[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：写像

0.1 一次関数 $f = \dfrac{z-i}{z+2}$ による，z 平面上の単位円 $|z| = 1$ の f 平面への写像を求めよ．
ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(北海道大 2016)　(m20160104)

0.2 $f\ :\ R^2 \to R^3$ を線形写像とする．$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

$f(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるとする．

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ．

(北見工業大 2010)　(m20100204)

0.3 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルに持つ原点を通る $\mathbb{R}^3$ 内の平面を π とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，平面 π に関して対称なベクトルを対応させる写像を f とすると，f は線形写像になっている．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ を用いて表せ（内積を用いよ）．

(2) $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 3×3 行列を A とするとき，行列 A を求めよ．

(3) A の固有値と，それぞれの固有値に対応する固有空間を求めよ．

(秋田大 2019)　(m20190404)

0.4 行列　$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　で　$f(v) = Bv$　と定義される線形写像（1 次写像）$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について，像 $\operatorname{Im} f$ と核 $\operatorname{Ker} f$ の次元を求めよ．

(東北大 2007)　(m20070502)

0.5 変数 x に関する n 次以下の実数係数多項式の全体を $P_n[x]$ とおくと，$P_n[x]$ は $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ を基底とする実ベクトル空間である．このとき，次に答えよ．

(1) $W = \{p(x) \in P_4[x]\ :\ p(0) = p(1) = 0\}$ の基底を求めよ．

(2) $D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ によって定義される関数 $D\ :\ P_3[x] \to P_2[x]$ が線形写像であることを示せ．

(3) (2) の関数 D が全射であるか否かについて述べよ．

(4) (2) の関数 D が単射であるか否かについて述べよ．

(東北大 2009)　(m20090504)

0.6 $\boldsymbol{R}$ は実数全体のなす集合を表す．$\boldsymbol{R}^N$ は N 次元実ベクトル全体のなす集合を表す．

$\boldsymbol{R}^4$ の 3 つのベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定め，これらを列にもつ行列

$$A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立であることを示せ．

(2) A によって定まる線形写像の像を $\mathrm{Im}(A)$ とする．つまり

$\mathrm{Im}(A) = \left\{ A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta, \gamma \in \boldsymbol{R} \right\}$ である．$\boldsymbol{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}(A)$ の元であるとき，p を q, r, s で表せ．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ の内積を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = xx' + yy' + zz' + ww'$$

とする．

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0$ をみたし，4 次行列 $\tilde{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x})$ の行列式が 1 であるとき $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120505)

0.7 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\} \in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\} + \{b_n\} \in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\} \in V$ を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad s\{a_n\} = \{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5，a_6 を a_1，a_2，a_3，a_4 を用いて書き表せ．

(3) $i = 1, 2, 3, 4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\} = \{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$e_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & (n = i \text{ のとき}), \\ 0 & (n = 1, 2, 3, 4,\ n \neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$，$\{e_n^{(2)}\}$，$\{e_n^{(3)}\}$，$\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $T : W \to W$ を,

$$T(\{a_n\}) = \{b_n\} \qquad \text{ただし} \qquad b_n = a_{n+1} \ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.8 n を 1 以上の整数とし，V を n 次元実ベクトル空間とする．S と T を V から V への線形写像とし，I を V から V への恒等写像とする．$S \circ T = I$ が成り立つと仮定する．以下の問いに答えよ．

(1) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の基底とするとき，$\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ も V の基底であることを示せ．

(2) T は全射であることを示せ．

(3) $T \circ S = I$ が成り立つことを示せ．

(東北大 2021)　　(m20210507)

0.9 3 次以下の実数係数多項式全体のなす集合

$$V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \;\middle|\; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

を考え，V の元を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数と考える．V の二つの元 f, g と実数 s に対して，和 $f + g \in V$ とスカラー倍 $sf \in V$ を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (sf)(x) = s(f(x))$$

で定めると，V は $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．V から 4 次元実列ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ への線形写像 $\phi : V \to \mathbb{R}^4$ を

$$\phi(f) = \begin{pmatrix} f(-1) \\ f'(-1) \\ f(1) \\ f'(1) \end{pmatrix}$$

で定める．ただし f' は f の導関数である．以下の問いに答えよ．

(1) V と $\mathbb{R}^4$ の基底に関する ϕ の表現行列を求めよ．ただし V の基底は $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$，$\mathbb{R}^4$ の基底は $\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ とし，

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(2) 3 次以下の実数係数多項式 f で,

$$f(-1) = 3, \qquad f'(-1) = 2, \qquad f(1) = -1, \qquad f'(1) = 2$$

を満たすものが存在するかどうか答えよ．存在する場合はそのような多項式をすべて求め，存在しない場合はそれを証明せよ．

(東北大 2022)　　(m20220509)

0.10 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す．$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \mid x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970611)

0.11 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって表される線型写像 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ を考える．

(1) 空間 $\mathbf{R}^3$ の中の平面 $x - 3y - 2z = 0$ をパラメーターを使って表せ．

(2) (1) の平面はこの線型写像で何に写されるか．

(3) この線型写像で $\mathbf{R}^2$ 内の直線 $2x + 5y = 0$ に写ってくるもとの空間 $\mathbf{R}^3$ の図形（すなわち原像）を求めよ．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000615)

0.12 平面の単位正方形 $\{(x, y) | \ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ を，４点 $(0,0), (1,2), (0,4), (-1,2)$ を頂点とする菱形に写すような線型写像（ 2×2 型行列）を決定せよ．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010608)

0.13 (1) 線形写像の定義を書きなさい．

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 $(\mathrm{Ker}f)$ と像 $(\mathrm{Im}f)$ を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}$，　(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3 \\ 2y + z - 4 \end{pmatrix}$

（注）ただし, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im}F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また，$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070603)

0.14 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f は,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{に}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{に}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{に},$$

それぞれ写すとする.

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の線形写像 f による像を求めなさい.

(2) 線形写像 f で $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ に写される $\mathbb{R}^3$ の元を求めなさい.

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090605)

0.15 次の行列 A で表される線形写像 f を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 ($\mathrm{Ker}\, f$) の基底と次元を答えなさい.

(2) f の像 ($\mathrm{Im}\, f$) の基底と次元を答えなさい.

（注）ここで, 線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは, $\mathrm{Ker}\, F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ のことで, 像とは $\mathrm{Im}\, F = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである. また, $\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す.

(お茶の水女子大 2010)　　(m20100611)

0.16 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$f : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を満たすとき, 以下の各問に答えよ.

(1) f の表現行列 A を求めよ.

(2) A の固有値およびそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110608)

0.17 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し, 線形写像ならば f を表す行列と, f の核 (Ker f) と像 ($\mathrm{Im}\, f$) を求め, それぞれの次元を調べなさい.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+z \\ -3x+2z \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120607)

0.18 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. S の階数（ランク）$\mathrm{rank} S$ の定義を述べよ.

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ.

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする． このとき，

$$\mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.19 以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え，存在するならば，この条件を満たした像（像空間）の次元が最大，最小となる線形写像の例をそれぞれあげ，それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(2) 次の行列 A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.20 以下ではすべての自然数 n に対して $\mathbb{R}^n$ の元は列ベクトル（縦ベクトル）で表されるものとする．以下の問いに答えよ.

(1) a, b, c を実数とし $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ とする．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 H を

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cx = 0 \right\}$$

で定める．このとき H の次元とその基底を求めよ．

(2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を実行列とする．A の階数が 2 であるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad 1 \leq i \leq j \leq 3$$

となる自然数 i, j が存在することであることを示せ．

(3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

を階数 2 の実行列とし，線形写像 $f_A\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $f_A(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3$, で定める．このとき f_A の核の次元と基底を求めよ．

(4)

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

を実行列とし、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

とする．線形写像 $f_B\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f_B(x) = Bx,\ x \in \mathbb{R}^4$, で定める．このとき f_B の核の次元と基底を求めよ．

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160602)

0.21　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f が

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} に, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} に, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} を \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} に,$$

それぞれ写すとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f を表す行列 A を求めよ．

(2) 線形写像 f の核 (Ker f) と像 (Im f) の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170606)

0.22　次の行列 A について，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられる $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & a & b \\ -1 & 2 & c & d \end{pmatrix}$$

(1) 線形変換 f の像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間となるときの a,b,c,d の値を求めよ.

(2) a,b,c,d が (1) の値のときの $f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ の解空間の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f を a,b,c,d が (1) の値のときの $\mathbb{R}^4$ の線形変換とし, g を $\mathbb{R}^4$ の線形変換で, 像が $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分空間であるものとする. このとき, g と f との合成写像 $f\circ g$ の像空間の次元のとり得る値の範囲を答え, その範囲のそれぞれの次元となる g の例をあげよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210605)

0.23 $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2b-2c+d \\ a-b-5c-2d \end{pmatrix}$ の核 (Ker$f$) と像 (Imf) の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(お茶の水女子大 2021)　　(m20210609)

0.24 複素変数 $z=x+iy$（x,y は実数）から複素変数 $w=X+iY$（X,Y は実数）への写像 $w=f(z)$ を考える. 以下の問いに答えよ. ただし, i は虚数単位とする.

