)$$

ちなみに, $T_n(x)$ は第一種チェビシエフ多項式と呼ばれ, \cos の n 倍角の公式の導出やチェビシエフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である.

(福井大 2020) (m20202422)

0.163 $y = x^x \cos(x)$ とするとき, $y' = x^x \cos(x) \{(\cos(x) - x \sin(x)) \log(x) + \cos(x)\}$ が成り立つことを証明しなさい.

(静岡大 2009) (m20092509)

0.164 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$ とするとき, 次の式を証明せよ.

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ここで, $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は直交座標系の基本ベクトルである.

(岐阜大 2005) (m20052607)

0.165 $e^{i\pi} + 1 = 0$ であることを証明せよ. ここで, $i = \sqrt{-1}$ である.

(岐阜大 2005) (m20052609)

0.166 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ であることを証明せよ.

(岐阜大 2007) (m20072614)

0.167 $\phi(x, y, z)$ を微分可能なスカラー関数, $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ を微分可能なベクトル関数とすると, 次の式が成り立つことを証明せよ. ここで, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は直交する 3 本の直線 x, y, z を座標軸とする座標系 (デカルト座標系) における基本ベクトルである.

(1) $\text{rot}(\text{grad } \phi) = \mathbf{0}$ (注: 太字 $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.)

(2) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0$

(岐阜大 2007) (m20072620)

0.168 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する.

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

次の問に答えよ. ただし, $t > 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい.

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ.

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ.

(3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$, すなわち

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx\right) \left(\int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ.

(4) 変数 (x, y) から (r, θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r \cos \theta, \\ \sqrt{y} = r \sin \theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014) (m20142601)

0.169 次の等式を (1),(2) に従って証明せよ. ただし, $a > 0$ ($a \neq 1$), $b > 0$ ($b \neq 1$), $Q > 0$ とせよ.

$$\log_a Q = \frac{\log_b Q}{\log_b a}$$

(1) $x = \log_a Q$ のとき, Q を指数関数で表現せよ.

(2) 上で求めた式の両辺に対して, 底を b とする対数をとることで, $\log_a Q = (\log_b Q)/(\log_b a)$ になることを示せ.

(豊橋技科大 2003) (m20032701)

0.170 定積分 $I(n, a) = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx$ について以下の問いに答えよ. ただし, n は 0 または正の整数, a は実数とする.

(1) $n = 0, a = 1$ のとき, $I(0, 1) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である.

$a > 0$ のとき, $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを証明せよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて定積分 $I(n, a)$ を n と a の関数として表せ. ただし, n は 1 以上とする.

(豊橋技科大 2009) (m20092702)

0.171 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ.

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ.

(2) A^n を求めよ (ただし, n は正整数とする).

(3) A によって 1 次変換 $f: \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$ を定める.

f は任意の直線を直線に, 平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ.

(4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする. Z の面積を求めよ.

(名古屋大 2003) (m20032802)

0.172 以下の不等式を証明せよ.

(1) $1 + x \leq e^x$

(2) $x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n = 1$ ならば $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$. ただし, $x_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

(名古屋大 2004) (m20042801)

0.173 関数 $y = e^{\sqrt{3}x}(\sin x + 1)$ の第 n 次導関数が $y^{(n)} = e^{\sqrt{3}x} \left\{ 2^n \sin\left(x + \frac{\pi}{6}n\right) + (\sqrt{3})^n \right\}$ となることを証明せよ.

(名古屋大 2005) (m20052802)

0.174 $f(t), g(t)$ は t を変数とする三次元ベクトル関数とする. 以下の問に答えよ. なお, $\frac{d}{dt}f = f'$ と記すこととする.

- (1) $f(t)$ が長さ一定のベクトル関数である場合, $f(t)$ と $f'(t)$ は直交することを証明せよ. ただし, $|f(t)| > 0, |f'(t)| > 0$ とする.
- (2) 点 A の位置ベクトルを $g(t)$ とするとき, 位置ベクトルが $g'(t)$ となる点を点 B とする. もし, $g(t) // g''(t)$ が成り立つならば, 三角形 OAB の面積は t に依存しないことを証明せよ. ただし, $g(t)$ は t に関して 2 階微分可能であるとし, O は原点とする. また, $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ の公式を用いてよい.

(名古屋大 2011) (m20112804)

0.175 原点と正規直交する基底ベクトル $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ をもち, それぞれの基底ベクトルに対応する座標を x, y, z とするユークリッド空間を考える. また, 演算子 ∇ を $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$ と定義する.

- (1) $V = xy(x^2 + y^2 + z^2)$ とする. ∇V を基底ベクトルと x, y, z を用いて表せ.
- (2) 以下に示す \vec{f} に対して, $\nabla W = \vec{f}$ となるスカラー関数 $W(x, y, z)$ が存在するかを考える. ここで, W の 2 階偏導関数は連続であり, $W(0, 0, 0) = 0$ とする. W が存在するならばそれをひとつ示し, W が存在しないならばそれを証明せよ.
 - (i) $\vec{f} = (2x + yz)\vec{e}_x + (2y + zx)\vec{e}_y + (xy + 1)\vec{e}_z$
 - (ii) $\vec{f} = (2x + yz)\vec{e}_x + (2y + z)\vec{e}_y + (xy + 1)\vec{e}_z$

(名古屋大 2018) (m20182801)

0.176 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ.

- (1) 直接計算で $A^3 = A + A^2 - I$ を確かめよ. ここで, I は 3 次単位行列である.
- (2) (1) の結果に基づき $n \geq 4$ に対して, 帰納法で $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$ を証明せよ.
- (3) (2) の結果を用いて A^{50} を求めよ.

(名古屋工業大 2006) (m20062907)

0.177 3 次行列 X が方程式 $A^*X = A^{-1} + 2X$ を満たす. ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \text{adj}A \text{ は行列 } A \text{ の余因子行列である. このとき, 次の問いに答えよ.}$$

- (1) 方程式 $(|A|I - 2A)X = I$ が成立することを証明せよ. ここで, $|A|$ は行列 A の行列式であり, I は 3 次単位行列である.
- (2) 行列 X を求めよ,
- (3) X の固有値を求めよ,

(名古屋工業大 2013) (m20132908)

0.178 関数の微分の定義は次式で与えられる.

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

この極限值が存在するとき, 関数 $h(x)$ は微分可能であるという.

上の定義を用いて、次の定理を証明しなさい。

【定理】

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば、 $f(x) + g(x)$ は微分可能であり、次の公式が成り立つ。

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

(三重大 2002) (m20023107)

0.179 ある 3×3 の行列 A とベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がある。これらの間に、 $A\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{a}_1$, $A\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2$, $A\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_3$ の関係が成り立つとして、以下の間に答えよ。

(1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は互いに直交するベクトルであることを証明せよ。

(2) ベクトル $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ を、 $\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3$ で分解した。定数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めよ。

(3) $A\mathbf{r}$ および $A^2\mathbf{r}$ を求めよ。

(4) $A^n\mathbf{r}$ の一般形を求めよ。

(三重大 2003) (m20033114)

0.180 n が自然数のとき、不等式 $n! \geq 2^{n-1}$ が成立することを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

(三重大 2007) (m20073109)

0.181 3次元ベクトル空間 \mathbf{R}^3 において、3個のベクトル

$$\mathbf{e}_1 = {}^t(1, 0, 1), \quad \mathbf{e}_2 = {}^t(2, 1, 0), \quad \mathbf{e}_3 = {}^t(0, 0, 1)$$

を考える。以下の問いに答えなさい。ここで、上付き添え字 t は転置を表す。

(1) 方程式 $\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ から $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を未知数とする連立方程式を導出しなさい。

(2) (1) の連立方程式を解くことにより、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ が互いに一次独立であることを示しなさい。

(3) \mathbf{R}^3 の任意のベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の線形結合で一意に表せることを証明しなさい。

(三重大 2007) (m20073112)

0.182 (1) 次の等式を証明しなさい。

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$$

(2) (1) を利用して、次の行列の行列式の値と逆行列を求めなさい。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(三重大 2010) (m20103103)

0.183 箱の中に1から8までの整数を記入した8枚のカードが入っている。この箱から任意にカードを1枚取り出し、その数字を調べてからもとの箱に戻す。これを3回繰り返す。取り出したカードの数字の最大値を X とする。

(1) $X \leq 4$ となる確率を求めよ。

- (2) $k = 1, 2, 3, \dots, 8$ として, $X = k$ となる確率を求めよ.
 (3) 数列の和に関する下記の等式について, 数学的帰納法を用いて証明せよ. n は自然数を示す.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$$

- (4) (3) の等式を参照して X の期待値を求めよ.

