[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：収束

0.1 次の級数の収束，発散を調べ，収束する場合はその値を求めなさい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{3^{n-1}}+3\left(-\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3(n+2)}$

(北海道大 2018)　(m20180104)

0.2 $a_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

(東北大 2009)　(m20090506)

0.3 $\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元ベクトルよりなる実ベクトル空間,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $v\in\mathbb{R}^3$ に対し，$\left(\dfrac{1}{2}A\right)^n v\ (n=1,2,3,\cdots)$ が $n\longrightarrow\infty$ で収束するとき，その極限を

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}A\right)^n v=\begin{pmatrix}x_\infty\\y_\infty\\z_\infty\end{pmatrix}$$

とあらわす．この極限が存在し 0 でないとき， 成分の比 $x_\infty : y_\infty : z_\infty$ を求めよ.

(東北大 2011)　(m20110503)

0.4 無限級数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$$

が収束するかどうか判定せよ.

(東北大 2011)　(m20110506)

0.5 $a_n\geq 0\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$ も収束することを示せ．また，逆が成り立たないことを示す例を一つあげよ（証明不要）.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束し，$a_n\neq 1\ \ (n=1,2,3,\cdots)$ であるとする．このとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1-a_n}$ は収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ も収束することを示せ.

(東北大 2015)　(m20150508)

0.6 (1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．ただし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする.

$$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-a_n+S_n\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(2) 次の数列が収束するとき，実数 x の範囲と数列の極限を求めよ．

$$\frac{(2x-1)^n}{3^n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) ロピタルの定理を用いて，以下の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

(東北大 2016)　　(m20160503)

0.7 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して，$a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ が成り立つことを示せ．

(3) (2) において，「 $a_{n(k)} < \dfrac{1}{n(k)}$ 」を「 $\left|a_{n(k)}\right| < \dfrac{1}{n(k)}$ 」と置き換えても主張は成り立つか，もし成り立つならばそれを証明し，成り立たない場合は反例をあげよ．

(東北大 2016)　　(m20160508)

0.8 (1) 0 以上の整数 n に対して，

$$\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

を示せ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することを示し，その極限を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170508)

0.9 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 任意の n に対し $a_n \geq 0$ であるとする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$$

も発散することを示せ．

(東北大 2018)　　(m20180509)

0.10 (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は収束しないことを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ は収束することを示せ．

(東北大 2019)　　(m20190508)

0.11 $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, \infty)$ 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in I)$$

と定める．I 上の関数の列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$(*)\quad f_0(x) = 0,\quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \{f(x)\}^2 - \{f_n(x)\}^2 \quad (x \in I,\ n = 0, 1, 2, \cdots)$

と帰納的に定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の I における最大値を求めよ．

(2) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 任意の非負整数 n と任意の $x \in I$ に対して

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x)\{1 - f(x)\}^n$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は f に I 上で一様収束することを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210509)

0.12 n を非負整数 α を負の実数とし，広義積分

$$I(n,\ \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha} (\log x)^n \, dx$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > -1$ ならばこの広義積分は収束し，$\alpha \leq -1$ ならば発散することを示せ．

(2) $\alpha > -1$ のとき，この広義積分の値を求めよ．

(東北大 2022)　　(m20220511)

0.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は $p > 1$ ならば収束し，$p \leq 1$ ならば発散することを証明せよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970604)

0.14 (1) 次の級数の収束・発散を言え．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$　　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$

(2) 次の関数のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりの Taylor 級数展開）とその収束半径 ρ を例に従ってかけ．

(例）$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots (\rho = 0)$

(i) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(ii) e^x　　(iii) $\sin x$

（お茶の水女子大 1999）　　(m19990607)

0.15 次の関数のマクローリン展開（原点のまわりのテーラー展開）とその収束半径を書け．ただし，$\log$ は自然対数であり，$\ln$ とも書く．

(1) $\log(1-x)$　　(2) $\log\dfrac{1+x}{1-x}$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030605)

0.16 指数関数 $f(x) = e^x$ を考える．

(1) 任意の自然数 n と任意の実数 x に対して，

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt$$

となることを示せ．

(2) $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} dt \quad (|x| < +\infty)$

と表すとき，$R_n(x)$ は実数の任意の有界閉区間 $[a, b]$ 上で一様に 0 に収束することを示せ．

(お茶の水女子大 2003) (m20030606)

0.17 $t > 0$ に対して,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$$

とする. このとき以下の各問に答えよ.

(1) 右辺の広義積分は収束することを示せ.

(2) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ であることを示せ.

(3) 自然数 n について $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2012) (m20120605)

0.18 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ. また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130602)

0.19 $f(x)$ を微分可能関数とし $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x) = \beta$ とする. このとき任意の実数 h に対して

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+h) - f(x))$$

が収束することを示し，その極限の値を β と h を用いて表せ.

(お茶の水女子大 2013) (m20130603)

0.20 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める.

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ. また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ.

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する. 適当な多項式 P_m, Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m} \left(P_m(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$, $Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ. また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ.

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018)　　(m20180601)

0.21 N を自然数とする．このとき，次の各問に答えよ;

(1) $y \geq 0$ に対して，次が成り立つことを示せ．

$$e^y \geq \frac{y^N}{N!}$$

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}(1+x)^N dx$ の収束・発散を調べよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)^N dt \quad (n=1,2,\cdots)$ で定める．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210604)

0.22 (1) (i) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ は収束していることを示せ．

(ii) 0 より大きい実数 x に対し，$f(x) = \displaystyle\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^3+1}}$ とおく．
$0 < x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(iii) (ii) での $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ と記すと，その微分に関して
$g'(x)^2 = g(x)^3 + 1$ が成り立つことを示せ．

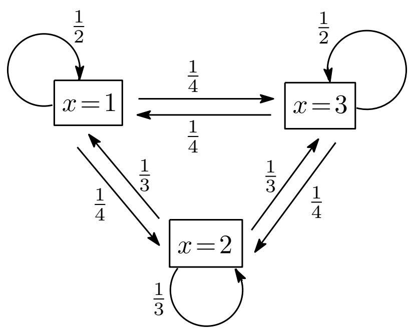
(2) 関数 $h(x)$ はすべての実数 x で $h(x) > 0$ をみたす連続関数とし，
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x)$ もみたすと仮定する．

(i) $a > 0$ に対し，X_a は $h(x) \geq a$ をみたす実数 x の集合とする．
このとき，X_a は有界集合であることを示せ．

(ii) $h(x)$ は実数上の関数として最大値をもつことを示せ．
（閉区間上の連続関数に対する最大値の定理を用いてよい.）

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220603)

0.23 変数 x は 1，2，3 のいずれかの値をとり, その値は単位時間ごとに図に示す確率に従って変化する．
このとき以下の問いに答えよ．



(1) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, その後 $2 \to 3$ と変化して
時刻 3 で再び $x=1$ となる確率を求めよ．