(1) $f(z)=z^2$ のとき, z 平面上の各辺の長さが 1 の正方形の領域 $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ. また, その領域の面積を求めよ.

(2) $f(z)=i\dfrac{1+z}{1-z}$ のとき, z 平面上の単位円周 $|z|=1$ と単位円の内部 $|z|<1$ がそれぞれ w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ.

(3) $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ のとき, z 平面上の領域 $1\leq|z|\leq 2$ が w 平面上のどのような領域に写像されるか図示せよ. また, その領域の面積を求めよ.

(東京大 2014)　　(m20140704)

0.25 $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする.
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X)=AX$$

と定義する. φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(東京工業大 1996)　　(m19960804)

0.26 (1) 空間 $\boldsymbol{R}^3=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\boldsymbol{R}^3\}$ 内の平面 $H=\{x+y+z=0\}$ の正規直交基底を一組求めよ.

(2) 写像 $f:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を, ベクトル $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$ に対して, (1) の平面 H への $\boldsymbol{v}$ の正射影を対応させる線形写像とする. f を与える行列 A を求めよ.

(3) A の固有値をすべて求めよ.

(東京工業大 2007)　　(m20070804)

0.27 (1) a,b を実数とする. $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y-3z \\ 3x+ay+bz \end{pmatrix}$$

は線形写像であることを示せ.

(2) f の像が 2 次元となるとき，a, b はどのような条件をみたすか答えよ．

(東京工業大 2008)　　(m20080804)

0.28 関数

$$u = x^2 - xy + y^2 \ , \qquad v = x^2 + xy + y^2$$

によって定められる (x, y) 平面から (u, v) 平面への写像 F を考える．(x, y) 平面の円の内部

$$D \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leqq \frac{1}{2}$$

の F による像 $E = F(D)$ の面積を求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941002)

0.29 次の行列 A で決まる $\mathbf{R}^4$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 核の基底を求めよ．

(2) 像の次元を求めよ．

(3) $\mathbf{R}^4$ をユークリッド内積で内積空間とするとき，核の直交補空間の基底を求めよ．

(電気通信大 1999)　　(m19991003)

0.30 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v \quad (x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<, >$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011008)

0.31 次の 3 次正方行列 A, E に対して下記の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(xE - A) = (x - \lambda_1)^2 (x - \lambda_2)$ と因数分解される．λ_1, λ_2 を求めよ．

(2) $V_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_1 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (A - \lambda_2 E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ とおく．V_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1$ と V_2 の基底 $\boldsymbol{v}_2$ とを求めよ．

(3) $(A - \lambda_1 E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_3$をひとつ求めよ．

(4) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる．線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定めるとき，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(電気通信大 2007)　　(m20071002)

0.32 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -8 & -14 & -11 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式 $\det(A)$ と階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) A^2 の行列式 $\det(A^2)$ と階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ を求めよ．

(3) $T_A(x) = Ax$ で定まる写像 $T_A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像 $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底で，次の条件を満たすものを構成せよ．
（条件）一つめのベクトルだけが T_A の核 $\mathrm{Ker}\, T_A$ に属する．
注 ： $\mathrm{Im}\, T_A = \{T_A(x) \mid x \in \boldsymbol{R}^3\}$, $\quad \mathrm{Ker}\, T_A = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \mid T_A(x) = 0\}$.

(電気通信大 2008) (m20081001)

0.33 $V = \mathbb{R}^4$ とし，$B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ を V の基底とする．$f : V \to V$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1, \quad f(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{0}$$

となる線形写像とし，$g : V \to V$ を

$$g(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad g(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad g(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1, \quad g(\boldsymbol{v}_4) = \boldsymbol{v}_4$$

となる線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元，$\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求めよ．

(2) 線形写像 $g : V \to V$ の基底 B に関する表現行列 M を求めよ．さらに，行列式 $\det M$ を求めよ．

(3) g は同型写像である．g の逆写像 g^{-1} の基底 B に関する表現行列 N を求めよ．

(電気通信大 2009) (m20091002)

0.34 $\nu = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ が 3 次元線形空間 V の基底であり，1 次変換 $f : V \to V$ が

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3,$$

を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) f の基底 ν に関する表現行列 A を求めよ．

(2) 合成写像 $g = f \circ f$ の，基底 ν に関する表現行列 B を求めよ．

(3) $\mathrm{rank}A$, $\mathrm{rank}B$ を それぞれ求めよ．

(電気通信大 2010) (m20101002)

0.35 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_2)\boldsymbol{a}_2 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{a}_3$$

で定める．ここで，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}_i)$ は $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{a}_i$ の $\mathbb{R}^4$ での標準内積を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(\boldsymbol{a}_1)$, $f(\boldsymbol{a}_2)$, $f(\boldsymbol{a}_3)$, $f(\boldsymbol{a}_4)$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ の基底 $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4$ に関する表現行列を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111002)

0.36　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次の通りとする．

$$A=\begin{bmatrix}-3&1&2\\-4&1&3\\-7&2&5\end{bmatrix},\quad V=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ 4x+y-2z=0\right\}.$$

線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を $f(x)=A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3)$ で定める．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ の次元とその基底を 1 組求めよ．

(2) V の部分空間 $V\cap\mathrm{Im}\,f$ の基底を 1 組求めよ．ただし，$\mathrm{Im}\,f$ は f の像を表す．

(3) V の基底 $\{\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\}$ で，$\boldsymbol{v}=f(\boldsymbol{u})$ を満たすものを 1 組求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121002)

0.37　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\in\mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\0&2&0&-2\\1&0&5&0\\0&1&0&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため，掲載を差し控えさせていただきます．

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g:V\to V,\qquad g(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\qquad(\boldsymbol{x}\in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ．

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.38　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\in\mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A=\begin{bmatrix}7&-7&-3&3\\4&-4&4&-4\\11&-9&13&-11\\18&-16&10&-8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\4\\5\end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\,f$ の次元 $\dim\mathrm{Im}\,f$ および f の核 $\mathrm{Ker}\,f$ の次元 $\dim\mathrm{Ker}\,f$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\,f\subset V$ を示せ．

(3) V と $\mathrm{Im}\,f$ の共通部分 $V\cap\mathrm{Im}\,f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141002)

0.39　a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ．

(2)　$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3)　$\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151001)

0.40　線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ．
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である．

(2)　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3)　A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.41　3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　f の像 $\mathrm{Im}\ f$ の次元を求めよ．

(2)　$\mathrm{Im}\ f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\ f) \cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3)　$\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.42 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ， $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$．

さらに，W を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ．

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161002)

0.43 p, q を実数とし，3 次正方行列 A，B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ に含まれるための x, y, z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ となるような p, q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(x) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f\}$ とする,．

(電気通信大 2017)　　(m20171002)

0.44 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181001)

0.45 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.46 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, 　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)\ , \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 Ker f の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの Ker f の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 Im f の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\ f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\ f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.47 a を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax\ (x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 Imf ついて，Im$f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ．

(2) a が (1) で求めた値のとき，f の核 Ker$f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker} f$ を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) a が (1) で求めた値のとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の条件を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.48 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ．

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g\ :\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ．

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221001)

0.49　3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．

基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.50　$\mathbb{R}^3$ で行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ が与えられている．次の問いに答えなさい．

(1) A の対称部分 $T_1 = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$ と，A の歪み対称部分 $T_2 = \dfrac{1}{2}(A - A^T)$ の各行列を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列を表す．

(2) 対称部分の行列 T_1 の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(3) 歪み対称部分の行列 T_2 で定められる線形写像のゼロ空間 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めなさい．

(千葉大 2007)　　(m20071207)

0.51　集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix},\quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f\ :\ P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ．

(2) f が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006)　　(m20061315)

0.52 空間（３次元のユークリッド空間）の中で，３つのベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ に写す，つまり，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とするような線形写像（行列）A を考える．

(1) A を具体的な数行列の形で表せ．

(2) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061318)

0.53 平面（２次元のユークリッド空間）の中に，直交（デカルト）座標 x, y をとり，この座標を使って $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の形でベクトルを表現することにする．

この平面の中で，直線 $\ell : y = ax$ に関して折り返すという線形写像を P としたとき，P の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．固有ベクトルは正規化（規格化）せよ．

(筑波大 2006)　　(m20061319)