(三重大 2011) (m20113104)

0.184 $\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ (C は定数) を証明せよ.

(三重大 2016) (m20163104)

- 0.185** (1) 次の行列 A とベクトル \vec{v} の積 $A\vec{v}$ を求めよ. またベクトル \vec{v} と $A\vec{v}$ の内積 $\vec{v} \cdot A\vec{v}$ を求めよ. ただし, a, b, c, x, y は実数とする.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- (2) (1) の行列 A の行列式 $|A|$ と, 2つの固有値および固有ベクトルを求めよ.
 (3) (1) の \vec{v} が $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$ を満たし, (2) の行列式が $|A| \neq 0$ を満たすとき, (1) の内積が $\vec{v} \cdot A\vec{v} > 0$ となる十分条件は, $a > 0, c > 0$ かつ $|A| > 0$ であることを証明せよ.

(三重大 2017) (m20173115)

- 0.186** (1) 関数 $f(x) = \log(1-x)$ を $x < 1$ において定義する. 任意の自然数 n に対して, 下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい. ここで, $\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする.

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

- (2) 関数 $g(x, y)$ について, $m \geq 0, n \geq 0, m+n > 0$ の条件を満たす任意の整数 m, n に対して式 $\textcircled{7}$ が成り立つとする. また, 式 $\textcircled{1}$ が成り立つとする.

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} g(x, y) = g(x, y) \dots \dots \dots \textcircled{7}$$

$$g(0, 0) = e \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

なお, $m = 0$ のとき式 $\textcircled{7}$ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0 \partial y^n} g(x, y) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) = g(x, y)$$

また, $n = 0$ のとき式 $\textcircled{7}$ は以下の式を表すものとする.

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m \partial y^0} g(x, y) = \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x, y) = g(x, y)$$

- (a) $g(x, y) = u(x)w(y)$ とおく. 任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい. ここで, $u(x)$ は変数 x に関する関数, $w(y)$ は変数 y に関する関数とする.

$$\frac{d^m}{dx^m} u(x) = u(x)$$

- (b) 関数 $g(x, y)$ を求めなさい.

(三重大 2018) (m20183104)

0.187 $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$) に対して以下の等式を証明せよ.

(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ (2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ (n は正の整数)

(2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (必要ならば $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ を使ってもよい)

(奈良女子大 2001) (m20013205)

0.188 n 行 n 列の正方行列 A の転置をとり, さらに全ての成分の複素共役をとった行列を行列 A のエルミート共役といい, A^\dagger と書く. つまり,

$$(A^\dagger)_{ij} = A_{ji}^* \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

また, $A^\dagger = A$ であるとき, 行列 A をエルミート行列と言う. エルミート行列に関して以下の問いに答えよ.

- (1) エルミート行列の固有値は実数であることを証明せよ.
- (2) エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示せ.
- (3) 下に示す行列 A はエルミート行列である. 行列 A の固有値と固有ベクトルを求め, 上記 (1), (2) が成り立つことを確かめよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(奈良女子大 2001) (m20013212)

0.189 次の関数 $y = e^x \sin x$ について以下の間に答えよ.

- (1) 第 1 次導関数 $y^{(1)}$ が $y^{(1)} = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ となることを示せ.
- (2) 第 n 次導関数 $y^{(n)}$ が $y^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(奈良女子大 2003) (m20033202)

0.190 以下では e は自然対数の底とする.

- (1) $x \geq 1$ のとき, 次の不等式が成立することを証明せよ. $e^x > x^2$
- (2) 上の (1) における不等式の両辺を積分することによって, $x \geq 1$ のとき次の不等式が成立することを証明せよ. $e^x > \frac{x^3}{3} + 2$

(奈良女子大 2003) (m20033203)

0.191 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限值を求めよ. 収束しない場合はそのことを証明せよ.

(1) $\frac{2n^3 + n + 2}{n^3 - n^2 + n + 1}$, (2) $\frac{\sin n}{n}$, (3) $\frac{(-1)^n n + 1}{n}$

(奈良女子大 2003) (m20033204)

0.192 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を実数とするとき, 次の不等式を証明せよ.

(1) $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2$
 (2) $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(奈良女子大 2003) (m20033207)

0.193 m と n が整数のとき, 次の式を証明せよ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)} d\theta = \delta_{m,n}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ である. また, $\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで,

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad \text{と定義されている.}$$

また, 必要なら公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いよ.

(奈良女子大 2003) (m20033210)

0.194 A を連続微分可能なベクトル場, $f(x, y, z)$ を連続微分可能な関数とするとき, 以下の関係式を証明せよ. ただし, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = |\mathbf{r}|$ である.

- (1) $\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla f(x, y, z)) = 0$
- (2) $(A \cdot \nabla)A = \frac{1}{2} \nabla(|A|^2) - A \times (\nabla \times A)$
- (3) $\nabla \cdot \left(\frac{A \times \mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{r} \cdot (\nabla \times A)}{r}$

ここで,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

である. 必要なら, 以下の関係式を用いてよい.

- (a) $\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f \nabla \cdot A$
- (b) $\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f \nabla \times A$
- (c) $\nabla(A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B$
- (d) $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

(奈良女子大 2013) (m20133207)

0.195 (1) $|x| < 1$ として, 次式を証明せよ.

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right)$$

(2) $\log_e \frac{3}{2}$, $\log_e 2$, $\log_e 3$ を小数第3位まで求めよ.

(京都大 1995) (m19953301)

0.196 $z = xf(z) + y$, $u = g(z)$ のとき,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(z) \frac{\partial u}{\partial y}$$

であることを証明せよ.

(京都大 1996) (m19963301)

0.197 行列 A, B, C が $A \cdot B$, $B \cdot C$ が各々の行と列が与えられるように定義されているとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ が定義されていることを示せ.
- (2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ を証明せよ. ただし, A^T は転置行列である.
- (3) (2) を用いて $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ を証明せよ.

(京都大 1996) (m19963303)

0.198 関数 $f(z)$ は $z = a$ において m 位の極 (m は正の整数) をもつとする.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z) \right)$$

を証明せよ. ただし, C は $z = a$ を囲む適当なサイズの単純閉曲線である.

(京都大 2002) (m20023306)

0.199 以下の問に答えよ.

(1) $P(x)$ と $Q(x)$ は独立変数 x だけを含む関数とする. この時次のような 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

の一般解は

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + c \right]$$

になることを証明せよ.

(2) 上記の関係式を使って次の 2 つの微分方程式の一般解を求めよ.

(a) $2x \frac{dy}{dx} + y = 2x^2$

(b) $(1+x^2) \frac{dy}{dx} = xy + 1$

(京都大 2004) (m20043302)

0.200 $f(z)$ が $z = a$ を中心とする単位円 C の内部および周上で正則であるとき, 以下を証明せよ.

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(a + e^{i\theta}) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

(京都大 2008) (m20083306)

0.201 \mathbf{R}^n において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ と任意の $\lambda (0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq \lambda F(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) F(\mathbf{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$ とおく. ただし, \langle, \rangle は \mathbf{R}^n の標準内積を表す.

(1)~(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(a) $F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$ は凸関数である.

(b) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, A\mathbf{y} \rangle \geq 2 \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$ が成り立つ.

(c) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle \geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid F(\mathbf{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 2010) (m20103304)

0.202 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{3}{a_n} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
によって定めるとき, 次の (1)~(3) に答えよ.

(1) $n \geq 1$ であるすべての n に対して, $a_n > \sqrt{3}$ であることを証明せよ.

(2) $n \geq 1$ であるすべての n に対して, $a_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3})$ であることを証明せよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$ であることを証明せよ.