(2) 時刻 0 で $x=1$ であったとき, 時刻 3 で再び $x=1$ である
確率を求めよ．

(3) 十分長い時間がたった後では, x が 1，2，3 をとる確率は,
それぞれ，初期状態によらない値に収束する. これらの確率を求めよ．

(東京大 2005)　　(m20050703)

0.24 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1 , λ_2 とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ をそれぞれ求めよ．ただし，絶対値が大きい方の固有値を λ_1 とする．

(2) xy 平面上の 3 点 $P(p_1,\, p_2)$, $Q(q_1,\, q_2)$, $R(r_1,\, r_2)$ を頂点とする三角形 PQR の面積 S の導出過程を示し，各頂点の座標 p_1 , p_2 , q_1 , q_2 , r_1 , r_2 により表せ．また，各頂点の位置ベクトルが $\boldsymbol{A}$ により一次変換された際，その三角形の面積は何倍になるかを求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ をとり，$\boldsymbol{a}$ に $\boldsymbol{A}$ を n 回かけたベクトルを $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ とする．その成分 α_n , β_n および $\boldsymbol{A}^n$ を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(4) 極限値 $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ が一定の値に収束することを示し，その値を求めよ．

(東京大 2009)　　(m20090704)

0.25 (1) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, n_3 個 $(n_1 + n_2 + n_3 = N)$ の組に分ける組み合わせの総数が以下の式で表されることを示せ．

$$\frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

(2) N 個の同じボールを n_1 個, n_2 個, $\cdots$, n_m 個 $\left(\sum_{i=1}^{m} n_i = N\right)$ の組に分ける組み合わせの総数 W はいくつになるか. 導出過程とともに示せ.

(3) (2) で得られた W を用いて, $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e W$ を計算することを考える.

(a) $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e N = 0$ となることを示せ.

(b) $N \to \infty \left(N = \sum_{i=1}^{m} n_i\right)$ としたとき, $\dfrac{n_i}{N}$ はそれぞれある値 p_i に収束する. すなわち $p_i = \lim_{N\to\infty} \dfrac{n_i}{N}$ $(i = 1, 2, \cdots m)$. このとき, $\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \log_e W$ を p_i のみで表せ.
ただし以下に示す $k!$ (k は正の整数) に関する不等式を用いてよい.

$$\sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/(12k+1)} < k! < \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k+1/12k}$$

(東京大 2010)　　(m20100705)

0.26 以下の問いに答えよ．i は虚数単位とする．また, z は複素数とする．

(1) $\sin z = 10$ を z について解け．

(2) i^i, 3^i それぞれについて実部と虚部を求めよ．

(3) ある周回経路 C に沿った複素平面上の周回積分

$$\oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$$

を考える．経路 C の取り方によって積分値がどのように変化するか考えたい．極の配置を図示し，経路の例を 1 つずつ示しながらとりうる積分値を全て列挙せよ．

(4) z に関する関数

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

の収束域 $1 < |z| < 2$, および $2 < |z|$ に対するローラン級数を求めよ．

(5) 実積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx$$

を，留数の定理を用いて求めたい．適切な複素平面での積分路を定めて図示し，積分値を求めよ．

(東京大 2016)　　(m20160704)

0.27　以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1)　次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y > 0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x \left[-2\sin^2(t)\right] dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2)　次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0) = 1$ および $y'(0) = 2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to +0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.28　(1)　次の関数をマクローリン展開し，ゼロでない最初の 3 項を示せ．　　$\tan^{-1} x$

(2)　次の級数の収束域を求めよ．　　$\dfrac{2}{1 \cdot 3} + \dfrac{3x}{2 \cdot 4} + \dfrac{4x^2}{3 \cdot 5} + \cdots\cdots$

(東京工業大 2002)　　(m20020802)

0.29　実変数 t の関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}$$

を満たしている．

(1)　$t \to -\infty$ のとき，$x(t)$ は有限の値に収束することを示せ．

(2)　$t \to +\infty$ のとき，$x(t)$ が $+\infty$ にも $-\infty$ にも発散しないならば，$x(t)$ は定数関数であることを示せ．

(東京工業大 2009)　　(m20090804)

0.30　複素数 z の複素数値関数 $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ について次の問いに答えよ．

(1)　$f(z)$ のマクローリン展開とその収束半径を求めよ．

(2)　$f(z)$ の $\{z : 0 < |z - i| < 2\}$ におけるローラン展開を求めよ．

(3)　i を中心とし，半径 1 の円を正の向きに一周する曲線 C に沿っての $f(z)$ の積分を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001006)

0.31　$f(x) = \log(a^2 + x^2)$ のマクローリン展開の一般項を求め，収束半径を計算せよ．ただし，$a > 0$ とする．

（筑波大 2001）　　(m20011304)

0.32　数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ は

$$f_0 = 0\,,\ f_1 = 1\,,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

という漸化式によって生成される．k が十分大きな値になると，$\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか．

(筑波大 2003)　　(m20031310)

0.33　$f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1)　任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2)　実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s}\sum_{i=1}^{n} f(i)\,, \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^\alpha$（$\alpha > 0$　は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005)　　(m20051309)

0.34　指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい.

(1)　自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$　$(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2)　有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3)　上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい.

(4)　$f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい.

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.35 x の関数 $f(x)=e^{-x^2}$ に関して以下の問題に答えなさい.

(1) f を 1 回微分した導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) f を n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x)$ と表すとき，ある n 次の多項式 $\phi_n(x)$ によって，$f^{(n)}(x)=\phi_n(x)e^{-x^2}$ と表せることを証明しなさい.

(3) n を任意に固定する．このとき $\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x)$ は収束するか．それとも発散するか．理由を付して答えなさい.

(筑波大 2011)　　(m20111306)

0.36 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するような実数 α の値の範囲を求めよ.

(筑波大 2012)　　(m20121326)

0.37 実数列 $\{x_n\}$ が実数 a に収束するとは，標準的な論理式で書くと

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}\ \bigl(\varepsilon>0\Rightarrow\exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ (n\geqq\ n_0\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon)\bigr)\qquad(*)$$

が成り立つということである．次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が実数 a で連続であることを，$(*)$ にならって理論式で書け.

(2) (1) の内容の否定を理論式で書け．ただし，その時に否定記号 $\neg$ やそれを暗黙に含む $\neq$ などの記号を使ってはならない.

(3) (2) の内容から，ある正の実数 ε が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $|x_n-a|<1/n$ かつ $|f(x_n)-f(a)|\geqq\varepsilon$ となるような実数列 $\{x_n\}$ が作れることを示せ.

(4) (3) の実数列 $\{x_n\}$ は a に収束することを示せ．また，実数列 $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束することを示せ.

(5) これまでの議論（特に (3) と (4)）をもとに，実数列 $\{x_n\}$ は a に収束するとき実数列 $f(x_n)$ が必ず $f(a)$ に収束するなら，f は連続であることを証明せよ.

(筑波大 2015)　　(m20151305)

0.38 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)～(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい.

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.39 (1) 数列

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\quad(n=1,2,\cdots)$$

が単調減少であることを示せ.