0.54 線形写像　$f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$　$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + ax_2 + \ \ x_3 \\ ax_1 + \ \ x_2 + ax_3 \\ \ \ x_1 + ax_2 + ax_3 \end{bmatrix}$　$(a \in \boldsymbol{R})$

について，以下の問に答えなさい．

(1) f の標準基底に関する表現行列 F を求めよ．

(2) f が全単射（写像の表現行列が正則）となる条件を求めよ．

(3) f が全単射であるとき，逆写像 f^{-1} の標準基底に関する表現行列を求めよ．

(筑波大 2007)　　(m20071315)

0.55 線形写像 $T\ :\ R^4 \to R^4$ の行列表示を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ および T の像 $\mathrm{Im}(T)$ を求めよ．

(2) 行列 A^2 の階数 $\mathrm{rank}(A^2)$ および合成写像 $T \circ T$ の像 $\mathrm{Im}(T \circ T)$ を求めよ．

(3) 連立一次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解け．

(筑波大 2008)　　(m20081308)

0.56 線形空間 $\boldsymbol{V}$ の基底を $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$，線形空間 $\boldsymbol{W}$ の基底を $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ とする．$\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{W}$ への線形写像 F が下記の関係を満たすとき，これらの基底に関する F の表現行列 M を求めよ．また，F による $\boldsymbol{V}$ の像 $F(\boldsymbol{V})$ の次元を求めよ．なお，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルを表す．

$F(\boldsymbol{a}_1) = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2\,,\ F(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3\,,\ F(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) = F(\boldsymbol{o})\,,\ F(\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4) = -\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3$

(筑波大 2008)　　(m20081310)

0.57　集合 X から集合 Y への写像 $f\ :\ X \to Y$ による像に関して，以下を示せ.

(1) 任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

(2) f が単射（1 対 1）であるならば，任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ.

(3) X の任意の部分集合 $A, B \subset X$ に対して，$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つならば，f は単射となる.

(筑波大 2009)　　(m20091315)

0.58　実数 R を係数とする変数 x に関する高々2 次の多項式の全体を V と表わす.

即ち, $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \,|\, a_0,\, a_1,\, a_2 \in R\}$. 但し, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ は, $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ のとき, そして, そのときに限り成立すると仮定する. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\beta = \{1, x, x^2\}$ は V の一つの基底なることを示しなさい.

(2) $f(x) \in V$ に対して, f の x に関する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ を対応させる写像を D と表わす. D は V から V への線形写像であることを示しなさい.

(3) D に対して, 基底 β に関する行列表現を求めなさい. また, D の rank はいくつであるか答えなさい.

(4) V から R への線形写像全体を V^* と表す. V^* は V と同じ次元を持つ線形空間になることが知られているが, このとき, 以下の条件を満たす $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \in V^*$ は V^* の一つの基底になることを示しなさい.

$$\begin{array}{lll} \alpha_0(1) = 1\,; & \alpha_0(x) = 0\,; & \alpha_0(x^2) = 0\,; \\ \alpha_1(1) = 0\,; & \alpha_1(x) = 1\,; & \alpha_1(x^2) = 0\,; \\ \alpha_2(1) = 0\,; & \alpha_2(x) = 0\,; & \alpha_2(x^2) = 1\,; \end{array}$$

(5) $f(x) \in V$ に対して, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ を対応させる写像を I と表わす. I は線形写像であることを示しなさい.

(6) I を $\alpha_0\,,\ \alpha_1\,,\ \alpha_2$ の線形結合で表わしなさい.

(筑波大 2010)　　(m20101316)

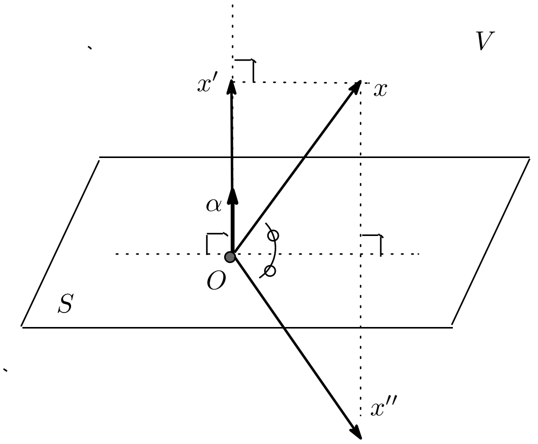
0.59　３次元空間において，下図に示す平面 S とベクトル $\boldsymbol{x}$ を考える．平面 S は原点 O を通り，その法線ベクトルは $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ である．また $\boldsymbol{x}$ は原点 O を始点とする任意のベクトルである．以下の問いに答えよ．ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と表すこと.

(1) $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}$ への正射影を $\boldsymbol{x}'$ とする，$\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ の平面 S に関する折り返しを表すベクトルを $\boldsymbol{x}''$ とする．$\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.

(3) (2) において，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}''$ を対応させる写像は線形写像である．いま，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ とおいた場合に，この線形写像を表す行列を求めよ.



(筑波大 2011)　　(m20111304)

0.60　ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対して線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_1$, $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{e}_2$ を満たすとき，未知数 y を成分に含むベクトル

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

に関して以下の設問に答えよ.

(1)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(2)　$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が線形従属のとき，$\boldsymbol{c}$ の f による像 $f(\boldsymbol{c})$ を求めよ.

(3)　$f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ ならば，f に逆写像 f^{-1} が存在し，$f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A は $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}]$ に等しいことを示せ.

(4)　$f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{e}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ を満たす行列 B を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111310)

0.61　2 次実正方行列の全体を $M(2;R)$ とする．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2;R)$ と $M(2;R)$ の 2 つの部分集合 $T = \{X \in M(2;R) \mid Tr\,X = 0\}$，$S = \{Y \in M(2;R) \mid {}^tY = Y\}$ について以下を示せ.

ただし; $Tr\,X$ は X のトレース，${}^tY$ は Y の転置行列とする.

(1)　$ad - bc \neq 0$ のとき $X \in T$ ならば $AXA^{-1} \in T$ が成り立つ.

(2)　$Y \in S$ ならば $AY\,{}^tA \in S$ が成り立つ.

(3)　写像 $\Phi : T \to S$ を $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in T$ に対して $\Phi(X) = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -z \end{pmatrix}$ で定める.
$ad - bc = 1$ のとき任意の $X \in T$ に対して

$$\Phi(AXA^{-1}) = A\,\Phi(X)\,{}^tA$$

が成り立つ.

(筑波大 2011)　　(m20111319)

0.62 X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$ ， $g : Y \to Z$ と合成写像 $g \circ f : X \to Z$ について，以下を示せ．

(1) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．

(2) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である．

(3) Y の部分集合 W に対し，W の f による逆像 $f^{-1}(W)$ を

$$f^{-1}(W) = \{x \in X \mid f(x) \in W\}$$

と定める．Y の任意の部分集合 A, B について $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成り立つ．

(筑波大 2011)　　(m20111323)

0.63 自然数から自然数への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して，集合 X_n , A_n $(n \in \mathbb{N})$ を

$$X_n = \big\{ f(k) \,\big|\, k \geq n \big\}$$

$$A_n = \big\{ k \in \mathbb{N} \,\big|\, f(k) = f(n) \big\}$$

で定める．このとき，以下を証明せよ．

(1) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$ である必要十分条件は，ある $n \in \mathbb{N}$ に対して A_n が無限集合となることである．

(2) $\big\{ n \in \mathbb{N} \,\big|\, X_n \neq X_{n+1} \big\}$ が有限集合である必要十分条件は，$\big\{ n \in \mathbb{N} \,\big|\, A_n \text{が有限集合} \big\}$ が有限集合となることである．

(筑波大 2013)　　(m20131305)

0.64 3 次元の列ベクトルからなる線形空間を V^3 とし，f を $V^3 \to V^3$ の線形写像とする．

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として以下の小問に答えよ．

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$，および $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は V^3 の基底となることを示せ．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1$，$f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{b}_2$，$f(\boldsymbol{a}_3) = \boldsymbol{b}_3$ のとき，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，$f(\boldsymbol{e}_3)$ を $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ の線形結合として表せ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(4) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は $n \geq 1$ の整数である．

(筑波大 2014)　　(m20141308)

0.65 $f : V \to V$ を実ベクトル空間 V の間の線形写像，α を f の実固有値，V_α を α に関する f の固有空間とする．V の部分空間 W_1, W_2 が次の 2 条件を満たすとする:

(a) $V = W_1 \oplus W_2$

(b) $f(W_1) \subseteq W_1$,　$f(W_2) \subseteq W_2$

このとき以下の問いに答えよ．

(1) $V_\alpha = (V_\alpha \cap W_1) \oplus (V_\alpha \cap W_2)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\dim V_\alpha = 1$ ならば, V_α は W_1 または W_2 の部分空間であることを示せ.