(京都大 2012) (m20123302)

0.203 A を n 次の正方行列とし, $E + A$ が正則行列であるとする. ここで, E は単位行列である. このとき, 次の (1)~(3) に答えよ.

- (1) 等式 $(E - A)(E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$ が成り立つことを証明せよ。
 (2) $E + {}^tA$ は正則であることを示し、逆行列 $(E + {}^tA)^{-1}$ を、 $(E + A)^{-1}$ を使って表せ。ここで、 tA は A の転置行列を表す。
 (3) A が交代行列 (つまり、 ${}^tA = -A$) ならば、 $(E - A)(E + A)^{-1}$ は直交行列であることを証明せよ。ただし、ある行列 B が直交行列であるとは、 ${}^tB B = B {}^tB = E$ であることをいう。

(京都大 2012) (m20123304)

0.204 自然数 $n \geq 2$ に対して、
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$
とおく。次の (1),(2) を証明せよ。

(1) $I_n = J_n$ (2) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
 (京都工芸繊維大 2001) (m20013403)

0.205 実数 $p > 0$ について $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ とおく。次の (1),(2) を証明せよ。

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ (ただし、 a は実数) (2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$
 (京都工芸繊維大 2002) (m20023404)

0.206 一般に 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + x_{33}$ とおく。

$\text{tr}(X)$ を X のトレースという。 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\text{tr}(X)$ の値を求めよ。
 (2) 任意の 3 次正方行列 X のたいして、 $\text{tr}(XA) = \text{tr}(AX)$ となることを証明せよ。
 (3) $AX - XA = A$ となる 3 次正方行列 X は存在しないことを証明せよ。

(京都工芸繊維大 2013) (m20133401)

0.207 xy 平面上の関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy - x + 2y$ を考える。実数 a, b は $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ を満たしている。実数 t の関数

$$g(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cos t, b + h \sin t) - f(a, b)}{h^2}$$

を考える。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) 次の等式を証明せよ。

$$g(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cos^2 t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \sin t \cos t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \sin^2 t$$

- (3) t が実数全体を動くとき、 $g(t)$ の最大値を求めよ。

(京都工芸繊維大 2013) (m20133402)

0.208 次の不等式を証明せよ。(ただし、 $x \geq 0$) $e^x > \frac{x^2}{2}$

(大阪大 1995) (m19953502)

0.209 次のことを証明せよ. $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ (ヒント: $\log x = -y$ とおき給え.)
(大阪大 1995) (m19953503)

0.210 2つの3次元空間ベクトル $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$, $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$ に対して, 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は次のように定義される.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

但し, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は空間の基本ベクトル (大きき1, 互いに垂直) を, また, $|\quad|$ は行列式を表す. この時, 以下の設問に答えよ.

- (1) $\vec{a} \times \vec{b}$ は \vec{a} および \vec{b} と垂直になることを証明せよ.
- (2) 外積について $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ. また, 成立しない場合は, $\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{b} \times \vec{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ.
- (3) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ ならば, \vec{a} と \vec{b} は平行となり, また逆に \vec{a} と \vec{b} が平行ならば, $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ となることを証明せよ.
- (4) 3つの空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ. (\cdot は, 内積を表す.)

(大阪大 1996) (m19963501)

0.211 $I_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\sqrt{x})^{n-1}}{1+\sqrt{x}} dx$ に対し,

- (1) I_0, I_1 を求めよ.
- (2) $I_n + I_{n-1}$ を求めて, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ を示せ.
- (3) (1),(2) より, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ を証明せよ.

(大阪大 1997) (m19973502)

0.212 平面上に2点 A, B がある. 線分 AB を直径とする円を考え, その中心を C , 半径を R とする.

- (1) 2点 A, B の位置ベクトルを \vec{a}, \vec{b} とし, 円周上の任意の点 P の位置ベクトルを \vec{p} としたとき,

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

の関係が成り立つことを証明せよ.

- (2) この点 P における接線を l とする. 接線 l 上の任意の点 Q の位置ベクトルを \vec{q} とし, 円の中心点 C の位置ベクトルを \vec{c} としたとき,

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{q} - \vec{c}) = R^2$$

の関係が成り立つことを証明せよ.

- (3) 2点 A, B の座標をそれぞれ $(2, 4), (4, 2)$ とする. 接線 l が原点を通るときの接点 P の座標を求めよ.

(大阪大 1997) (m19973504)

0.213 n 枚のコインを1列に並べる. 各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの2通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H , 裏を T で表すと, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通り置き方があるので $f(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$ の 4 通りの置き方があるので $f(2) = 4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.
- (2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2) = 3$ である (ここで, (T, T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意). このとき, 以下の設問に答えよ.
- (a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3), g(4)$ を求めよ.
- (b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1), g(n-2)$ を用いて表せ.
- (c) (b) の漸化式より,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005) (m20053507)

0.214 曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた領域の重心 (\bar{x}, \bar{y}) を考える. ただし, 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする.

- (1) 上記の領域を D とするとき, \bar{x} は

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy}$$

で定義される.

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

となることを証明せよ.

- (2) 同様の形式で \bar{y} を求めよ.
- (3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 (\bar{x}, \bar{y}) を求めよ. ただし, \exp は指数関数を表すものとする.

(大阪大 2011) (m20113505)

0.215 以下の設問に答えよ.

- (1) 次式を証明せよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)}{x^3} = 0 \quad (a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right)}{x^2} = 0 \quad (b)$$

- (2) 次式を証明せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = 0$$

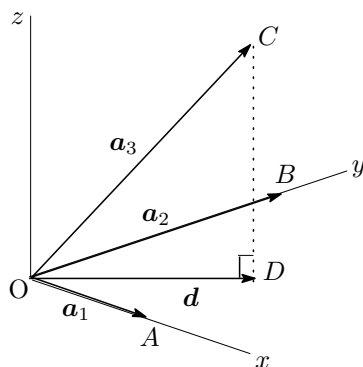
(3) 問 (1), 問 (2) の結果を用いて, 次式を証明せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2}\right) \right\} = 0$$

(大阪大 2012) (m20123505)

0.216 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は空間の 3 次元ベクトルとして, 以下の設問に答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立で $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ とおくと, $\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ. ただし, λ_2, λ_3 は実定数である.
- (3) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が一次独立で $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ とする. $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$ であることを証明せよ. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は実定数である.
- (4) 空間に直交座標系 $O - xyz$ が与えられているものとする. 図に示すように, x 軸上の点 A に対し $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA}$, y 軸上の点 B に対し $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OB}$, 空間内の点 C に対し $\mathbf{a}_3 = \overrightarrow{OC}$ とする. 点 C から xy 平面に垂線 CD を引くとき, ベクトル $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ を \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 の線形結合で表せ.



(大阪大 2018) (m20183506)

0.217 n を 0 以上の整数とし,

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2)^{n/2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

とおく. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, 任意の自然数 ℓ に対して, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\ell e^{-t^2} = 0$ となることは証明なしに用いてもよい.

- (1) 極座標への変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いて, J_n を r に関する積分のみで表示せよ.
- (2) J_0 の値を求めよ.
- (3) n を 2 以上の自然数とすると, J_n と J_{n-2} の関係式を求め, さらに J_{10} の値を求めよ.

(大阪府立大 2010) (m20103602)

0.218 有限次元の実ベクトル空間について, つぎの各問いに答えよ.

- (1) ベクトル空間の次元の定義を述べよ.
- (2) V をベクトル空間, W を V の部分空間とする. V と W の次元が等しいならば, $W = V$ であることを証明せよ.

(大阪府立大 2010) (m20103603)

0.219 A を n 次の複素正方行列とする. ある自然数 m について, $A^m = O$ が成り立つならば, $A^n = O$ が成り立つことを示そう.

証明は背理法により行う. すなわち, $A^n \neq O$ と仮定して矛盾を導く. $A^n \neq O$ より, ある n 次元複素数ベクトル \boldsymbol{x} をとると, $A^n \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ となる. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}, \dots, A^n \boldsymbol{x}$ は一次独立であることを示せ.
- (2) 複素 n 次元数ベクトル空間 C^n の $n+1$ 個のベクトルは必ず一次従属であることを示せ.
- (3) 上記の (1), (2) を用いて証明を完成せよ.

(大阪府立大 2016) (m20163606)

0.220 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の各問に答えよ.

- (1) $\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(神戸大 1996) (m19963802)

0.221 $f(x) = a^x$ とする. ($0 < a$)

- (1) $f(x)$ を $x = 0$ でマクローリン展開せよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ ($1 < a$), $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x x^n = 0$ ($0 < a < 1$) を証明せよ.

(神戸大 1996) (m19963804)

0.222 x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられることを説明 (証明・解説) せよ.

(神戸大 1997) (m19973801)

0.223 次のような変数変換について以下の問いに答えよ.

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

ただし, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ $E = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 1\}$ とする.