(2) 上の数列が，$C \geq \dfrac{1}{2}$ を満たすある定数 C に収束することを示せ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \right) dx$$

の値を上の定数 C を用いて表せ．ただし，$[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表す．

(筑波大 2017)　　(m20171317)

0.40 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.41 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx} f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n = 0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x) = 0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x) = 0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x) \neq 0$ かつ $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left| \frac{d}{dx} \varphi(x) \right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ によって方程式 $x = \varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.42 $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている．

(1) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する 」の定義を述べよ．

(2) 「 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する 」の定義を述べよ．

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ．

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする．すべての $n = 1, 2, \cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば，$f(x)$ も連続関数であることを示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181321)

0.43 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a, b $(a < b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.44 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leqq x \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq x^2\right\}$ とし，α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．

(1) 変数変換 $x = s,\ y = s^2 t$ を用いて，広義積分　$\displaystyle\iint_D \frac{x^{\alpha}}{x^4 + y^2} dxdy$　を計算せよ．

(2) 広義積分　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4 + y^2} \log(1 + x^{\alpha}) dxdy$　が収束することを示せ．

(筑波大 2020)　　(m20201316)

0.45 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, $\cdots$, $f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して，$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して，写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.46 (1) 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}\, dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続であり，$f(x) > 0$ $(x \in [0, 1])$ とする．このとき，以下の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\, dx$$

(筑波大 2021)　　(m20211304)

0.47 実数 θ に対して $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}x^n$ とおく.

(1) 右辺の級数は $|x|<1$ で収束することを示せ.

(2) $f'(x)=\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ を示せ. $\left[\text{ヒント}:\sin t=\dfrac{1}{2i}\left(e^{it}-e^{-it}\right)\right]$

(埼玉大 2002) (m20021401)

0.48 次の数列 $\{a_n\}$ は, ある有限の値に収束することを示せ.

$$a_1=\sqrt{2}\,,\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$$

(埼玉大 2005) (m20051401)

0.49 $\alpha>0$ とする. $x\geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は,

$$x\in[n,n+1)\text{ において }\quad f_\alpha(x)=\frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする. ただし, n は自然数とする. このとき

$$\int_1^{N+1}f_\alpha(x)dx=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha>1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha\leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011) (m20111410)

0.50 (1) $x=x_0$ 付近で連続な関数 $f(x)$ に対し, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$ が成り立つ関数 $\delta(x)$ がある. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}3\delta(x)e^{-ixy}dx$ の値を求めよ. ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする.

(2) 関数 $f(x),g(x)$ があり, それぞれ $F(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixy}dx$, $G(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-ixy}dx$ とするとき, 次式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(z-x)dx\right)e^{-iyz}dz$ が収束するとして, これを, $F(y)$ および $G(y)$ を用いて表せ. ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$ とする.

(埼玉大 2014) (m20141403)

0.51 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$ $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$ $(n=1,2,\cdots)$ で定義する. 次の各問に答えよ.

(1) ${a_n}^2<2$ $(n=1,2,\cdots)$ を示せ. (2) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ.

(3) 数列 $\{{a_n}^2\}$ は収束することを示せ. また, その極限値を求めよ.

(茨城大 2006) (m20061705)

0.52 関数列 $f_n(x)=xe^{-nx}$ $n=1,2,3,\cdots$ が区間 $[0,\infty)$ 上で一様収束するかどうか判定せよ.

(信州大 2018) (m20181907)

0.53 広義積分 $I = \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2 + \sin x} dx$ の収束・発散を調べよ.

(信州大 2021)　　(m20211902)

0.54 (1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ は収束することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ は $a \in [0, 1)$ のとき収束することを示せ.

(新潟大 1998)　　(m19982004)

0.55 次の級数が収束するときはその和を求めよ．発散するときはその理由を述べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

(新潟大 2006)　　(m20062001)

0.56 次の各問いに答えよ.

(1) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ を示せ.

(2) $0 < a < 1$ を満たす任意の実数 a に対して， 次の級数の収束・発散を調べよ．収束するときはその和も求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$$

(3) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$$

(4) 次の関数の極限値を求めよ.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

(新潟大 2012)　　(m20122014)

0.57 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．ただし，求めた無限級数の収束性については議論しなくてよい.

(金沢大 2011)　　(m20112209)

0.58 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-2r & r & r \\ r & 1-2r & r \\ r & r & 1-2r \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．ただし $r > 0$ とする.

(1) 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

を因数分解した形で求めよ.

(2) A の固有値，および対応する固有空間を求めよ.

(3) $\boldsymbol{R}^3$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n \ (n \geqq 1)$$

により定める．$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が収束するための r の条件，およびそのときの $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の極限を求めよ．

(金沢大 2012)　　(m20122205)

0.59　$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ．

(2) $N \geqq 3$ に対して，

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．ただし必要ならば，$e < 3$ であることは証明なしで用いてよい．

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ．

(金沢大 2012)　　(m20122206)

0.60　任意の x, y, z について

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + y + 4z \\ -4x + 3y + 2z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

となる $3\times\ 3$ 行列 A を考える．次の問いに答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1，λ_2，λ_3 $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ と，それぞれに対応する長さ 1 の固有ベクトル p_1, p_2, p_3 を求めよ．

(3) B を A の逆行列，n を自然数とするとき，B^n の固有値を $\mu_1^{(n)}$，$\mu_2^{(n)}$，$\mu_3^{(n)}$ $(\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)})$ とおく．数列 $a_n = \dfrac{\mu_1^{(n)}\mu_3^{(n)}}{\mu_2^{(n)}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．収束する場合はその値を求めよ．

(金沢大 2015)　　(m20152201)

0.61　次の広義積分の収束・発散を判定せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 3x}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$

(金沢大 2015)　　(m20152206)

0.62　λ を実数，$t > 0$ とする．このとき，閉領域

$$D_t = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x \geqq\ 0,\ x^2 + y^2 \leqq\ t^2\right\}$$

上の重積分

$$I(t) = \iint_{D_t} (1 + x^2 + y^2)^{\lambda} dxdy$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) $I(t)$ を具体的に t の式で表せ.

(2) $t \to \infty$ としたとき, $I(t)$ の収束・発散を調べ, 収束する場合はその極限値を求めよ.

(金沢大 2016)　　(m20162205)

0.63 関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ をそれぞれ関係式

$$\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)} = 1\ , \qquad \varphi_0(0) = 1\ ,$$
$$\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} = \varphi_{n-1}'(x)\ , \qquad \varphi_n(0) = e^{\varphi_{n-1}(0)}\ , \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $\varphi_0(x) = e^x$, $\varphi_n(x) = e^{\varphi_{n-1}(x)}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ.

(2) $\ell = e^\ell$ を満たす実数 ℓ は存在しないことを示せ.