(筑波大 2014)　　(m20141313)

0.66 $f : X \to X$ を集合 X 上の写像とし, 写像 $f^n : X \to X$ を, $n \geq 1$ のとき $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\,個}$, $f^0 = \mathrm{id}_X$ (=X 上の恒等写像) で定義する. このとき以下の問いに答えよ.

(1) $f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ.

(2) f が単射ならば, $f\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$ が成り立つことを示せ.

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.67 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c \in \boldsymbol{R})$$

とする.

(1) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が生成するベクトル空間の基底を一組求めなさい.

(2) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ が生成するベクトル空間の次元が 3 となる a, b, c の条件を求めなさい.

(3) $A = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_4)$ を用いて, 1 次写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$f(x) = Ax \quad (x \in \boldsymbol{R}^3)$$

によって定める, f の核を求めなさい.

(筑波大 2014)　　(m20141319)

0.68 実ベクトル空間 V と線形写像 $F : V \to V$ を考える.

(1) $B = \{v_1,\ v_2\}$ が V の基底ならば $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ も基底であることを証明せよ.

(2) F の基底 B に関する表現行列 A と B' に関する表現行列 A' はどのような関係にあるか詳しく述べよ.

(3) $\dim V = 2$ とし, v_1, v_2 を F の固有値 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ に対応する固有ベクトルとする.

(a) v_1, v_2 は一次独立であることを示せ.

(b) n を自然数とし, F^n を F を n 回合成した写像とする. F^n の $B' = \{v_1 - v_2,\ v_1 + v_2\}$ に関する表現行列を求めよ.

(筑波大 2015)　　(m20151302)

0.69 高々2 次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$ とする. ただし, R は実数全体の集合であり, x は実数値をとる変数とする. また, 多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) $\{1, 1+x, x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ.

(2) 任意の f, $g \in V$ に対して $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ なる演算を定義する. この演算 (f, g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ.

① 任意の $f, g \in V$ に対して $(f, g) = (g, f)$

② 任意の $f, g, h \in V$ に対して $(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$

③ 任意の $f, g \in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$

④ 任意の $f \in V$ に対して $(f, f) \geq 0$ で，等号成立は $f(x) = 0$ のときに限る．

(3) (2) で定義した内積 (f, g) のもとで $1, x, 3x^2 - 2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2 - 2$ を正規化して V の正規直交基底を 1 組定めよ．

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から 3 次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1) = c_1,\ \varphi(1+x) = c_2,\ \varphi(x + x^2) = c_3$$

で定めるとき，$\{L_1, L_2, L_3\}$ と $\{c_1, c_2, c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1, c_2, c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする．

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.70 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする．

$$F(x, y, z, w) = (x - y + z + w,\ 2x - 2y + 3z + 4w,\ 3x - 3y + 4z + 5w)$$

すべての $(x, y, x, w) \in \mathbb{R}^4$ に対して．3 次元ベクトル $F(x, y, z, w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分区間となる．それを $\mathrm{Im}\,(F)$ と表す．また，$F(x, y, z, w) = (0, 0, 0)$ となる 4 次元ベクトル (x, y, z, w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを $\mathrm{Ker}\,(F)$ と表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Im}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\,(F)$ の次元と基底ベクトルを求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171307)

0.71 (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するならば有界であることを証明せよ．

(2) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$ が成り立つとする．このとき等式 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を証明せよ．

(3) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ は $n \longrightarrow \infty$ のとき点 $\alpha \in I$ に収束し，関数 f は点 $\alpha \in I$ で連続であるとする．このとき等式 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\alpha)$ を証明せよ．

(4) 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$ は単射であるとする．このとき f も単射であることを示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171318)

0.72 x を 2 次以下の実数係数の多項式 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ 全体が作る線形空間 $\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{W}$ について，$\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ の写像 F は，$f(x)$ を $f(x) + f'(x)$ に移す写像とする．

ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ を微分した関数（導関数）を表す．以下の設問に答えよ．

(1) F が上への 1 対 1 の線形写像であることを証明せよ．

(2) $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ が $\boldsymbol{W}$ の基底となることを証明せよ．

(3) $\boldsymbol{V}$ の基底 $\{x,\ -x^2+1,\ x^2-4x+3\}$ と $\boldsymbol{W}$ の基底 $\{x+1,\ x^2+x+1,\ 1\}$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(4) A を対角化して，行列 A^n を求めよ．(n は正の整数)

(筑波大 2018)　　(m20181307)

0.73 以下の命題の真偽を判定し，その根拠を述べよ．

(1) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ であって，$\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$ かつ全射であるものが存在する．

(2) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，U_1, U_2 を V の部分空間とする．$V = U_1 \oplus U_2$ であれば，V の任意の部分空間 W について $W = (W \cap U_1) \oplus (W \cap U_2)$ が成り立つ．

(3) V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，W を V の部分空間とする．$W \neq V$ であれば，V の部分空間 U であって，$U \supset W$ かつ $\dim U = \dim W + 1$ を満たすものが存在する．

(筑波大 2018)　　(m20181318)

0.74 下記の 2 重積分を変数変換によって求めることを考える．

$$I = \iint_D (4x^2 - y^2) e^{8xy} dxdy, \quad D = \left\{ (x, y) \;\middle|\; 0 \leq 2x + y \leq 1\ ,\ 0 \leq x - \frac{1}{2} y \leq 1 \right\}$$

(1) $u = 2x + y$, $v = x - \dfrac{1}{2} y$ と変数変換したとき， 変数の組 (u, v) の積分領域 E を示せ．

(2) E から D への写像関数のヤコビアンを求めよ

(3) I を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191311)

0.75 V は $\mathbb{R}$ 上の 3 次元ベクトル空間であるとし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は V の基底であるとする．線形写像 $f : V \to V$ について

$$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$
$$f(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$
$$f(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つとする．以下の問いに答えよ．

(1) 基底 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) f の像の次元を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201314)

0.76 (1) 以下の命題を証明せよ．

(a) V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，f は V から W への線形写像であるとする．V の有限個の元 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ について，$f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$, $\cdots$, $f(\boldsymbol{v}_k)$ が線形独立ならば，$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_k$ も線形独立である．

(b) α は 1 より大きい定数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ は収束する．

(2) 以下の命題に対する反例を与え，それが反例であることを示せ．

(a) $\mathbb{R}$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 U_1, U_2, U_3 が $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}$ を満たせば，部分空間の和 $U_1 + U_2 + U_3$ は直和である．

(b) $\mathbb{Z}$ の任意の部分集合 A, B に対して，$P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ が成り立つ．ただし，集合 X に対して，$P(X)$ は X のべき集合（X の部分集合全体の集合）を表す．

(c) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して，写像 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって合成写像 $g \circ f$ が $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像に等しいものが存在すれば，f は全単射である．

(筑波大 2020)　　(m20201317)

0.77 $a \in \mathbb{R}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ とする．$\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \langle \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める．また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，行列 A で定まる線形写像を $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする．

(1) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めよ．

(2) $\dim V = 2$ であるとき，a の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a に対して，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211301)

0.78 U, V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし，$\dim U > \dim V$ とする．また，$f\ :\ U \to V$ を線形写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f が単射であることは $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_U\}$ と同値であることを示せ．ここで，$\mathbf{0}_U$ は U のゼロベクトルである．

(3) 線形写像 $g\ :\ V \to U$ であって，合成写像 $g \circ f$ が同型写像になるものは存在しないことを示せ．

(4) 線形写像 $g\ :\ V \to U$ であって，合成写像 $f \circ g$ が同型写像になるものが存在することと，f が全射であることが同値であることを示せ．

(筑波大 2021)　　(m20211302)

0.79 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \left\{ (a_n) \;\middle|\; a_n \in \mathbb{C} \ \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$W = \left\{ (a_n) \in V \;\middle|\; a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \right\}$$

とする．また W の元 (x_n), (y_n), (z_n) をそれぞれ

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分空間になることを示せ．

(2) (x_n), (y_n), (z_n) が W の基底になることを示せ.

(3) $F\ :\ W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ.

(4) W の基底 (x_n), (y_n), (z_n) に関する F の表現行列 A を求めよ.

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(筑波大 2022) (m20221315)

0.80 X を集合とし，f, g, h を X から X への写像とする．以下の問いに答えよ.

(1) f と g が全単射ならば，合成写像 $g \circ f$ は全単射であることを示せ.

(2) $g \circ f$ が全単射ならば，f は単射かつ g は全射であることを示せ．さらに，この命題の逆が成り立たないことを示す反例を 1 つ与え，それが反例であることを示せ.

(3) $f \circ g \circ h$ と $h \circ g \circ f$ が全単射ならば，f, g, h はすべて全単射であることを示せ.