- (1) $u^2 + v^2 \leq 1$ が $x^2 + y^2 \leq 1$ に移ることを証明せよ.
- (2) ヤコビアンを求めよ.
- (3) $\int_D dx dy, \int_E \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$ を求めよ.
- (4) $\int_D dx dy = \int_E \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$ は成立しない. 何故か.

(神戸大 1999) (m19993804)

0.224 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であることを証明せよ.

(神戸大 2000) (m20003801)

0.225 $f(x), g(x)$ を何回でも微分可能な関数とする. このとき

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

を証明せよ. ここで, $h^{(l)}(x)$ は関数 $h(x)$ の l 階導関数を表す.

(神戸大 2003) (m20033802)

0.226 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \frac{1}{1 - |c|}$ において, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

- (1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つことを示せ.
- (2) c_n を計算しなさい.
- (3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053804)

0.227 a, b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

で数列 a_n , b_n を定める.

- (1) $a_n \geq b_n$ を示せ (相加平均 \geq 相乗平均 を示せ).
- (2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005) (m20053805)

0.228 線形写像 $T: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ および \mathbf{R}^4 の基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ と \mathbf{R}^3 の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ が与えられているとする. このとき, $[T(\mathbf{u}_1) \ T(\mathbf{u}_2) \ T(\mathbf{u}_3) \ T(\mathbf{u}_4)] = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]B$ を満たす 3×4 行列 B が一意に存在する. この B を $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ に関する T の表現行列という. 以下の問いに答えよ.

- (1) 3×4 行列 A が与えられ, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$) であるとき,

$$[T(\mathbf{u}_1) \ T(\mathbf{u}_2) \ T(\mathbf{u}_3) \ T(\mathbf{u}_4)] = A[\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4]$$

を示し, $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4]$ $Q = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ において, $B = Q^{-1}AP$ を証明せよ.

- (2) $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$) であるとき,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

(神戸大 2009) (m20093814)

- 0.229** (1) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ を計算せよ.

$$(2) \text{ 等式 } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - bc + cd)^2 \text{ を示せ.}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{bmatrix} \text{ について,}$$

${}^tA = -A$ を示し, これを用いて $\det(A) = 0$ を証明せよ.

(神戸大 2010) (m20103806)

0.230

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f(x) > 0$ を示せ.
- (3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x < \tanh(\tan x)$ を証明せよ.

(ただし, 任意の実数 t に対して, $\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ である.)

(神戸大 2011) (m20113807)

0.231 線形変換 $T: R^4 \rightarrow R^4$ を

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 \in R)$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{x} \in R^4 \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ の基 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を 1 組求めよ.
- (2) $\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in R^4\}$ の基 $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ を 1 組求めよ.
- (3) (1), (2) で求めた $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ.

(神戸大 2011) (m20113810)

0.232 ある集合 X の部分集合 A, B, C について, 次のことを証明せよ. 対称差 $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B\Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ がともに有限集合であるならば, $A\Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ も有限集合である. (ただし, $A \setminus B$ は A の元で B に含まれないもの全体を表す.)

(神戸大 2012) (m20123807)

0.233 z は $|z| = 1, z \neq 1$ を満たす複素数とする. このとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \quad (*)$$

が (ある複素数に) 収束することを示したい. 以下の問いに答えよ. 非負整数 n に対し

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k \text{ とおく.}$$

- (1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \frac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.
 (2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^m \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

- (3) (1),(2) を用いて, 以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し, 正の整数 N が存在して,
 $m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して

$$\left| \sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon \text{ が成り立つ.} \quad (C)$$

(コーシーの収束条件定理によれば, 条件 (C) は級数 (*) の収束と同値であるため, (3) より級数 (*) の収束が証明できることになる.)

(神戸大 2014) (m20143810)

- 0.234** X, Y を集合とし, $f : X \rightarrow Y$ を写像とする. A_i, A で X の任意の部分集合を, B で Y の任意の部分集合を表すとき, 次の主張 (命題) のそれぞれについて, 正しければ証明をし, 正しくなければ反例を挙げよ.

- (1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
 (2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$
 (3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ここで $f(A)$ は A の f による像を, $f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

(神戸大 2017) (m20173806)

- 0.235** $(-1, 1)$ で定義された C^∞ -級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとす:

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

- (1) a_n を求めよ.
 (2) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ. ただし, 不等式 $1-x \leq e^{-x}$ ($0 \leq x \leq 1$) および等式 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.
 (3) $n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ. また, 収束するときは極限值を求めよ.

(神戸大 2018) (m20183805)

- 0.236** $y = \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$ の微分係数 $\frac{dy}{dx}$ が次式で与えられることを証明せよ. ただし, a は定数で $a > 0$ である.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

(鳥取大 1997) (m19973901)

0.237 $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, f は C^1 級なるとき, 次式を証明せよ.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

(鳥取大 2000) (m20003904)

0.238 自然数 n に対し, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおく. このとき次の各問いに答えよ.

- (1) $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ を求めよ.
- (2) 自然数 n を固定する. 各 $j = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, 多項式 $\frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^n$ は $x^2 - 1$ で割り切れることを数学的帰納法を用いて証明せよ.
- (3) 次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$$

$$\text{ただし必要ならば } \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \frac{2n(2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1}$$

を用いてよい.

(鳥取大 2001) (m20013902)

0.239 (1) $x > 0$ において, 不等式 $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ を証明せよ.

(2) $\sin x$ をマクローリン展開し, はじめの 4 項を書け.

(3) 前問 (2) の結果をも使って, 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ を求めよ.

(鳥取大 2001) (m20013903)

0.240 微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ.

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 : $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 : $y'(x) = \cos(x)$ ただし, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006) (m20063901)

0.241 次を証明せよ.

(1) 対称行列 A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ. ただし, A が対称行列とは A が実正方行列であって $A^T = A$ が成立することをいう.

(2) 直交行列 A を係数行列としてもつ 1 次変換 (直交変換) $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ はベクトルの内積を不変に保つことを証明せよ. ただし, A が直交行列とは A が実正方行列であって $A^T = A^{-1}$ が成立することをいう.

(鳥取大 2009) (m20093905)

0.242 1 から 9 までの数字を並べて 3 次正方行列 A を作る. ただし, すべての数字を一度ずつ使うこととする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の行列式が 0 であるようなものと, 0 でないようなものの例を一つずつ作れ.

(2) 階数が 1 であるような行列 A は作れないことを証明せよ.

(岡山大 2010) (m20104003)

- 0.243** (1) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx$ を求めよ.
 (2) 自然数 n に対して, 広義積分 $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x} dx$ を求めよ.
 (3) $x \geq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば, 広義積分 $\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x} dx$ は収束することを証明せよ.
- (岡山大 2011) (m20114002)

- 0.244** $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を写像とする. このとき, 次の命題について正しいときは証明を与え, 正しくないときは反例を与えよ.
- (1) g と合成写像 $g \circ f$ が線形写像で g が単射ならば, f は線形写像である.
 (2) f と合成写像 $f \circ g$ が線形写像ならば, g は線形写像である.
- (広島大 2003) (m20034110)

- 0.245** (1) 関数 $F(x, y)$ は連続かつ x, y に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ が連続であるとする. 関数 $f(t), g(t)$ は t に対して微分可能であるとする. このとき, 関数 $G(t) = F(f(t), g(t))$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f, g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.
 (2) 2変数関数 $F(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 1$ に対して, $x = 1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y = g(x)$ で
- $$g(1) = 0, \quad F(x, g(x)) \equiv 0$$
- をみたすものがあるとする. このとき $g'(1), g''(1), g'''(1)$ を求めよ.
- (広島大 2005) (m20054103)

- 0.246** 3次元ベクトル $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ に関する次の公式を証明せよ.
- $$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A}$$
- ここで \times は外積, \cdot は内積である.
- (広島大 2005) (m20054107)

- 0.247** $n \times n$ 複素行列に対し,
- $$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$
- を証明せよ. ただし, $A^\dagger = ({}^t A)^*$ (A の転置かつ複素共役) である.
- (広島大 2005) (m20054108)

- 0.248** 微分可能なスカラー関数 $\varphi(x, y, z)$ と微分可能なベクトル関数 $\vec{A}(x, y, z)$ について, 次式が成り立つことを証明せよ.
- (1) $\nabla \times \{\nabla \varphi(x, y, z)\} = 0$
 (2) $\nabla \cdot \{\nabla \times \vec{A}(x, y, z)\} = 0$
- (広島大 2008) (m20084106)

- 0.249** 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える. ただし, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする. 以下のそれぞれの命題について, 正しければ証明を与え, 誤りであるならば反例をあげよ.
- (1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立であるならば, $\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ も一次独立である.