(3) 関数列 $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ において, どんな実数 c に対しても数列 $\{\varphi_n(c)\}$ は収束しないことを示せ

(金沢大 2016)　　(m20162207)

0.64 (1) $\dfrac{x}{1+x} \leqq \log(1+x) \leqq x \quad (x > -1)$ を示せ.

(2) 実数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$ を求めよ.

(3) 実数列 $\{b_n\}$ は有界数列とする. もし $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{b_n}{n}\right)^n$ が収束するならば, $\{b_n\}$ も収束することを示せ.

(金沢大 2017)　　(m20172203)

0.65 $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ を収束する単調増加数列とし, その極限値を p とする. 自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して, $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - p_k|$$

と定めるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$, $f_3(x)$ の最小値を与える x を求めよ.

(2) $f_{2n+1}(x)$ の最小値を与える点を q_n とするとき, $\lim_{n\to\infty} q_n$ を求めよ.

(金沢大 2018)　　(m20182204)

0.66 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において, 部分列 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ がともに α に収束するならば $\{a_n\}$ も α に収束することを示せ.

(富山大 2004)　　(m20042315)

0.67 収束する数列 $\{a_n\}$ は有界であることを証明せよ.

(富山大 2009)　　(m20092308)

0.68 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとき, 数列 $\left\{\dfrac{a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}\right\}$ も a に収束することを示せ.

(富山大 2010)　　(m20102308)

0.69 $-1 < a < 1$ のとき, 次の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx}$ $(x \in R)$ は R 上一様に絶対収束することを示せ. ただし, i は虚数単位を表す.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos nx \ (x \in R)$ の和を求めよ.

(富山大 2011)　　(m20112303)

0.70 次の級数の収束に関する主張は正しいか; 正しければ証明を与え，正しくなければ反例をあげよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が絶対収束する $\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する.

(富山大 2012)　　(m20122309)

0.71 区間 $I = [1, \infty)$ における関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\cdots}$ について，次の問いに答えよ．ただし，

$$f_n(x) = \frac{n}{2 + nx}$$

とする.

(1) 区間 I における極限関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求めよ.

(2) 上の (1) における収束は一様収束であるかどうか調べよ.

(富山大 2013)　　(m20132309)

0.72 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．また，$x_0 \in \mathbb{R}$ とする．このとき，次の (a)，(b) は同値であることを示せ.

(a) $f(x)$ は $x = x_0$ で連続である.

(b) x_0 に収束する任意の実数列 $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$ である.

(富山大 2015)　　(m20152302)

0.73 a を実数の定数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 x^a \log x dx$ が収束する a の値の範囲を求めよ.

(2) (1) の広義積分が収束するとき，その値を求めよ.

(富山大 2016)　　(m20162301)

0.74 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ を有界な実数列とするとき，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

ならば，$\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

ただし，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ数列 $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限，下極限を表す.

(富山大 2016)　　(m20162303)

0.75 $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．$a_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})$ とし，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が実数 α に収束するとする.

このとき，全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \alpha$ となることを示せ.

(富山大 2016)　　(m20162304)

0.76 以下に示されるような関数 $y(x)$ に関する常微分方程式が与えられている．

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} + 2y = 4$$

ここで，α は実数であるとし，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha = 5,\ y(0) = 0,\ \dfrac{dy(0)}{dx} = -2$ とするとき，微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ．

(2) $x \to \infty$ とするとき，$\alpha > 0$ という条件下では $y(x)$ がある有限の定数 y_p に収束することが知られている（すなわち $\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = y_p$）．そのときの y_p の値を求めよ．

(3) (2) の条件の下で $y(x)$ が収束するとき，$y(x)$ が振動しながら収束するための α の条件を求めよ．

(福井大 2008)　　(m20082410)

0.77 次に示す微分方程式について以下の問いに答えよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} + 5y = f(x)$$

(1) $f(x) = 5$ として，以下の問いに答えよ．

(a) この微分方程式の特解 y_s を求めよ．

(b) この微分方程式の余関数（斉次方程式の一般解）が $C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$（ただし $\alpha,\ \beta$ は異なる実数）の形となり，$x \to \infty$ で 0 に収束するための a の条件を求めよ．

(2) $a = 1,\ f(x) = 10\sin x,\ y(0) = -1,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0$ として，この微分方程式を解け．

(福井大 2011)　　(m20112410)

0.78 連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - y - 6 \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 5x - 2y + 1 \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．ただし，この微分方程式の解 $x(t),\ y(t)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする．ただし，$a \neq \dfrac{5}{2}$ とする．

(1) 任意の t に対して $\boldsymbol{r}(t)$ が不変となるような解 $\boldsymbol{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ を，a を用いて表せ．

(2) 今，$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とするとき，$X(t)$ および $Y(t)$ に関する連立微分方程式を導け．

(3) (2) で求めた連立微分方程式を満たす解 $\boldsymbol{d}(t)$ が，任意の初期値に対して $t \to +\infty$ で $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する条件を a を用いて表せ．

(4) $a = -4$，初期値ベクトル $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたときの解 $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ．

(福井大 2016)　　(m20162410)

0.79 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 微分方程式

$$(E_1)\quad y' - yx = 0$$

の一般解を求めよ．

(2) 微分方程式

$$(E_2) \quad y' - yx\cos(x^2) = 0$$

の一般解を求めよ．

(3) e を自然対数の底として，$\alpha,\ \beta$ を実数とする．微分方程式

$$(E_3) \quad y' - \alpha y = e^{\beta x}$$

の一般解を求めよ．

(4) γ を実数とする．微分方程式

$$(E_4) \quad y' - yx(\gamma + \cos(x^2)) = 0$$

の解 $y(x)$ で初期条件 $y(0) = 1$ を満たすものを求めよ．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ の収束・発散を判定せよ．

(岐阜大 2022)　　(m20222602)

0.80 次の各問いに答えよ．

(1) 次の無限数列の一般項を示し，収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

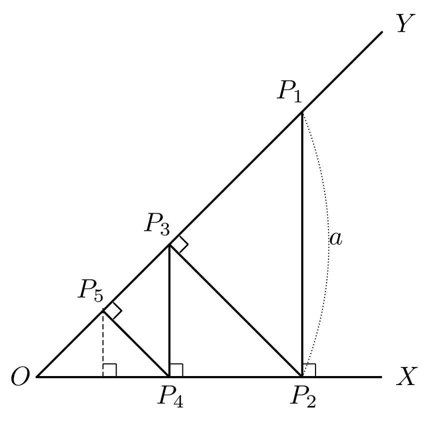
(a) $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{7}{7}$, $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{11}{13}$, $\cdots\cdots$

(b) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, $\sqrt{4} - \sqrt{2}$, $\sqrt{6} - \sqrt{3}$, $\cdots\cdots$

(2) 図において，$\angle XOY = \pi/4$, P_1P_2 の長さを a とする．OY 線上の点 P_1 から，OX 線上に垂線を下ろした点を P_2 とする．さらに点 P_2 から OY 線上に垂線を下ろし，その点を P_3 とする．同様に順次 , P_4 , P_5 , $\cdots\cdots$ を無限にとるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(a) 垂線（線分）の和を級数で示せ．