(筑波大 2022) (m20221317)

0.81 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考え，$a_i = f(e_i) \quad (1 \leq i \leq 3)$ とおく.

このとき，次の (1), (2) は互いに同値であることを示せ.

(1) ベクトル a_1, a_2, a_3 は一次独立である.

(2) f は逆写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をもつ.

（埼玉大 2001） (m20011409)

0.82 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 4y + 3z \\ x + 2y + z \end{pmatrix}$ により定義する.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1),\ T(\boldsymbol{a}_2),\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ.

(埼玉大 2006) (m20061406)

0.83 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^2$ を長さ 1 のベクトルとして，直線

$$l = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = 0\}$$

に関する折り返し写像を T とする．すなわち，$T(\boldsymbol{x})$ は直線 l に関して $\boldsymbol{x}$ と線対称の位置にあるベクトルである.

(1) $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる行列 A を求めよ.

(埼玉大 2008)　　(m20081406)

0.84 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ が定める線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\big(T(x) = Ax,\ x \in \mathbb{R}^3\big)$ を考える.

(1) 写像 T の像 $\mathrm{Im}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(2) 写像 T の核 $\mathrm{Ker}\,T$ の基底を 1 組求めよ.

(埼玉大 2011)　　(m20111408)

0.85 a, b は実数とし

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 & 3 & a+1 \\ a+3 & a+5 & 5 & a+3 \\ b & b+2 & a+1 & 7 \end{pmatrix}$$

とする. 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^4)$ により定める. このとき，f が全射でないような組 (a, b) をすべて求めよ.

(埼玉大 2013)　　(m20131409)

0.86 点 (x, y) を点 (x', y') に対応づける xy 平面上の写像は，その対応づけが行列の計算として，下式のように書けるとき，1 次変換と呼ばれる（ここで a, b, c, d は定数であり，下式は「$x' = ax + by$ かつ $y' = cx + dy$」と同値）.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2k & k \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について，以下の 2 問に答えよ.

(1) この 1 次変換 f が原点以外にも「変換の影響を受けない点」（すなわち，変換によって位置が変わらない点）をもつように k の値を定めよ.

(2) 前問 (1) の 1 次変換で「変換の影響を受けない点」の全体は，xy 平面上の直線を形成する. この直線の方程式を求めよ.

(群馬大 2006)　　(m20061503)

0.87 (u, v) 平面における正方形 $A = \{(u, v) | 0 \leqq u \leqq 1, 0 \leqq v \leqq 1\}$ が,

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \end{cases}$$

で表される写像により,(x, y) 平面上に写される図形を B とするとき,

(1) B を (x, y) 平面上に図示せよ. さらに,B の面積は A の面積の何倍であるか, 答えよ.

(2) 二重積分 $\displaystyle\iint_B x\,dxdy$ を求めよ.

(茨城大 2004)　　(m20041701)

0.88 (1) 3 つの元からなる集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合をすべてあげよ.

(2) 一般に n 個 $(n \geq 1)$ の元からなる集合 X の部分集合は総計何個あるか論ぜよ.

(3) 一般に，写像 $f : X \to Y$ について次の主張は正しいか否か判定し，その理由を述べよ．

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

(c) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ (d) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

ただし，A, B は X の部分集合とし, C, D は Y の部分集合を表す．また，X の部分集合 X'，Y の部分集合 Y' に対して，

$f(X') = \{f(x) \in Y \mid x \in X'\}$， $f^{-1}(Y') = \{x \in X \mid f(x) \in Y'\}$ である．

(茨城大 2007) (m20071708)

0.89 X, Y を 2 つの集合とし，X の任意の元 x に対して Y の元 y をただ 1 つ対応させる規則を，X から Y への写像という．集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ は，次の条件 (i) を満たすとき単射であるといい，条件 (ii) を満たすとき全射であるという．特に，条件 (i),(ii) を同時に満たすとき全単射であるという．

(i) X の元 x_1, x_2 について，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ である．

(ii) Y の任意の元 y に対し，$y = f(x)$ となる X の元 x が少なくとも 1 つ存在する．

また，X から Y への全単射が存在するとき，2 つの集合 X と Y は対等であるという．

(1) 2 つの写像 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ が全単射ならば，f は単射，g は全射であることを示せ．

(2) 写像 $f : X \to Y$ は全射でなく，$g : Y \to Z$ は単射でないが，合成写像 $g \circ f$ が全単射となる例を 1 つ挙げよ．ただし，X, Y, Z はすべて空集合ではないとする．

(3) X, Y を元の個数がそれぞれ m, n の有限集合とする．X から Y への写像全体の集合 $F(X, Y)$ の元の個数を求めよ．また，$F(X, Y)$ に属する写像のなかで単射となるものの個数を求めよ．

(4) 自然数全体の集合 N と整数全体の集合 Z は対等であることを示せ．また，N と実数全体の集合 R は対等でないことを示せ．

(茨城大 2008) (m20081703)

0.90 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0, 1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0, 1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f, g に対し, X の上で定義された関数 $f * g$，$f \Box g$ を

$$(f * g)(x) = f(x)g(x)\ , \quad (f \Box g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)\ , \quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f, g, h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f * (g \Box h) = (f * g) \Box (f * h)\ , \quad (f \Box g) \Box h = f \Box (g \Box h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A \cap B) = \Phi(A) * \Phi(B)\ , \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) \Box \Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010) (m20101707)

0.91　３次元列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1)　一次方程式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}$ を満たす $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ をすべて求めよ．

(2)　4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ から 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ への写像 T を

$$T\ :\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$$

で定める．このとき，T は $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像であることを示せ．また，T の核空間の基底を求めよ．

(3)　前問 (2) の写像 T に対し，T の像空間の基底を求めよ．

(茨城大 2011)　　(m20111701)

0.92　f を集合 A から集合 B への写像とし，B の部分集合 C に対して集合 $\{x \in A \mid f(x) \in C\}$ を $f^{-1}(C)$ で表す，$A, B, C, f^{-1}(C)$ のどれも空集合でないとする．このとき，次の (1) および (2) に答えよ．

(1)　$f\left(f^{-1}(C)\right) \subset C$ であることを示せ．

(2)　f が全射ならば，$f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ であることを示せ．

(茨城大 2012)　　(m20121703)

0.93　$\boldsymbol{x}_1 = (1, 1, -1),\ \boldsymbol{x}_2 = (2, -1, -1),\ \boldsymbol{x}_3 = (-1, 1, 0),\ \boldsymbol{y}_1 = (-4, 2, 2),\ \boldsymbol{y}_2 = (0, -1, 1),\ \boldsymbol{y}_3 = (-1, 1, 0)$ とする．また T を $T(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i\ \ (i = 1, 2, 3)$ を満たす 3 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の線形写像とする．以下の各問に答えよ．

(1)　$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2)　$T(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$ を求めよ．

(3)　$T(\boldsymbol{x})$ が零ベクトルとなる $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ をすべて求めよ．

(4)　T の固有値及び，各固有値に対応する固有空間の基底を一組求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151705)

0.94　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への写像 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \\ -\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

と定義する．f による，偶数全体の集合の像と，奇数全体の集合の像を求めて，f が全単射であることを示し，f の逆写像 $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151706)

0.95　k を実数とし，3 次の正方行列 A，3 次の列ベクトル $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & k & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

により定める．以下の各問に答えよ．

(1) $k = 1$ のとき，A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $k = 1$ のとき，f は全単射となることを示せ．

(3) f は全単射とならないための k についての条件を求めよ．また，f がこの条件を満たすとき，f の核 $\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\ ;\ f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ と f の像 $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3\}$ の基底を一組求めよ．

(茨城大 2016)　　(m20161701)

0.96 $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f, g を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して次のように定める；

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}, \quad g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - {x_2}^2 \\ 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

以下の各問に答えよ．

(1) f が線形写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ．

(2) 上で求めた行列 A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) 上で求めた行列 A の逆行列を求めよ．

(4) g は線形写像でないことを示せ．

(5) g は全単射であることを示せ．

(茨城大 2018)　　(m20181701)

0.97 X, Y が空でない集合で，f は X から Y への写像とする．Y の空でない部分集合で A, B に対し，$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成り立つことを示せ．ただし，Y の空でない部分集合 C に対し，$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$ と定める．

(茨城大 2021)　　(m20211704)

0.98 ベクトル空間 V, W とその間の線形写像を $f : V \to W$ として, 次の問に答えなさい.

(1) V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラーを k, ℓ とするとき, f が線形写像である定義式を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および k, ℓ を用いて表しなさい.

(2) V を基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を持つ 2 次元実ベクトル空間, W を基底 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を持つ 3 次元実ベクトル空間とする.