- (2) $\{f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ が一次独立であるならば, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ も一次独立である.
- (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が f の相異なる固有値であり, \mathbf{a}_i が λ_i に対する固有ベクトルであるならば, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立である.

(広島大 2010) (m20104104)

0.250 以下の各命題について, 正しければ証明し, 正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ.

- (1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば, $f'(a) = 0$ を満たす.
- (2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば, $f'(a) = 0$ を満たす.
- (3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\int_0^1 f(x) dx = 0$ を満たすならば, 任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる.
- (4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする. このとき, $f(x)$ も I 上の連続関数である.
- (5) \mathbb{R}^2 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は, 原点 $(0, 0)$ において連続である.

(広島大 2013) (m20134106)

0.251 三角不等式 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ を証明せよ. ただし, \mathbf{a}, \mathbf{b} は任意のベクトルである.

(広島大 2016) (m20164106)

0.252 a を正の実数とする. 以下の問いに答えよ. ただし, 任意の正整数 k に対し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい.

- (1) 任意の非負整数 n に対し, ある正の実数 C が存在して, $x \geq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leq Cx^{-2}$$

が成立することを示せ. さらに, 任意の非負整数 n に対し, 広義積分

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ.

- (2) 非負整数 n に対し,

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく. $I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ.

- (3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする. 非負整数 m に対し, $I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ.
- (4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする. $I_4(a)$ を a を用いて表せ. ただし,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい.

0.253 関数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の n 次導関数 ($n \geq 1$) が $(-1)^n \{x^2 - 2nx + n(n-1)\} e^{-x}$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2) $f(x)$ の $x = 0$ におけるテーラー級数展開を求めよ (一般項も記すこと)。

(広島市立大 2001) (m20014201)

0.254 (1) 数学的帰納法によって、次の式を証明せよ。ただし、 n は正の整数である。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

(2) 次の無限級数の和 S を求めよ。

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots$$

(広島市立大 2006) (m20064201)

0.255 (1) 次の 3 次正方行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) 上の正則行列 A を対角化する正方行列 P を求めよ。また、対角化された行列 $P^{-1}AP$ も答えよ。

(3) n 次正方行列 B の固有値の一つが $b (b \neq 0)$ であるとき、 b^2 および b^{-1} がそれぞれ行列 B^2 および B^{-1} の固有値となることを証明せよ。ただし、 B は正則であるとする。

(広島市立大 2009) (m20094203)

0.256 座標平面上に楕円 $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。また、 $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ を平面ベクトル

全体のなす空間の正規直交基底とする。原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の直線が楕円 C と交わる点を P 、原点 O を通り方向ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の直線が楕円 C と交わる点を Q とすると、

$$\frac{1}{\|\vec{OP}\|^2} + \frac{1}{\|\vec{OQ}\|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

が成り立つことを証明せよ。

(広島市立大 2011) (m20114205)

0.257 双曲線関数 $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される。

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ を証明しなさい。

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい。

(山口大 2001) (m20014308)

0.258 ド・モアブルの法則 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ を数学的帰納法で証明しなさい。

(山口大 2003) (m20034304)

0.259 $f(x) = \tan^{-1} x$ のとき, 次の間に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数を求めよ.
- (2) 次の等式を数学的帰納法により証明せよ. ただし, $y = f(x)$ とする.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (n-1)! \cos^n y \sin \left(ny + \frac{n\pi}{2} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (3) $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ とすると, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)! \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

- (4) 関数 $f(x)$ をマクローリン展開せよ.
- (5) 次の等式を証明せよ.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}$$

(山口大 2005) (m20054311)

0.260 次の間に答えよ.

- (1) 関数 $f(x)$ は, $|x| < K$ で少なくとも $(n+1)$ 回微分可能であるとする. このとき, $f(x)$ の n 次のマクローリン展開式 (すなわち, $x=0$ を中心とする n 次のテーラー展開式) を求めよ (証明は不要).
- (2) $|x| < 1$ における関数 $f(x) = (1+x)^{-1}$ の n 次のマクローリン展開式において, ラグランジュの剰余項 $R_{n+1}(x)$ を求め, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ を示せ.
- (3) (2) の $f(x)$ のマクローリン級数展開を求めよ.

(高知大 2005) (m20054503)

0.261 実数を成分とする 2×2 行列全体の集合を V とする. さらに V から \mathbf{R} への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する. V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \quad f_2(M) = a + d$$

このとき, f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ. 線形写像である場合には, その核の一組の基底を求めよ. ただし, V と \mathbf{R} はそれぞれ \mathbf{R} 上の自然なベクトル空間とし, 線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい.

(高知大 2006) (m20064504)

0.262 A, B を 2 次の正方行列, また O を零行列, E を単位行列とする. 次の (1), (2), (3) は正しいか? 正しいければ証明し, 正しくなければ反例 (成り立たないような A, B の例) をあげよ.

- (1) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ が成り立つ.
- (2) $AB = O$ ならば $A = O$ または $B = O$ である.
- (3) $A^2 + 2A - E = O$ が成り立てば A は正則行列である.

(愛媛大 2005) (m20054606)

0.263 次の 4×4 型行列 A と, \mathbf{R}^4 のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{0}$ について, 以下の間に答えよ. ただし, 行列 A の成分 a は実数の定数である.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) x_1, x_2, x_3, x_4 を未知数とする方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が自明でない解を持つための a の条件を求めよ.
- (3) 次の集合は \mathbf{R}^4 の部分線形空間となることを証明せよ.

$$V = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$$

(九州大 1998) (m19984709)

- 0.264** n を 1 以上の整数とし, n 個の連続関数 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ の 1 次結合全体を $L[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}]$ と表す. 線形写像

$$f \in L[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}] \longrightarrow f' \in L[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}]$$

を T で表す. ただし f' は f の導関数である. 次の問に答えよ.

- (1) n 個の連続関数 $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ は 1 次独立であることを証明せよ.
- (2) $\text{Ker}(T), \text{Im}(T)$ を求め, それぞれの次元を求めよ. ここで, 記号 $\text{Ker}(T), \text{Im}(T)$ はそれぞれ

$$\text{Ker}(T) = \{f \in L[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}] \mid \text{恒等的に } Tf = 0\},$$

$$\text{Im}(T) = \{Tf \mid f \in L[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}]\}$$

を表す.

(九州大 2004) (m20044706)

- 0.265** 複素平面上の中心 a , 半径 r の半円 $C_r(a)$ を $C_r(a) = \{z = a + re^{i\theta} ; 0 \leq \theta \leq \pi\}$ で定める. ただし, $i = \sqrt{-1}$ である.

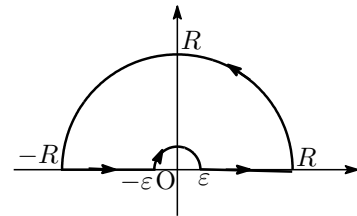
- (1) 正則関数 $f(z)$ に対して次式を示せ. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$ において考えよ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\pi f(a)$$

- (2) 不等式 $\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) が成立つことを示せ.
- (3) (2) の結果を用いて次式を証明せよ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

- (4) 関数 $\frac{e^{iz}}{z}$ の積分を図の矢印に示す道に沿って考えることにより, 定積分 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ の値を計算せよ.



(九州大 2004) (m20044708)

- 0.266** 次の時間 t と位置 x に関する波動方程式 ① と環境条件 ② を満足する関数 $y(x, t)$ を以下の手順に従って求めよ.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad \text{①} \quad \text{ただし環境条件は } y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \text{②}$$

- (1) 関数 $y(x, t)$ を位置の関数 $A(x)$ と時間の関数 $B(t)$ の積として $y(x, t) = A(x) \cdot B(t)$ と表すと, 次式が成立することを証明せよ.

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d^2 A(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2 B(t)} \frac{d^2 B(t)}{dt^2} \quad \text{③}$$

- (2) 式 ③ の左辺は位置 x , 右辺は時間 t だけの関数であるので式 ③ の両辺はある定数に等しい. これを $-\lambda$ とおくと $A(x)$ と $B(t)$ に関する次の 2 階の常微分方程式が成立する.