(b) 垂線（線分）の和を求めよ．



(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ を求めよ．

(豊橋技科大 1999)　　(m19992704)

0.81 次の漸化式で定義される数列を考える．

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である．

(名古屋大 2014)　　(m20142804)

0.82 (1) $f(x) = \log(1+x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(2) $\log(1+x)$ を x のべき級数（マクローリン級数）に展開した式を書き，その収束半径を求めよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972901)

0.83 次の 2×2 の行列 A について以下の問に答えよ．本問題において，ベクトルは２次元の縦ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を意味する．

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値とそれぞれの固有値に対する一つの固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて行列 E と B を適当に定め，行列 A を

$$A = EBE^{-1}$$

の形で表せ．ここで，E^{-1} は E の逆行列で B は $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような形である．

(3) (2) で定めた E と B を用いて，A^n はどのように表すことができるか．ここで，A^n は n 個の A を掛け合わせたものである．

（ヒント）まず，$A = EBE^{-1}$ の表現を用いて A^2 がどのようになるかを調べよ．

(4) ベクトル全体の集合を V と書く．V の任意の二つの要素 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，に対して，

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とする．ベクトルの列 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ が一つのベクトル $\mathbf{x}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0$$

を満たすとき，この列は $\mathbf{x}$ に収束すると言う．

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ を一つのベクトルとし，行列 A を用いて，

$\mathbf{a}, A\mathbf{a}, A^2\mathbf{a}, A^3\mathbf{a}, \cdots$ なる列をつくったとき，この列が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束ことを示せ．(3) で求めた A^n の表現を用いよ．

(名古屋工業大 1997)　(m19972904)

0.84 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{\alpha}{a_n})$　$(n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　(m20012901)

0.85 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ を $x-3$ のべき級数に展開し，そのべき級数の収束範囲を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$V = \int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy$$

(名古屋工業大 2009)　(m20092905)

0.86 $\log(1+x)$ のマクローリン級数展開を利用して $\log(3+3x-6x^2)$ のマクローリン級数展開を求めよ.（収束する範囲は求めなくてよい.）

(名古屋工業大 2015)　　(m20152901)

0.87 (1) 次の不定積分を求めよ.　$\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x}$

(2) 次の広義積分が収束するかどうか判定せよ.　$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5+1}}$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202902)

0.88 関数 $\log x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ．収束に関しては調べなくてよい.

(名古屋工業大 2023)　　(m20232901)

0.89 (1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の第 n 次導関数を求めなさい．ただし，n は正の整数とする.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

(3) (2) の結果を用いて，$g(x)=\log(1+x)$ のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063111)

0.90 次の関数のマクローリン級数とその収束半径を求めなさい.

$$f(x)=\log(1+x)$$

(三重大 2012)　　(m20123104)

0.91 次の各数列は収束しますか，収束する場合はその極限値を求めなさい.

(1) $1+(-1)^n$　　(2) $\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2+n}$

(奈良女子大 2001)　　(m20013207)

0.92 次の各数列は収束するか，収束する場合はその極限値を求めよ.

(1) $\dfrac{2n^2-n}{n^2+1}$　　(2) $\dfrac{(-1)^n}{n}$　　(3) $(-1)^n\dfrac{n-1}{n}$　　(4) $\dfrac{2^n}{n!}$

(奈良女子大 2002)　　(m20023205)

0.93 次の各数列は収束するか．収束する場合はその極限値を求めよ．収束しない場合はそのことを証明せよ.

(1) $\dfrac{2n^3+n+2}{n^3-n^2+n+1}$,　　(2) $\dfrac{\sin n}{n}$,　　(3) $\dfrac{(-1)^n n+1}{n}$

(奈良女子大 2003)　　(m20033204)

0.94 次の各数列は収束するか. 収束する場合はその極限値を求めよ.

(1) $(-1)^n$　　(2) $\dfrac{n}{n+1}$　　(3) $\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(奈良女子大 2005)　　(m20053202)

0.95 以下の級数の収束，発散を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

(奈良女子大 2014)　　(m20143206)

0.96 (1) 自然数 $n=1,2,\ldots$ に対して $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ は収束して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \leqq 2$ を満たすことを示せ．

(京都工芸繊維大 2001)　　(m20013404)

0.97 (1) 積分 $\displaystyle\int_0^T \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}dx \quad \left(0 \leqq T < \frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2) a を正の実数とする．広義積分 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{(1-\sin x)^a}dx$ が収束するような a の範囲．および a がその範囲にあるときの，この広義積分を求めよ．

(京都工芸繊維大 2019)　　(m20193402)

0.98 s を実数, v を実数を成分とする 3 次元ベクトルとして,

$$A_s = E - sv\,{}^t v$$

と定義する. E は単位行列, ${}^t v$ は v の転置ベクトルを表す. ただし, v は零ベクトルではないとする. 以下の問に答えよ.

(1) A_s が直交行列となる s をすべて求めよ.

(2) 必要があれば, A_s が対称行列であることを用いて, A_s の固有値をすべて求めよ.

(3) 実数を成分とする 3 次元列ベクトル x_0 に対して

$$x_{i+1} = A_s x_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

と定める. このとき, すべてのベクトル x_0 に対して, x_i が収束するための s の範囲を求めよ. また, その時の極限 x_∞ を x_0 と v を用いて表せ. ただし, x_i が x_∞ に収束するとは, x_i の各成分が x_∞ の各成分に収束することである.

(大阪大 2004)　　(m20043506)

0.99 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ について，次の問に答えよ．

(1) 無限級数の第 N 部分和 $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{3^n}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた第 N 部分和を用いて，S_N が収束するかどうか判定せよ．収束する場合は，収束値を求めよ．

必要があれば，$(1+a)^N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N} {}_N C_j a^j \geq 1 + Na + \frac{N(N-1)}{2}a^2$ の関係を用いよ．但し，N は自然数，a は正の実数であるとする．

(大阪大 2006)　　(m20063502)

0.100 (1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ) ：

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい.

(2) 広義積分 $\displaystyle I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dx\,dy\,dz$

について，$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のときの値 $I\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めなさい.

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい.

(4) 広義積分 $J(\alpha,\ \beta) = \displaystyle\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha \mid \log(x^2+y^2+z^2) \mid^\beta} dx\,dy\,dz$
が収束するような $\alpha,\ \beta$ の満たすべき条件を求めなさい．
ただし，$B = \left\{(x,y,z) \ :\ x^2+y^2+z^2 < \dfrac{1}{4}\right\}$.