$f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2 - 2\boldsymbol{b}_3$,　$f(\boldsymbol{a}_2) = 3\boldsymbol{b}_1 - 6\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_3$ とすると,

f の像と核は原点を通る直線（1 次元実ベクトル空間）であることを示し, この直線を求めなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101802)

0.99 (1) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 1$ の解を全て求めよ．また，$z \neq 1$ の解の一つを ω として，1 以外の全ての解を ω を用いて表し，1 を含む全ての解を複素平面上に図示せよ．

(2) 複素数 z に対する二項方程式 $z^5 = 5$ の全ての解を，前問 (1) の ω を用いて表せ．

(3) 複素数 α をそれ自身に変換する写像を ε，α を $\omega\alpha$ に変換する写像を σ とするとき，合成写像 σ^2, σ^3, σ^4 によって，α はどのように変換されるか答えよ．

(4) 前問 (3) の写像 σ の合成写像 σ^{n+4} $(n=1,2,3,4,5)$ により α を変換せよ.

(山梨大 2019) (m20191803)

0.100 任意の点 $P(x,y)$ が以下の関数により点 $Q(u,v)$ に写像されるとき，以下の問いに答えよ． ただし, x,y は任意の実数とする.

$$u=\frac{2}{\pi}x$$
$$v=y\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) 点 P および点 Q を任意の実数からなる点の集合の要素として考えるとき，この写像は単射でも全射でもないことを，例を挙げて示せ.

(2) 点 P が $(0,1)\to\left(\dfrac{3\pi}{2},1\right)\to\left(\dfrac{3\pi}{2},3\right)\to(0,3)\to(0,1)$ と移動したとき，点 Q の移動軌跡をグラフに示せ.

(3) 点 Q の移動軌跡で囲まれる領域の面積は，点 P の移動軌跡で囲まれる領域の面積の何倍になるか求めよ.

(山梨大 2023) (m20231803)

0.101 成分がすべて実数である n 次正方行列 A が ${}^tA=A$ を満たすとする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}\ A\subset\mathbb{R}^n$ を次で定める.

$$\mathrm{Ker}\ A=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\mid A\boldsymbol{v}=0\}$$

また，$(\mathrm{Ker}\ A)^\perp\subset\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積についての $\mathrm{Ker}\ A$ の直交補空間とする.

(1) 任意の $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ に対して，$A\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ であることを示せ.

(2) 線形写像 $f:(\mathrm{Ker}\ A)^\perp\to(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ を，$f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ によって定める． $f(\boldsymbol{v})=0$ を満たす $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ は，$\boldsymbol{v}=0$ に限ることを示せ.

(3) f を (2) で定めた線形写像とする． ベクトル $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ が $f(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{w})$ を満たせば, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ であることを示せ.

(4) f を (2) で定めた線形写像とする．任意の $\boldsymbol{w}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ に対して，$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}$ となるような $\boldsymbol{v}\in(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ が存在することを示せ.

(信州大 2018) (m20181910)

0.102 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F:V\to V$ を線形写像とする.

(1) $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda)=\{x\in V\mid F(x)=\lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $F^2=F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ.

(信州大 2020) (m20201909)

0.103 $\langle\ \cdot,\cdot\ \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり,

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ.

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）.

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ.

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w}) \rangle$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.104 $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ から $\boldsymbol{R}^2$ 上のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ 2x+y \end{bmatrix}$ への写像は線形写像か調べよ.

(新潟大 2012)　　(m20122006)

0.105 実数を成分とする 3× 3 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して，M により与えられる連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & 8z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & bz & = & 0 \\ cx & + & 4y & + & 18z & = & 0 \end{array} \right.$$

がある．このとき，次の各問いに答えよ.

(1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2z = y + 3z = 0 \right\}$$

であるとき，a, b, c の値を求めよ.

(2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，M は正則でない．その理由を述べよ.

(3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．このとき，$f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ.

(新潟大 2012)　　(m20122017)

0.106 $\boldsymbol{R}^2$ における基底 $\chi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{R}^2$ における標準基底から，基底 χ への取りかえ行列を求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^2$ における線形写像 f の標準基底に関する表現行列を，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする．このとき，f の基底 χ に関する表現行列を求めよ.

(新潟大 2014)　　(m20142010)

0.107 $\mathbb{R}^m$ を m 次元数ベクトル空間, $\mathbb{R}^n$ を n 次元数ベクトル空間とする. f, g を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする. $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 h を

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^m)$$

により定める. このとき, 次の各問い答えよ.

(1) h は $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像となることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g)$, $\mathrm{Im}(h)$ をそれぞれ, f, g, h の像空間とする. このとき,

$$\dim(\mathrm{Im}(h)) \leqq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) A, B を実数を成分とする $n \times m$ 行列とする. このとき,

$$\mathrm{rank}(A+B) \leqq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

が成り立つことを証明せよ.

(新潟大 2022)　　(m20222005)

0.108 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し, 線形写像 $F\ :\ M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき, M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F = \{X \in M \mid F(X) = O\}\ , \quad \mathrm{Im}F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ. ただし, O は零行列を表す.

(金沢大 2007)　　(m20072216)

0.109 有界閉領域 D, E を

$$D = \left\{(x, y) \in R^2 \ \middle|\ \frac{1}{2} \leqq x^2 + y^2 \leqq x\right\}\ ,$$
$$E = \left\{(r, \theta) \in R^2 \ \middle|\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq r \leqq \cos\theta\right\}$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) D を図示せよ.

(2) 写像 $T : R^2 \to R^2$ を

$$T(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

とする. $(r, \theta) \in E$ のとき $T(r, \theta) \in D$ であることを示せ.

(3) 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$ の値を求めよ.

(金沢大 2015)　　(m20152208)

0.110 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}\, F = \{X \in M \mid F(X) = O\}. \qquad \mathrm{Im}\, F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162228)

0.111 写像 $f : R^3 \to R^3$ を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$$

によって定める.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．ただし，

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in R^3\}$$
$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

である.

(3) 写像 f は逆写像 f^{-1} を持つか．持つならばそれを求め，持たなければその理由を記せ.

(金沢大 2016) (m20162229)

0.112 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ.

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \{\boldsymbol{v} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ で定義する．V の基底を求めよ.

(金沢大 2016) (m20162236)

0.113 (1) 線形写像

$$f : \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -4 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

の像 (Im f) と核 (Ker f) の基底をそれぞれ一組求めよ.

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; z^2 \geqq x^2 + y^2 \right\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間ではないことを示せ.

(3) $\boldsymbol{R}^n (n \geq 3)$ のベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_1$ も 1 次独立であることを示せ.

(金沢大 2018) (m20182201)

0.114 k を実数とする．行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & k-7 \\ 0 & -1 & 1 & 3k \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の階数 (rank$B$) を求めよ．

(2) 次の連立一次方程式が解をもつような k の値と，その k に対する連立一次方程式の解をすべて求めよ．

$$\begin{cases} x+y+z &= k-7 \\ \quad -y+z &= 3k \\ 2x+y+3z &= 1 \end{cases}$$

(3) B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ : \ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

を考える．f の核 (Ker f) の次元と 1 組の基底，f の像 (Im f) の次元と 1 組の基底をそれぞれ求めよ．

(金沢大 2019)　　(m20192205)

0.115 行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

と，B による $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像

$$f \ : \ \boldsymbol{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

について，次の問いに答えよ．

(1) f の核 (Ker f) を求めよ．

(2) f が全射であることを示せ．

(3) E_3 を 3 次の単位行列とする．このとき，

$$BC = E_3$$

を満たす行列 C が存在する場合にはそのような C を一つ与え，存在しない場合にはその理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202202)

0.116 自然数 k に対して V_k を x の k 次以下の実係数多項式全体からなる $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする．

n を 2 以上の自然数とし，線形写像 $\varphi : V_n \to V_{n-1}$ と $\psi : V_{n-1} \to V_n$ を，それぞれ，

$$\varphi(v(x)) = v'(x) \quad (v(x) \in V_n), \qquad \psi(w(x)) = \int_0^x w(y)dy \quad (w(x) \in V_{n-1})$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ および $\mathrm{Im}(\varphi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}(\psi)$ および $\mathrm{Im}(\psi)$ の次元を求め，次元が 1 以上の場合はその基底を求めよ．

(3) 合成写像 $\psi \circ \varphi : V_n \to V_n$ と $\varphi \circ \psi : V_{n-1} \to V_{n-1}$ は同型写像かどうか答えよ．同型写像の場合には証明を与え，そうでない場合には理由を述べよ．

(金沢大 2020)　　(m20202209)

0.117 (1) $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次従属となるような実数 α の値を求めよ．

(2) β を実数とする．$\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元が 2 となるときの β の値を求めよ．また，そのときの W の 1 組の基底を求めよ．

(3) 写像

$$f : \boldsymbol{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 3x^2 - y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$$

が線形写像ではないことを示せ.