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + \lambda A(x) = 0 \quad \text{④} \quad \frac{d^2 B(t)}{dt^2} + \lambda c^2 B(t) = 0 \quad \text{⑤}$$

$\lambda > 0$ の場合の $A(x)$ と $B(t)$ の一般解を求めよ.

(3) $\lambda > 0$ の場合, 式 ② の環境条件より

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \textcircled{6}$$

が成立することを証明せよ.

(九州大 2008) (m20084702)

0.267 $G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ とおく. ただし, $\exp z = e^z$ である.

(1) $t > 0$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

であることを示せ.

(2) $t > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) dx = 1$$

であることを示せ. ただし, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) f を $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ 上の有界な連続関数とすると, すべての $x \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) f(y) dy = f(x)$$

であることを証明せよ.

(九州大 2008) (m20084712)

0.268 A, B, Q を n 次実正方行列とし, A は正則行列で, Q は対称行列であるとする. このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, 必要ならば, 実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい.

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ.

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば, AB も D に対角化可能であることを示せ.

(3) $A = Q^2$ かつ B が対称行列であるとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で, B は対称行列であるとする. このとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(九州大 2021) (m20214711)

0.269 数列 $\{a_n\}$ において, $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ であるとき, 次の問いに答えよ.

(1) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくと, S_n と a_{n+2} の間に成り立つ関係式を推定せよ.

(2) 上の問いで推定した関係式を数学的帰納法によって証明せよ.

(九州芸術工科大 1999) (m19994801)

0.270 次の問いに答えよ. ただし, \log は自然対数を表す. 自然対数の底は $e = 2.718\dots$ である.

(1) 次の積分 (広義積分) の値を求めよ.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

(2) 極限值に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ.

$$\lim_{x>0, x \rightarrow 0} x \log x = 0, \quad \lim_{x>0, x \rightarrow 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する.

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x \log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき, f, g の各々について, $[0, 1]$ における最大値と最小値を求めよ.

(4) 次の積分 (広義積分) は有限値に収束するか, それとも無限大に発散するか, いずれであるか判定せよ. その理由も示せ.

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}} dx$$

(九州芸術工科大 2000) (m20004802)

0.271 以下の問に答えよ.

(1) $\int_{-1}^2 |2 - x - x^2| dx$ を求めよ.

(2) $\int x \log x dx$ を求めよ.

(3) $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$ を証明せよ.

(4) $F(x) = \int_a^{-x^2} f(t) dt$ のとき, $F'(x)$ を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004803)

0.272 n 次単位行列を E , すべての成分が 1 である n 次正方行列を J で表す. a, b は正の実数として, $A = aE + bJ$ とおく. \mathbf{x} は n 次元列ベクトル (縦ベクトル) で, その第 i 成分を x_i とする ($i = 1, 2, \dots, n$). 次の問に答えよ.

(1) J^2 および $J\mathbf{x}$ を求めよ.

(2) x_1, x_2, \dots, x_n を未知数とする連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (零ベクトル) の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみであることを証明せよ. ただし, A の逆行列が存在することを用いずに示すこと.

(3) A の逆行列は $sE + tJ$ の形で与えられることがわかっている (s, t は実数). これを用いて, A の逆行列を求めよ.

(九州芸術工科大 2000) (m20004805)

0.273 α が行列 A の固有値であるとき, 以下が成り立つことを証明せよ.

(1) α は ${}^t A$ の固有値である. ただし, ${}^t A$ は A の転置行列である.

(2) k が自然数のとき, α^k は $A^k = \overbrace{A \cdots A}^k$ の固有値である.

(3) A が正則であるとき, α^{-1} は A^{-1} の固有値である.

(九州芸術工科大 2000) (m20004807)

0.274 (1) $x^n \log x$ を積分せよ. ただし, \log は自然対数.

(2) $I_1 = \int e^{ax} \sin bxdx, \quad I_2 = \int e^{ax} \cos bxdx$ を求めよ.

(3) 次の証明せよ. $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$

(九州芸術工科大 2001) (m20014803)

0.275 E を 3 次単位行列とし, A, X, Y を 3 次正方行列で

$$AX = E, \quad YA = E$$

を満たすものとする. このとき, $X = Y$ となることを証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054804)

0.276 (1) $F(x) = \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt$ のとき $\frac{dF}{dx}$ を求めよ.

(2) $\sin(\pi - x) = \sin x$ を利用して

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$
 を証明せよ.

(九州芸術工科大 2005) (m20054807)

0.277 関数 $f(x) = x^3$ が $x = 1$ で連続であることを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて証明せよ.

(佐賀大 2003) (m20034903)

0.278 次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(2) 複素数 λ が実正方行列 (すなわち実数を成分とする正方行列) A の固有値ならば, λ の共役複素数 $\bar{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ.

(3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ.

(4) n を偶数とするとき, すべての固有値が 0 でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ. また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ.

(佐賀大 2003) (m20034931)

0.279 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を \mathbf{R}^n とし, \mathbf{R}^4 から \mathbf{R}^3 への写像 f を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 11x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) \mathbf{R}^4 の任意のベクトル x に対して $f(x) = Ax$ を満たす行列 A を求めよ.

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ.

(3) $\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid f(x) = \mathbf{0}\},$

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^4\}$$

がそれぞれ $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3$ の線形部分空間になることを証明せよ. ただし, $\mathbf{0}$ は \mathbf{R}^3 の零ベクトルを表す.

(4) $\text{Ker}(f)$ と $\text{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2003) (m20034932)

0.280 $f(x), g(x)$ がいずれも n 回微分可能とするとき,

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{r=0}^n {}_n C_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$$
 を証明せよ.

(佐賀大 2004) (m20044906)

- 0.281 何回でも微分できる関数 $f(x), g(x)$ をそれぞれ f, g と書く. 次の等式がすべての自然数 n に対して成り立つことを証明せよ.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

ただし, 一般に, 関数 h の第 n 次導関数を $h^{(n)}$ と書き, $h^{(0)} = h$ とする.

(佐賀大 2005) (m20054901)

- 0.282 次の等式を証明せよ. 但し, $A(x) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ は 3次元空間のベクトル場である.

$$(1) \nabla \cdot (\nabla \times A(x)) = 0 \quad (2) \nabla \times (\nabla \times A(x)) = \nabla(\nabla \cdot A(x)) - \nabla^2 A(x)$$

(佐賀大 2005) (m20054908)

- 0.283 次の問に答えよ.

- (1) r を中心からの距離, θ を x 軸とのなす角とする. いま曲線が極座標 $r = f(\theta)$ で与えられる場合, 曲線と直線 $\theta = \theta_1$ および $\theta = \theta_2$ とで囲まれる図形の面積 S が次式で与えられることを証明せよ.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

- (2) 曲線 $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ の囲む面積を求めよ. ただし $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする.
 (3) 極座標 r の直交座標の微分量 (変分) について, その二乗和の平方根を考慮することにより $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$ の境界線の全長を求めよ. ただし $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする.

(佐賀大 2005) (m20054925)

- 0.284 実数を成分とする 4次縦 (列) ベクトル全体のなす線形空間を \mathbf{R}^4 とし, 4つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で生成される \mathbf{R}^4 の部分空間を V とするとき, 次の問に答えよ.

- (1) V の次元と (1組の) 基底を求めよ.

- (2) 次のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ が V に属するかどうかをそれぞれ判定せよ.

- (3) \mathbf{R}^4 の 2つの部分空間の共通部分は, \mathbf{R}^4 の部分空間になることを証明せよ.
 (4) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ で生成される \mathbf{R}^4 の部分空間と, $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ で生成される \mathbf{R}^4 の部分空間との共通部分の次元と基底を求めよ.

(佐賀大 2006) (m20064902)

- 0.285 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) A の固有値を a, b, c を用いて表せ.

- (2) a, b, c が実数のとき, A の固有値も実数になることを証明せよ. また, A が対角化できることを証明せよ.
- (3) $a = 1 + i, b = 1 - i, c = 0$ のとき, A を対角化せよ. ただし, i は虚数単位とする.
- (4) $a = 1, b = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, c = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき, A の固有値がすべて 0 になること, および A は対角化できないことを証明せよ. ただし, i は虚数単位とする.

(佐賀大 2006) (m20064904)

- 0.286** $x^2 \cos 3x$ の n 次導関数を求めよ. ただし, $g(x) = \cos ax$ ($a > 0$) のとき, $g^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$ となることを証明せずに使用してもよい.