(大阪大 2007)　　(m20073506)

0.101 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0.5 \\ 1 & a+0.5 \end{pmatrix}$ について，以下の設問に答えよ．ただし，a は実数とする．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解をもつために，a が満たすべき条件を示せ．

(2) x_1, x_2, b_1, b_2 を実数とする．$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が存在するために，a, b_1, b_2 が満たすべき条件をすべて述べよ．また，それぞれの場合の解あるいは解集合を求めよ．

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(4) A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(5) 任意の 2 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための a の範囲を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はベクトル $A^n\boldsymbol{x}$ の各成分が 0 に収束することをいう．

(大阪大 2008)　　(m20083502)

0.102 連立微分方程式
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y + a(x^3+xy^2) \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x + a(x^2y+y^3) \end{cases}$$
の解で，初期時刻 $t=0$ において $(0,0)$ でないものを考える．ただし a は定数とする．このような $(x(t),\ y(t))$ について以下が成り立つことを示せ．

(1) $a=0$ のとき，t の周期関数である．

(2) $a>0$ のとき，$t>0$ では有限時刻を越えて延長できない．

(3) $a<0$ のとき，すべての $t>0$ に対して存在し，$t\to\infty$ で $(0,0)$ に収束する．

(大阪大 2008)　　(m20083504)

0.103 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．
$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n\to\infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n\to\infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083510)

0.104 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\, dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.105 n が整数全体を動くとして, 級数が絶対収束する数列 $\{\alpha_n\}$ と $\{\beta_n\}$ を考える.
すなわち $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_n|$ が収束するとする. これらの数列を用いて関数 $f,\ g$ を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{2\pi inx}$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{2\pi inx}$$

とフーリエ展開する.

(1) $p(x) = f(x)g(x)$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 c_n を求めよ.

(2) $q(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x-s)g(s)\, ds$ を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{2\pi inx}$ の形にフーリエ展開したときのフーリエ係数 d_n を求めよ.

(大阪大 2010)　　(m20103510)

0.106 $g(x)$ を周期 2π の連続関数とする．以下を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) \sin mx\, dx = 0$

(2) 有限三角級数

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\ . \quad n = 1, 2, \cdots$$

に対して

$$\lim_{m\to-\infty} \int_0^{2\pi} g(x) p_n(mx) dx = a_0 \int_0^{2\pi} g(x) dx$$

(3) 上の $p_n(x)$ が $n \to +\infty$ で $p(x)$ に $[0, 2\pi]$ 上一様収束するとき

$$\lim_{m \to -\infty} \int_0^{2\pi} g(x)p(mx)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x)dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x)dx$$

(大阪大 2011)　　(m20113510)

0.107 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset \mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

$$\text{条件 1 ：}\quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big| f_k(x) \Big| < \infty, \qquad x \in I$$

$$\text{条件 2 ：}\quad \max_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = |x| \quad (x \in [-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi, \pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.108 複素数 $z = x + iy$ について以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1 + \left(\dfrac{1+i}{1-i} \right)^{99}$ の絶対値と偏角を求めよ．

(2) 曲線 C を放物線 $y = x^2 - 1$ の $z = -1$ から $z = 1$ に向かう曲線とする．このとき，複素関数 $f(z) = \overline{z} + z^2$ を C 上で積分せよ（$\overline{z}$ は z の共役複素数）．

(3) 複素数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(3-z)}$ において，中心が $z = 0$ のべき級数展開を求めよ．ただし，$|z| < 3$ とし，この範囲で収束するものをすべて求めること．なお，以下の幾何級数を用いてもよい．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,, \qquad |z| < 1$$

(大阪大 2018)　　(m20183503)

0.109 $a_1 = 2\,,\ \ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n} \right)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ について，次の各問に答えよ．

(1) $a_n \geq a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ．

(神戸大 1997)　　(m19973804)

0.110 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数からなる数列で，不等式

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成立するものとする．この時，以下の問いに答えよ．

(1) 全ての自然数 n について $a_n \leq \dfrac{a_1}{n^2}$ となることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを示せ.

(神戸大 2011)　　(m20113803)

0.111 以下の問に答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散することを示せ.

(2) m 桁の自然数のうちで，0 の文字が入らないものの個数を答えよ．例えば $m = 3$ のときなら，$111, 112, 113, \cdots, 119, 121, \cdots, 999$ の個数で，9^3 である.

(3) (1) の和から n に 0 の文字が入った項，例えば，$\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{20}, \cdots, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{101}, \cdots$ などを抜いた級数を $\boldsymbol{S}$ とする．すなわち，

$$\boldsymbol{S} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots$$

このとき，$\boldsymbol{S}$ は収束することを示せ.

(神戸大 2012)　　(m20123806)

0.112 z は $|z| = 1,\ z \neq 1$ を満たす複素数とする．このとき，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \qquad (*)$$

が（ある複素数に）収束することを示したい．以下の問いに答えよ．非負整数 n に対し $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k$ とおく.

(1) 非負整数 n に対し $|S_n| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$ であることを示せ.

(2) $m > n$ であるような正の整数 m, n に対し次が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n}^{m-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{S_m}{m} - \frac{S_{n-1}}{n}$$

(3) (1),(2) を用いて，以下の条件 (C) が成り立つことを示せ.

任意の正の実数 ε に対し，正の整数 N が存在して，
$m > n \geq N$ であるような任意の整数 m, n に対して
$\left| \displaystyle\sum_{k=n}^{m-1} \frac{z^k}{k} \right| < \varepsilon$ が成り立つ.　　(C)

（コーシーの収束条件定理によれば，条件 (C) は級数 $(*)$ の収束と同値であるため，(3) より級数 $(*)$ の収束が証明できることになる.）

(神戸大 2014)　　(m20143810)

0.113 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する．$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ.

(1) 関数 $f_0,\ f_1,\ f_2$ のグラフの概形を書け.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{$*$}$$

は収束することを示せ.

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ.

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.114 $(-1, 1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく.

(1) a_n を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1 - x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい.

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ.

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.115 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\, dx$ を求めよ.

(2) 自然数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\, dx$ を求めよ.

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\, dx$ は収束することを証明せよ.

(岡山大 2011)　　(m20114002)

0.116 関数 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ を，閉区間 $[a, b]$ 上で微分可能であり，それらの導関数は $[a, b]$ 上で連続とし，

(i) すべての n について　$f_n(a) = f(a)$,

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n'(x) - f'(x)|\, dx = 0$,

を満たすものとする．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $f(a)$ と $f'(x)$ を使って表せ.

(2) $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束することを示せ.

(3) $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束することを示せ.

(岡山大 2012)　　(m20124001)

0.117 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$$

により定める．以下の問いに答えよ.

(1) $f(1)$ の値を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ.