(金沢大 2021)　　(m20212207)

0.118 次の命題の真偽を判定し，命題が真の場合は証明を与え，命題が偽の場合は反例あるいはその判断理由を述べよ．

(1) V を $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間とし，m 個の元 $e_1, \cdots, e_m \in V$ は $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立とする．ベクトル $v \in V$ が $e_1, \cdots, e_m$ の $\boldsymbol{R}$ 上の 1 次結合であるとき，$v = c_1e_1 + \cdots + c_me_m$ を満たす実数の組 $(c_1, \cdots, c_m)$ はただ一通りに定まる．

(2) 2×2 行列 A, B について，$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ が成立する．

(3) $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \boldsymbol{R} \right\}$ に対し，写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ x-2y+1 \end{pmatrix}$$

で定めると，f は線形写像である．

(4) n を任意の自然数とする．正則な $n \times n$ 行列は，固有値 0 を持たない．

(金沢大 2022)　　(m20222203)

0.119 (1) 線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の次元と 1 組の基底，および f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

(2) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって生成される $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間を W とする． 線形写像 $g\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^2$ であって，$\mathrm{Ker}(g) = W$ となるものを 1 つ求めよ．

(金沢大 2022) (m20222206)

0.120 $(\ ,\ )$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の標準内積とする．2 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の間の距離 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y})^{1/2}$$

により定める． 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$d\left(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\right) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を満たすような写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換とよぶ．次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 上の 2 つの等長変換 f, g に対して，合成写像 $f \circ g$ も $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換となることを示せ．

(2) ベクトル $\mathbf{a_1} \in \boldsymbol{R}^3$ および行列 A_2, A_3 を

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とし，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 f_1, f_2, f_3 を

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}, \quad f_3(\mathbf{x}) = A_3\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^3)$$

と定める．このとき f_1, f_2, f_3 は $\boldsymbol{R}^3$ 上の等長変換であることを示せ．

(3) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ をベクトル $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にうつすような等長変換を，(2) の f_1, f_2, f_3 の合成を繰り返すことにより 1 つ与えよ．

(金沢大 2022) (m20222210)

0.121 集合 X から集合 Y への写像 $f\ :\ X \to Y$ を考える. X の部分集合 A に対して, $f^{-1}\left(f(A)\right) = A$ はつねに成り立つか.

(富山大 2003) (m20032310)

0.122 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ について, 次を示せ.

(1) $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.

(2) $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

(3) f と g が全単射ならば, $g \circ f$ は全単射である.

(富山大 2004) (m20042309)

0.123 写像 $f\ :\ R^3 \longrightarrow R^3$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおくとき, V は R^3 の部分空間になることを示せ.

(3) V の次元と 1 つの基底を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042314)

0.124 開区間 $(-1,1)$ の上で定義された写像 $f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x < 1) \end{cases}$
は $(-1,1)$ から $(-1,1)$ への全単射であることを示せ.

(富山大 2008)　　(m20082308)

0.125 U, V, W を実ベクトル空間とし，$f : U \to V$，$g : V \to W$ を線形写像とする．次の (1)，(2) を証明せよ．

(1) $g \circ f : U \to W$ は線形写像である.

(2) $\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$
ただし，$\mathrm{Im}\, f$ は f の像を，$\mathrm{Ker}\, g$ は g の核を表す.

(富山大 2009)　　(m20092309)

0.126 n 次実正方行列全体の集合 $M(n, \boldsymbol{R})$ は, 行列の通常の和とスカラー倍のもとで実ベクトル空間になる. $T_r : M(n, \boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $A = (a_{ij}) \in M(n, \boldsymbol{R})$ に対して, $T_r(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_r は線形写像であることを示せ.

(2) T_r の核 $\mathrm{Ker}(T_r) = \{A \in M(n, \boldsymbol{R}) \,|\, T_r(A) = 0\}$ は $M(n, \boldsymbol{R})$ の部分空間になることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}(T_r)$ の次元を求めよ.

(富山大 2010)　　(m20102309)

0.127 A, B を集合，$f : A \to B$，$g : B \to A$ を写像とする．合成写像 $f \circ g$ が全射，$g \circ f$ が単射であるならば．f も g も全単射であることを示せ.

(富山大 2011)　　(m20112302)

0.128 $\mathbf{R}^3$ における 3 つのベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) $\{\boldsymbol{e}_1\,,\ \boldsymbol{e}_2,,\ \boldsymbol{e}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{e}_1$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_2$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に，$\boldsymbol{e}_3$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像を行列で表せ.

(富山大 2012)　　(m20122307)

0.129 集合 $A = \big\{ z \,\big|\, z$ は複素数, $|z| = 1,\ z \neq 1 \big\}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A に属す z に対して，$z = \dfrac{c+i}{c-i}$ をみたす実数 c が存在することを示せ．ただし，i は虚数単位とする.

(2) 上の (1) で存在する c は一意的であることを示せ.

(3) A に属す z に $z = \dfrac{c+i}{c-i}$ によって一意的に定まる実数 c を対応させる写像 $f : A \to \boldsymbol{R}$ は全単射であることを示せ.

(富山大 2013)　　(m20132308)

0.130　P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする．写像 $G : P \to P$ を，

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $(a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R})$ に対し $G\left(f(x)\right) = f(x+1) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2$

で定義する．

(1)　G は線形写像であることを示せ．

(2)　P の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ．

(富山大 2014)　　(m20142308)

0.131　$\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする．すなわち，$\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2)$ $\in \mathbf{R}^2$ に対し，その距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする．f_1, f_2 : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし，f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を，$f(x_1,\ x_2) = (f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))$ $\big((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\big)$ で定義する．このとき，f が連続写像であることを示せ．

(富山大 2014)　　(m20142309)

0.132　xy 平面上に 3 点，$A(1,\ 1)$, $B(3,\ 1)$, $C(1,\ 4)$ を頂点とする三角形がある．この 3 つの頂点を線形写像 T により変換するとき，次の各問いに答えよ．ただし，線形写像 T は行列 $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で与えれれる．計算の概略も示すこと．

(1)　頂点 A, B, C の変換後の各頂点を A', B', C' とする．これら 6 点を xy 座標平面上に座標の値とともに図示せよ．

(2)　点 A', B' を通る直線をベクトル表示せよ．同様に点 A', C' を通る直線をベクトル表示せよ．

(3)　(2) の 2 直線が直交することをベクトルの内積を使って示せ．

(4)　三角形 ABC と三角形 $A'B'C'$ の面積比を求めよ．

(富山大 2015)　　(m20152308)

0.133　写像 $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ について，次の問に答えよ．但し $\boldsymbol{R}^\ell$ は ℓ 次元実ベクトル空間を表す．

(1)　f が線形写像であることの定義を述べよ．

(2)　f が線形写像であるとき次を示せ．

(a)　$f(0) = 0$（但し 0 はベクトル空間の原点を表す）

(b)　r を任意の自然数とするとき，r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$ $\boldsymbol{a}_r$ $\in \boldsymbol{R}^n$ と
スカラー k_1, k_2, $\cdots$ k_r $\in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + k_r f(\boldsymbol{a}_r)$$

(静岡大 2006)　　(m20062507)

0.134　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ による $R^2 \longrightarrow R^2$ の線形写像 $A : \boldsymbol{x} \longrightarrow A\boldsymbol{x}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1)　像 $\mathrm{Im}A$ を示しなさい.

(2)　核 $\mathrm{Ker}A$ を示しなさい.

(3)　$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(4)　$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ. 解が存在しない場合には, その理由を述べよ.