(佐賀大 2006) (m20064914)

- 0.287** 3次元空間のベクトル場 $\mathbf{A}(x) = (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z))$ について次の等式を証明せよ.

$$\mathbf{A}(x) \times (\nabla \times \mathbf{A}(x)) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A}(x)^2) - (\mathbf{A}(x) \cdot \nabla) \mathbf{A}(x)$$

(佐賀大 2007) (m20074908)

- 0.288** a, b を実数とし, 次の問いに答えよ.

- (1) 次の等式を証明せよ.

$$\int_0^{2\pi} f(a \sin x + b \cos x) dx = \int_0^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2 + b^2} \sin x\right) dx$$

- (2) 前問の結果を用いて, 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} (a \sin x + b \cos x)^2 dx$$

(佐賀大 2009) (m20094901)

- 0.289** $0 < a < b$ とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 区間 $[a, b]$ で連続な実関数 $f(x), g(x)$ について以下の不等式を証明せよ.

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$$

- (2) 前問の結果を用いて, 次の不等式を証明せよ.

$$\left(\log \frac{b}{a} \right)^2 \leq \frac{(a-b)^2}{ab}$$

(佐賀大 2009) (m20094902)

- 0.290** $x > 0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について, 以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

- (1) 次の等式を証明せよ. ただし, $x > 1$ とする.

$$f(x) = (x-1)f(x-1)$$

- (2) x が自然数 n のとき, 次式を示せ.

$$f(n) = (n-1)!$$

(3) 定積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示し, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(佐賀大 2009) (m20094903)

0.291 点 $(1, 4)$ を通る関数 $y = x^2 + 2x$ の接線は存在しないことを証明しなさい.

(佐賀大 2016) (m20164909)

0.292 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ.

(2) $f(t)$ が $f(t) = \begin{cases} 1 & , |t| \leq T \\ 0 & , |t| > T \end{cases}$ ただし T は正の実数 で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ.

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω , 縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ.

(長崎大 2005) (m20055007)

0.293 いま, 2次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で, $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \leq \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ が成り立つとき, この2点間の関係を, $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする. このとき, 下記の問いに答えよ.

(1) 2点間の関係 L について, 下記の①~③は成り立つかについて, それぞれ答えよ.

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば, 必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば, 必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき, この2点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする. このとき, 点 $(1, 1)$ に対して, $(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は, 2次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ.

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする. また, $(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と, $(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える.

このとき, $(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを, 以下の手順で証明する.

[ア] と [イ] に, (1)における①~③のいずれかを入れよ.

関係 E の定義より, $(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ.

さらに, 仮定より, $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ.

ここで, [ア] より, $(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ.

また, 関係 E の定義より, $(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ.

以上により, [イ] により, $(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ.

(大分大 2002) (m20025101)

0.294 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1+2x}$ $\left(|x| < \frac{1}{2}\right)$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(0), f''(0), f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 2$) を答え, それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1), (2) の結果を使って, 関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008) (m20085103)

0.295 2次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える. このとき, 行列 A と2次元のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて, 2次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v}$ と定義する. ただし, 記号 T は, 行列やベクトルの転置を示し, \boldsymbol{v}^T はベクトル \boldsymbol{v} の転置を示すものとする.

- (1) 行列 A の固有値, 固有ベクトル (ベクトルの大きさは1とする) を求めなさい.
- (2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し, $U^T A U = D$ と表現する. ただし, D は2次の対角行列とする. 行列 U と D を求めなさい.
- (3) (2) の結果を利用して, $f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい.

(大分大 2012) (m20125108)

0.296 周期関数 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x < \pi$), $f(x + 2\pi) = f(x)$ の $(-\pi, \pi)$ におけるフーリエ級数は次のようになる.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

これを用いて, 次の公式を証明せよ.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

(大分大 2013) (m20135104)

0.297 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & 3a \end{pmatrix}$, ($a \neq 0$), 行列 $B = P^{-1} A P$ とする.

ここで, P^{-1} は P の逆行列を表す. このとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) 行列 P^{-1} を求めなさい.
- (2) 行列 B を求めなさい.
- (3) n を正の整数とすると, $A^n = P B^n P^{-1}$ が成り立つことを証明しなさい.

(大分大 2014) (m20145101)

0.298 (1) 次の命題を数学的帰納法により証明しなさい.

「任意の自然数 n に対して, $n^3 + 2n$ は3で割り切れる」

(2) 次の命題を背理法により証明しなさい.

「自然数 n が, 2 または 3 で割り切れないならば, 6 でも割り切れない」

(熊本大 2010) (m20105201)

0.299 以下の証明問題に答えなさい.

- (1) 自然数 n に関する不等式 $2^n > 2n - 1$ について, 数学的帰納法により証明しなさい.
- (2) $\log_{10} 2$ が無理数であることを, 背理法により証明しなさい.

(熊本大 2013) (m20135201)

0.300 n 個の中から r 個を取り出す組合せを ${}_n C_r$ とする時, 以下を証明せよ.

$${}_{n+1} C_r = {}_n C_{r-1} + {}_n C_r$$

(宮崎大 2020) (m20205309)

0.301 次のように定まるフィボナッチ数列 f_0, f_1, f_2, \dots について, 設問に答えなさい.

$$f_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 2) \end{cases}$$

(1) f_2, f_3, f_4 の値を答えなさい.

(2) f_0, f_1, f_2, \dots は

$$f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad n \in N \equiv \{0, 1, 2, \dots\}$$

を満たすことを証明しなさい.

(宮崎大 2022) (m20225307)

0.302 任意の命題 α に対して, 命題論理式

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

は, トートロジー (恒真式) であることを証明しなさい.

(宮崎大 2022) (m20225309)

0.303 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x}$ であることを証明せよ.

(鹿児島大 2005) (m20055413)

0.304 直交座標系における二つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して, これらの外積とよばれるベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \end{array} \right) \quad (1)$$

で定義される. 以下の問に答えよ.

(1) 三つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

(2) 式 (2) を利用し, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a} と \mathbf{b} とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ.

(鹿児島大 2006) (m20065403)

0.305 次のベクトルと行列式に関する問いに答えよ.

(1) 次のベクトル \mathbf{a} がベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ の一次結合で表すことができるための α, β の条件を求めよ.

$$\mathbf{a} = (0 \quad \alpha \quad \beta), \quad \mathbf{b}_1 = (2 \quad -1 \quad 1), \quad \mathbf{b}_2 = (2 \quad 1 \quad 3)$$

(2) 次の関係式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(b+c)(c+a)(a+b)$$

(鹿児島大 2008) (m20085404)

0.306 行列 $A = (\sin \theta \quad \cos \theta)$, 行列 $B = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ がある. このとき, 以下の各問に答えよ.

(1) AB ならびに BA を求めよ.

- (2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = 2BA - C$ とするとき, D を求めよ.
- (3) n を正の整数, $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$ とするとき, $D^n \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \\ \sin(-n\pi/2 + 2n\theta + \phi) \end{pmatrix}$ であることを証明せよ.
- (4) $R = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$ とするとき $D^n = R$ の形に書けることを示し, β を求めよ. また, このことを利用して逆行列 $(D^n)^{-1}$ を求めよ.

(鹿児島大 2012) (m20125404)

0.307 $[A], [B], [C]$ を n 次正方行列とし,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

とする. 次の問いに答えなさい.

- (1) n を 3 とするとき, $[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の 1 行 1 列の成分を計算しなさい.
- (2) n を任意の自然数とするととき, $[A]$ と $[B]$ の積 $[A][B]$ の i 行 j 列の成分を \sum 記号で表しなさい. ただし, i, j は, n 以下の自然数とする.
- (3) n を任意の自然数とするととき, $[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$ が成り立つことを証明しなさい.

(鹿児島大 2014) (m20145419)

0.308 $x > 0$ で α が実数のとき, 公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ を証明せよ.

(室蘭工業大 2005) (m20055513)

0.309 オイラーの公式: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ に関する以下の間に答えよ.

- (1) オイラーの公式を用いて, つぎの公式を証明せよ.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

- (2) $e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}$ という式に, オイラーの公式を適用し, 両辺の実部と虚部を比較して, 余弦関数および正弦関数の加法公式

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi$$

を導出せよ.

(室蘭工業大 2006) (m20065508)

0.310 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成り立つことを証明しなさい. ただし, a, b, c, d は実数であり, E を 2 次単位行列, O を 2 次零行列とする.