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

(岡山大 2013)　　(m20134002)

0.118　ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$ について以下の問いに答えよ．

(1)　収束半径 r を求めよ．

(2)　$|x|<r$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$$

とする．第 2 次導関数 $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(3)　$f(x)=(1-x)\log(1-x)+x-\dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(岡山大 2014)　　(m20144001)

0.119　(1)　不等式 $0\leqq\ t-\log(1+t)\leqq\dfrac{t^2}{2}\quad(t\geqq\ 0)$ が成り立つことを示せ．

(2)　級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

は $K=1$ のときに発散し，$k=2$ のとき収束することを示せ．

(3)　全ての $x>0$ に対して，級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

は発散することを示せ．

(4)　全ての $x\geqq\ 0$ に対して，級数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}^2$$

は収束することを示せ．

(岡山大 2015)　　(m20154002)

0.120　関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & (x\neq 0\ \text{のとき}) \\ 1 & (x=0\ \text{のとき})\end{cases}$　で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　e^x のマクローリン展開を書け．

(2)　$a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ を　$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$　により定める．$a_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ の値を求めよ．

(3)　$f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表す．$f^{(99)}(0)$ を求めよ．

(4)　広義積分　$\displaystyle\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$　が収束するか発散するかを判定せよ．

(岡山大 2016)　　(m20164002)

0.121　(1)　関数 $g(x)=\sqrt{1+x}$ のマクローリン展開は

$$g(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}n}\begin{pmatrix}2n-2\\ n-1\end{pmatrix}x^n$$

であることを示せ．ただし，$\begin{pmatrix}n\\ k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．また，右辺の無限級数の収束半径は 1 であることを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

で定めるとき，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} x^n$$

であることを示せ.

(3) 上の問い (2) の $f(x)$ のマクローリン展開について，その収束半径を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174001)

0.122 (1) 自然数 n に対して，$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ $\quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad \text{および} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

の値を求めよ.

(2) $\lambda > 0$ とする．自然数 n に対して，$g_n(x) = n^{\lambda}xe^{-nx^2}$ $\quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とするとき，関数列 $\{g_n(x)\}$ はある連続関数に収束することを示せ．また,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

が成り立つための λ の条件を求めよ.

(岡山大 2017)　　(m20174002)

0.123 (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}dt$ を示せ.

(2) 正の実数 x に対し，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ が収束することを示せ.

(3) 正の実数 x に対し $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ とおく．r を正の整数とするとき

$\displaystyle f(r) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r}$ を示せ.

(広島大 2003)　　(m20034105)

0.124 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005)　　(m20054105)

0.125 a, b は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\, dx$,　$\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\, dx$ を求めよ．

(2) 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \qquad (*)$$

の一般解を求めよ．

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ．

(広島大 2006)　　(m20064105)

0.126 以下の問いに答えよ.

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ.

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ.

(広島大 2012)　　(m20124102)

0.127 以下の問いに答えよ.

(1) 次の広義重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log \sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\, dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > e^2\}$$

(2) 関数

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log \sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2} + \left(\log \sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x, y) dxdy$ が収束することを示せ．ただし．積分領域 E を次で定める.

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

(広島大 2012)　　(m20124106)

0.128 一般項 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ.

(1) $n = 1, 2, \cdots$ および $k = 0, \cdots, n$ に対し，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする．このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対し，$a_n < a_{n+1}$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(広島大 2014)　　(m20144108)

0.129 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} {a_i}^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする．以下の問いに答えよ.

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ.

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ.

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ.

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の交角 θ を求めよ．ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである.

(広島大 2014)　　(m20144109)

0.130 実数 ℓ に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を次で定める.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^{\ell}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

(1) f が原点 $(0, 0)$ において連続であるための ℓ の条件を求めよ.

(2) f が原点 $(0, 0)$ で x について偏微分可能であるための ℓ の条件を求めよ.

(3) $\ell = 1$ のとき，極限

$$J = \lim_{R \to \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy$$

を考える．変数変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，J は

$$J = \lim_{R \to \infty} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{\sin\left(r^4 \varphi(\theta)\right)}{r} dr \right) d\theta$$

となることを示せ．ここで，$\varphi(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta$ である.

(4) $\ell = 1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ.
その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ は収束し，その値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い.

(広島大 2014)　　(m20144110)

0.131 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5} \leq a_n \leq 1$ を示せ.

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束することを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154104)

0.132 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい．

(1) α_n を行列 M_n の $(1,1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，
$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ．

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ．

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し，

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ．

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ．

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.133 (1) $x,\ y,\ z,\ w$ を正の実数とする．次の不等式を示せ．

$$\sqrt[4]{xyzw} \leqq \frac{x+y+z+w}{4}$$

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 $a,\ b$ に対し，二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad b_1 = b,$$
$$a_{n+1} = \sqrt[4]{a_n b_n^3} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

により定める．このとき，次の不等式を示せ．

$$a_n \leqq b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$ は単調非減少数列であることを示せ．また，(2) の数列 $\{b_n\}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(4) (2) の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はともに収束することを示せ．さらに，数列 $\{a_n\}$ の極限値と数列 $\{b_n\}$ の極限値は等しいことを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214101)

0.134 a を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，任意の正整数 k に対し，

$$\lim_{t \to \infty} t^k e^{-t} = 0$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) 任意の非負整数 n に対し，ある正の実数 C が存在して，$x \geqq 1$ において

$$x^n e^{-ax^2} \leqq C x^{-2}$$

が成立することを示せ．さらに，任意の非負整数 n に対し，広義積分

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

が収束することを示せ．

(2) 非負整数 n に対し,

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2} dx$$

とおく. $I_1(a)$ および $I_3(a)$ を a を用いて表せ.

(3) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする. 非負整数 m に対し, $I_{2m+1}(a)$ を a と m を用いて表せ.

(4) $I_n(a)$ を (2) で定めた値とする. $I_4(a)$ を a を用いて表せ. ただし,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明なしに用いてもよい.

(広島大 2021) (m20214103)

0.135 非負整数 n に対し,

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

と定める. ただし, $0! = 1$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) x を実数とする. 級数

$$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

は $4|x| < 1$ のとき絶対収束し, $4|x| > 1$ のとき発散することを示せ.

(2) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$$

と定める. このとき,

$$(1-4x)f'(x) = 2f(x)$$

が成り立つことを示せ. ここで, $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す.

(3) $4|x| < 1$ 満たす実数 x に対し,

$$\sqrt{1-4x}\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = 1$$

が成り立つことを示せ.

(4) 級数

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$$

は ∞ に発散することを示せ.

(広島大 2021) (m20214105)

0.136 (1) 次の定積分が収束するかどうかを判定し, 収束する場合はその値を求めよ.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\ \alpha \text{は正の定数とする})$$

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x + y \geq 2\}$ とするとき, 重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$ の値を求めよ.

(広島市立大 2005) (m20054201)

0.137 無限積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ の収束発散を調べ, 収束する場合はその値を求めよ.

(広島市立大 2012) (m20124201)

0.138 一般項が $a_n \geqq 0$ の級数（正項級数）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して, 次を示せ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ は収束する.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ が収束するとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しないことがある. その具体的な例を示せ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束, 発散に関係なく $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2a_n}$ は収束する.

（徳島大 2004）　　(m20044401)

0.139 実数 x の関数 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ について，次の各問いに答えなさい.

(1) 等式 $S_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ が成り立つことを示しなさい.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

(3) $S_n(x)$ の導関数 $S_n'(x)$ を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n'(x)$ が収束する x の範囲を求めなさい.

（高知大 2001）　　(m20014503)

0.140 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する.