- (2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^5 を求めよ.

(3) 実数 x の n 次式を $x^n = (x^2 - x - 2)Q(x) + ax + b$ と表したときの係数 a および b を求めよ。ただし, $Q(x)$ は多項式であり, n は自然数とする。

(4) 行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して B^n を求めよ。なお, (1) の証明および (3) の答えを利用すること。

(室蘭工業大 2010) (m20105505)

0.311 関数 $f(x) = (ax + b)e^{cx}$ ($c \neq 0$) を考える。以下の問に答えよ。

(1) 不定積分 $\int f(x)dx$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 2 階導関数 $f''(x)$, さらに n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。

(3) $0 < c < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} nc^n = 0$ を証明せよ。

(ヒント : $c = \frac{1}{1 + \alpha}$ ($\alpha > 0$) とおいて $(1 + \alpha)^n$ の 2 項展開を考えよ。)

(4) $0 < c < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots + f^{(n)}(x))$$

を求めよ。

(島根大 2005) (m20055811)

0.312 次の問に答えよ。

(1) 次の関数の 2 次偏導関数を求めよ。

(a) $z = 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$

(b) $z = \sin(2x + 3y)$

(2) $z = f(x, y)$, $y = g(x)$ のとき, 次の式を証明せよ。

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

(島根大 2005) (m20055812)

0.313 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする。いま, $n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006) (m20065807)

0.314 n の関数 $f(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ について, 以下の設問に答えよ。

(1) $f(1)$ の値を求めよ。

(2) $f(n+1) = nf(n)$ を証明せよ。

(3) n が自然数のとき, $f(n+1) = n!$ を証明せよ。

(4) $f(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ を証明せよ。

(5) $\frac{f(3)f(-\frac{5}{2})}{f(\frac{3}{2})}$ の値を求めよ。なお, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。

(島根大 2007) (m20075808)

0.315 次の (1), (2), (3) に答えよ。 \mathbb{R}^n は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする。

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル v_1, \dots, v_n が V の基底である」ことの定義を述べよ。

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル v_1, v_2, v_3 が 1 次独立であるとき, v_1, v_2, v_3, v_4 が 1 次従属であるならば, v_4 が v_1, v_2, v_3 の 1 次結合で表せることを示せ。

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$) と定める. このとき,

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ.

(b) f_A の核 $\ker f_A$ の基底を求めよ.

(c) \mathbb{R}^5 の標準基底と \mathbb{R}^3 の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ.

(3) n 次実正方行列 B に対して, 線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $f_B(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) と定める. このとき, f_B が全射であれば, B は正則行列であることを証明せよ.

(島根大 2013) (m20135801)

0.316 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 (*) を満たす関数とする.

$$(*) f''(x) = f(x), f(0) = 1, f'(0) = 0$$

次の問いに答えよ.

(1) $(f(x))^2 - (f'(x))^2 = 1$ を証明せよ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

(4) 自然数 n に対し, $f^{(n)}(0)$ の値を求め, さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(島根大 2013) (m20135802)

0.317 以下に現れる関数はすべて \mathbb{R}^2 上で C^1 級とする. 写像

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

と二変数関数 $g(u, v)$ の合成を $F = g \circ f$ と定める. このとき,

$$F(x, y) = (g \circ f)(x, y) = x$$

ならば, 以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大 2014) (m20145806)

0.318 関数 $f(x) = \arcsin x$ ($-1, x < 1, -\pi/2 < y < \pi/2$) に関する次の問いに答えよ.

(1) 逆関数の微分法を用いて $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を証明せよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) $f^{(n)}(x)$ を $f(x)$ の第 n 次導関数とする. ただし $f^{(0)}(x) = f(x)$ である. このとき, 0 以上の整数 n に対し,

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (1+2n)xf^{(n+1)}(x) - n^2f^{(n)}(x) = 0$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) $f(x) = \arcsin x$ のマクローリン展開を 5 次の項まで求めよ.

(島根大 2015) (m20155806)

0.319 $g(x)$ は $0 < \alpha \leq x \leq \beta$ で連続であり,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, \alpha \leq x + y \leq \beta\}$$

とする. このとき,

$$\iint_D g(x+y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} xg(x) dx$$

となることを証明せよ.

(島根大 2019) (m20195808)

0.320 ある直交座標系 (x, y, z) における 3 次元の 2 つの実ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) 内積 (\mathbf{a}, \mathbf{b}) を成分で表し, ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} が直交するための必要十分条件を示せ.
- (2) 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を成分で表せ.
- (3) 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は, ベクトル \mathbf{a} ともベクトル \mathbf{b} とも直交することを証明せよ.

(首都大 2008) (m20085902)

0.321 (1) 関数 $z = e^x \sin xy$ について, 偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 関数 $z = f(ax + by)$ について, $b \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial y}$ であることを証明せよ. (a, b は定数)

(3) 関数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ について,

$$(\Delta u =) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

であることを示せ. ここで, Δ はラプラシアンである.

(東京都立大 2021) (m20215903)

0.322 n は 2 以上の自然数とする. 数学的帰納法によって, 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

(宇都宮大 2007) (m20076106)

0.323 n を自然数とするとき, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を証明せよ.

(宇都宮大 2007) (m20076112)

0.324 下の問いに答えよ. なお, 計算過程も記入せよ.

- (1) 半径 1 の円の内接正 12 角形の周長を求めよ.
- (2) 半径 1 の円の外接正 12 角形の周長を求めよ.
- (3) 上記の結果を用いて, 円周率 π が 3.05 より大きく 3.25 より小さいことを証明せよ.

(宇都宮大 2022) (m20226103)

0.325 $\log x$ は自然対数を表すものとして, 下の問いに答えよ.

問1 C を積分定数とするとき、積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C \quad (A \neq 0)$$

を証明せよ。

問2 問1の公式を用いて関数 $y = y(x)$ に関する1階の微分方程式

$$y' = \sqrt{1 + y^2}$$

の一般解を求め、さらに $x = 0$ のとき $y = 0$ となるもの(特殊解)を求めよ。なお、計算過程も記入せよ。

問3 問2の特殊解を積分して

$$f(x) = \int_0^x y dx$$

を求めよ。なお、計算過程も記入せよ。

(宇都宮大 2022) (m20226104)

0.326 半径 r の円に内接する長方形のうち、面積最大のものは正方形であることを証明し、そのときの面積を求めよ。

(工学院大 2003) (m20036202)

0.327 (1) 行列 $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ の固有値が実数となることを証明せよ。

(2) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求め、 $AA^{-1} = E$ となることを証明せよ。ただし、 E は単位行列である。

(工学院大 2004) (m20046205)

0.328 $a < 1$ のとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} n(1-a)a^n = \frac{a}{1-a}$ となることを証明せよ。

(工学院大 2005) (m20056203)

0.329 複素関数について、次の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $w = z + \frac{1}{z}$ に対して $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $w = u + iv$ とおくとき、 u, v を r, θ で表しなさい。

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であるとき、 $\operatorname{Re} f(z)$ が定数ならば $f(z)$ も定数であることを証明しなさい。

(3) 積分路 $C: |z| = 2$ の向きは反時計回りとして、次の積分値を求めなさい。

$$\int_C \frac{2z+1}{z(z-3)} dz$$

(和歌山大 2014) (m20146508)

0.330 整数 $m, n \geq 0$ に対する次の再帰関数について、あとの問いに答えなさい。解答は途中の式も省略せずに書きなさい。

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & , m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & , m \geq 1 \text{ かつ } n = 0 \text{ のとき} \\ 2 & , m \geq 1 \text{ かつ } n = 1 \text{ のとき} \\ A(m-1, A(m, n-1)) & , m \geq 1 \text{ かつ } n \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) $A(1, 2)$ を答えなさい。

- (2) 整数 $m \geq 1$ について, $A(m, 1)$ を答えなさい.
- (3) 整数 $m \geq 1$ について, $A(1, n) = 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい.
- (4) 整数 $m \geq 1$ について, $A(m, 2)$ を答えなさい.

(岩手県立大 2010) (m20107001)

0.331 条件 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ.
- (2) 一般項 a_n を推測して, その結果を数学的帰納法によって証明せよ.
- (3) 正の整数 n に対して, 不等式 $a_n < a_{n+1} < 1$ が成り立つことを証明せよ.

(富山県立大 2017) (m20177102)