① $a_1 = 1$

② n が素数のときは $a_n = n$

③ $n \geq 2$ が素数でないときは $a_n = \dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 初項から第 10 項までを求めよ.

(2) $\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ.

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ.

(高知大 2010)　　(m20104501)

0.141 べき級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ を考える．次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ の項別微分を求めよ.

(2) $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ は収束することを示せ.

(3) $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ で収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} f(x)dx$ の値を求めよ.

(高知大 2011)　　(m20114502)

0.142 $f(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で連続な正値関数で,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を,

$$f_n(x) = \begin{cases} nf(nx) & \left(x \in \left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right) \text{のとき}\right) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ.

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big| < \varepsilon$ を満たせば，$n > N$ を満たす任意の整数 n に対して,

$$-\varepsilon \leqq \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \leqq \varepsilon$$

であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく.

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより,
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ.

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.143 (1) 次の曲線の長さを求めよ.

$$y = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 \quad (1 \leqq\ x \leqq\ e)$$

(2) $a > 0$ のとき，次の広義積分が収束するための a の条件を求め，そのときの積分の値を求めよ.

$$\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^a}\, dx$$

(愛媛大 2009)　　(m20094602)

0.144 次の不定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sin^2 x)\tan x}dx$　　(b) $\displaystyle\int x^9 e^{-x^{10}}dx$

0.145 次の広義積分が収束するように定数 a を定め，そのときの広義積分の値を求めよ.

$$\int_{1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right) dx$$

(愛媛大 2021)　　(m20214602)

0.146 行列 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & 0 \\ a & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ について以下の各問いに答えよ．ただし，a は正の実数であるとする.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列の列 $A,\ A^2,\ A^3, \ldots$ が零行列でない定数行列 C に収束したとする．このとき，次の問いに答えよ.

(a) a の値を求めよ.

(b) 最大固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(c) 行列 C を求めよ.

(九州大 2001)　　(m20014705)

0.147 (1) $n = 0, 1, 2$ に対して，次の不定積分を求めよ． $\displaystyle\int \frac{x^n}{x^2+1}dx$

(2) n を負でない整数とするとき，次の広義積分は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ．収束する場合は広義積分の値を求め，発散する場合はその理由を示せ.

$$\int_1^{\infty} \frac{x^n}{x^2+1}dx$$

(九州大 2007)　　(m20074711)

0.148 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$，　$a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$，　$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$，

$g(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ とおく．ただし，n を自然数とする.

(1) フーリエ係数 a_n，b_n を計算せよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|)$ は発散することを示せ.

(3) フーリエ級数 $g(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で収束することを示せ.

(4) $x = \pm\pi$ で $f(x)$ と $g(x)$ がどのような関係にあるか述べよ.

(九州大 2009)　　(m20094703)

0.149 $a = 4,\ 0,\ -4$ のそれぞれの場合に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分をを求めよ.

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx$$

(2) 次の広義積分について, 収束する場合には広義積分の値を求め, 発散する場合にはその理由を示せ.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{|x^2+a|}\,dx$$

(九州大 2010)　　(m20104710)

0.150 次の各問いに答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^3}}$ を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-2|}}$ は収束するか発散するか，いずれであるかを判定せよ.

(九州大 2011)　　(m20114701)

0.151 a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する.

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.152　以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ は実数全体を表すとする．

(1) 次の広義積分は収束することを示せ．

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}\, dx$$

(2) $D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x,\ 0 \leq y \leq 1 \right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_1 = \iint_{D_1} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(3) $D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \right\}$ として，次の広義積分の収束・発散を調べよ．

$$I_2 = \iint_{D_2} e^{-x^2 y}\, dxdy$$

(九州大 2021)　　(m20214710)

0.153　次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x > 0,\ x \to 0} x \log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x > 0,\ x \to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 f, g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x \log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f, g の各々について，$[0, 1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.154　$a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられる数列が収束することを,「上に有界な単調増加列は収束する」という定理を用いて示し，その極限値を求めよ．

(九州芸術工科大 2001)　　(m20014804)

0.155　広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ が収束することを示せ．

(佐賀大 2003)　　(m20034911)

0.156 初項 a, 公比 r の無限等比級数は, $|r| < 1$ のとき収束し, その収束値は $\dfrac{a}{1-r}$ で求められる. これを利用して循環小数 $0.2\dot{3}\dot{9}$ を分数で表せ.

(佐賀大 2010) (m20104918)

0.157 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，log は自然対数である．

(1) この広義積分が収束することを示せ．

(2) $I = -\dfrac{\pi}{2}\log 2$ であることを示せ．

(佐賀大 2017) (m20174918)

0.158 (1) $N \times M$ の行列 A と $P \times Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N \times N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1-2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n \to \infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 1$ である．

(長崎大 2009) (m20095010)

0.159 次の級数について, 収束・発散を調べよ. 収束する場合, その値を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

(鹿児島大 2005) (m20055412)

0.160 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$ をマクローリン展開せよ．ただし，収束域は考慮しなくて良い．

(香川大 2017) (m20175701)

0.161 (1) $\log(1+2x)$ をマクローリン展開せよ．ただし，剰余項および収束域は求めなくてよい．

(2) 次の極限を求めよ． $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log(1+2x)}$

(香川大 2019) (m20195701)

0.162 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を収束数列とする．いま，$n > N$ なるすべての自然数に対して $\alpha_n \leq \beta_n$ が成り立つような十分大きな自然数 N が存在する時， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n \leq \lim_{n\to\infty}\beta_n$ であることを証明せよ。

(島根大 2006) (m20065807)

0.163 (1) 関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の不定積分を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n}\frac{\log x}{x}dx$ は正の無限大に発散することを示せ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ が収束するならば，その極限値を求めよ．もし発散するならば，その理由を述べよ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたす数列 a_n に対して　$b_n = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$　とおくとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ は正しいだろうか？ 正しければその理由を述べよ．もし正しくなければ反例を一つ与えよ．

(島根大 2007)　　(m20075805)

0.164 (1) 次の関数の第 3 次導関数を求めよ．　$x^2 \sin x$

(2) 次の級数が収束することを示せ．　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(3) 次の積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx$

(島根大 2008)　　(m20085802)

0.165 次の問いに答えよ．

(1) $0 < r_1 < r_2$ とし，$D_1 = \left\{(x, y) : {r_1}^2 \leqq\ x^2 + y^2 \leqq\ {r_2}^2\right\}$ と定める．このとき，積分 $\displaystyle\iint_{D_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ の値を求めよ．

(2) $0 < r$ とし，$D_2 = \left\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leqq\ r^2\right\}$ と定める．このとき，広義積分 $\displaystyle\iint_{D_2} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy$ が収束する α の範囲を求めよ．

(島根大 2014)　　(m20145805)

0.166 次の広義積分が収束するような実数 s の値の範囲を求めよ．

$$\iint_{x^2+y^2\geqq 1} (x^2+y^2)^s\ dxdy$$

(和歌山大 2022)　　(m20226505)