(岐阜大 2005)　　(m20052612)

0.135 $X = \{x : |x| \leq \pi,\ x \in \boldsymbol{R}\}$, $Y = \{y : |y| \leq 1,\ y \in \boldsymbol{R}\}$ とする．以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい．ただし，$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表すものとする．

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto \sin x .$$

(1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(岐阜大 2008)　　(m20082609)

0.136 集合 $\{a, b, c\}$ から集合 $\{p, q, r, s\}$ への写像は全部で何個あるか．

(豊橋技科大 1996)　　(m19962704)

0.137 平面上で直線 $y = 3x + 2$ 上の点は，変換行列が $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ である一次変換により，どのような図形上に写像されるか答えよ．

(豊橋技科大 1998)　　(m19982712)

0.138 行列　$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　について次の問いに答えよ．

(1) A を適当な正則行列 P によって対角化せよ．

(2) A^n を求めよ（ただし，n は正整数とする）．

(3) A によって 1 次変換　$f : \begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 2x + 4y \end{cases}$　を定める．
f は任意の直線を直線に，平行な直線を平行な直線に移すことを証明せよ．

(4) 頂点が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である正方形の写像 f による像を Z とする．Z の面積を求めよ．

(名古屋大 2003)　　(m20032802)

0.139 (1) $\mathbb{R}^2$ の原点 O を中心とする角 $\dfrac{\pi}{4}$ の回転移動 F_r を標準基底 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関して行列で表せ．

(2) 標準基底に関して行列　$A = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$　と表される線形写像 $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ がある．この線形写像 F_t に回転移動 F_r を合成してできる写像を F と表したとき，円 $C : x^2 + y^2 = 2$ の F による像 $F(C)$ を与える方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2006)　　(m20062902)

0.140 (x, y, z) 空間における平面 $2x + 3y + 4z + 6 = 0$ を，線形写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって写して得られる (X, Y, Z) 空間の図形の方程式を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132905)

0.141 以下の問に答えなさい．

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える．これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように，定数 k の値を定め，解を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考える． 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい．なお，写像 f の核は $\left\{\boldsymbol{x} \in R^4 \;\middle|\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$（ $\boldsymbol{0}$ は R^4 の零ベクトルとする）として定義される．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014) (m20143102)

0.142 $\mathbf{R}^3$ のベクトル a, b, c を次のように定める．

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) a, b は一次独立であることを示せ．

(2) a, b, c は一次従属であることを示せ．

(3) $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^2$ への線形写像 f で

$$f(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を満たすものが存在しないことを示せ．

(奈良女子大 2002) (m20023210)

0.143 z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w = f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1| < 1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w > 0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2}) = i$，$f(0) = 0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V = \{w \mid 0 < \mathrm{Im}w < 1\}$ の現像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002) (m20023304)

0.144 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ によって定まる $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を T とおく．すなわち，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間を表す．(1)～(4) に答えよ．

(1) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の次元を求めよ．

(2) 像 $T(\boldsymbol{R}^4)$ の基底を 1 組作れ．

(3) $\mathrm{Ker}(T)$ の次元を求めよ．ただし，$\mathrm{Ker}(T)$ は $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間であり，次のように定められる．

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$$

(4) $\mathrm{Ker}(T)$ の基底を 1 組作れ．

(京都大 2019) (m20193305)

0.145 V を n 次元実ベクトル空間とする．以下の問いに答えよ．

(1) V のすべてのベクトルが，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_n$ の 1 次結合で表せるならば，$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \cdots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(2) f を V 上の 1 次変換とする．f が 1 次独立なベクトルの組を 1 次独立なベクトルの組に移すならば，f は同型写像であることを示せ．

（大阪府立大 2001）　(m20013605)

0.146 (1) z 平面上に領域 $0 < y < 2$ が $w = 1/z$ により写像される w 平面上の領域を示せ.

(2) 複素積分を用いて，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+16}dx$$

(大阪府立大 2018)　(m20183603)

0.147 線形写像 $f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & & +2x_3 & \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +x_4 \\ x_1 & & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数を成分とする n 次元列ベクトルの全体を表す.

(1) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を満たす行列 A の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4\}$ は 1 次従属であることを示せ.

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) f の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(4) f は全射か単射か示せ.
注意：「全射」は「上への写像」，「単射」は「1 対 1 写像」とも呼ばれる.

(大阪府立大 2018)　(m20183608)

0.148 $A = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\ 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_3)$ は 3 次正方行列
（$\boldsymbol{a}_j,\ \boldsymbol{b}_j$ はそれぞれ行列 $A,\ B$ の第 j 列，$\boldsymbol{e}_j$ は 3 次単位行列の第 j 列 ）とし，
写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める.

(1) $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3\}$ は 1 次独立であることを示せ.

(2) $f(\boldsymbol{b}_1),\ f(\boldsymbol{b}_2),\ f(\boldsymbol{b}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の式として表せ.

(3) $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2$ ならば $\{f(\boldsymbol{b}_1),\ f(\boldsymbol{b}_2),\ f(\boldsymbol{b}_3)\}$ は 1 次従属であることを示せ.

(大阪府立大 2019)　(m20193608)

0.149 $\boldsymbol{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3$ を　$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　とおく.

T を $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像とし，

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\,,\quad T(\boldsymbol{e}_2) = -2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\,,\quad T(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

を満たすとする．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) T を表す行列を求めよ．　　(2) $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ の基底と次元を求めよ．

(神戸大 2007)　　(m20073810)

0.150 線形写像 $T\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ および $\boldsymbol{R}^4$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ が与えられているとする．このとき，$\big[T(\boldsymbol{u}_1)\quad T(\boldsymbol{u}_2)\quad T(\boldsymbol{u}_3)\quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = \big[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \boldsymbol{v}_3\big]B$ を満たす $3\times\ 4$ 行列 B が一意に存在する．この B を $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_4\}$，$\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3\}$ に関する T の表現行列という．以下の問いに答えよ．

(1) $3\times\ 4$ 行列 A が与えられ，$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき，

$$\big[T(\boldsymbol{u}_1)\quad T(\boldsymbol{u}_2)\quad T(\boldsymbol{u}_3)\quad T(\boldsymbol{u}_4)\big] = A\big[\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2\quad \boldsymbol{u}_3\quad \boldsymbol{u}_4\big]$$

を示し，$P = \big[\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2\quad \boldsymbol{u}_3\quad \boldsymbol{u}_4\big]\quad Q = \big[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2\quad \boldsymbol{v}_3\big]$ とおいて，$B = Q^{-1}AP$ を証明せよ．

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -7 & 8 \\ 6 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4)$ であるとき，

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},\ \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ．

(神戸大 2009)　　(m20093814)

0.151 k を実数として

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める．

(1) f の核 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ の次元を求めよ．

(2) f の像 $W = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ．

(神戸大 2011)　　(m20113802)

0.152 X, Y を集合とし，$f\ :\ X \to Y$ を写像とする．A_i, A で X の任意の部分集合を，B で Y の任意の部分集合を表すとき，次の主張（命題）のそれぞれについて，正しければ証明をし，正しくなければ反例を挙げよ．

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(3) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

ここで $f(A)$ は A の f による像を，$f^{-1}(B)$ は B の f による逆像を表す:

$$f(A) = \big\{f(a) \mid a \in A\big\}\ ,\qquad f^{-1}(B) = \big\{x \in X \mid f(x) \in B\big\}$$

(神戸大 2017)　　(m20173806)

0.153 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ とする．また，$\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ を $\mathbb{R}^3$ の基底とし，この基底についての表現行列が A である $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像を T とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ と像 $\mathrm{Im}(T)$ の基底をそれぞれ求めよ．なお，基底を構成するベクトルは $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表すこと．

(4) n を自然数とするとき，T の n 回の合成を T^n で表す．$T^n(\boldsymbol{a}_1)$，$T^n(\boldsymbol{a}_2)$，$T^n(\boldsymbol{a}_3)$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せ．

(神戸大 2017)　　(m20173808)

0.154 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}^2$ への線形写像（1 次変換）が次のように与えられた．ただし，$\boldsymbol{R}^n$ は実数 $\boldsymbol{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を表す．

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \,.$$

(1) 表現行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めなさい．

(2) 1 次変換 f の逆変換 f^{-1} における表現行列 A^{-1} を求めなさい．

(3) 1 次変換 f について，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たす $\lambda(\in \boldsymbol{R})$ をすべて求めなさい．

(鳥取大 2008)　　(m20083908)

0.155 (1) $M_2(C)$ を複素数を成分とする $2\times\ 2$ 行列全体の集合とする，$M_2(C)$ は行列の足し算とスカラー倍により複素ベクトル空間になる．$M_2(C)$ の次元を求めよ．

(2) $A \in M_2(C)$ に対して写像 $f_A\ :\ M_2(C) \to M_2(C)$ を $f_A(X) = AX - XA$ で定める．このとき，f_A が線形写像になることを示せ．

(3) f_A の核の次元を求めよ．

(岡山大 2011)　　(m20114004)

0.156 2 次正方実行列 A であって ${}^tA = A$ を満たす行列全体からなる実ベクトル空間を V とする．ここで，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(1) V は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ を基底として持つことを示せ．

(2) V の元 A に対して

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させる写像 f は，V 上の線形変換であることを示せ．また，f の階数を求めよ．

(岡山大 2012)　　(m20124004)

0.157 $\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定める．ただし，A は次で与えられる行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数（ランク）を求めよ．

(2) 写像 f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を一組求めよ．

(3) 写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の次元を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ であるか判定せよ．

(岡山大 2015)　　(m20154003)

0.158 $t \in \mathbb{R}$ に対して，3 次正方行列 A を次で定める．

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の行列 $\det A$ を t の多項式で表し，かつ，$\det A = 0$ となる t を求めよ．

(2) $\mathrm{rank}(A)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(3) 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ を次のようにとる．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

そして，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a} \rangle\, \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{b} \rangle\, \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{c} \rangle\, \boldsymbol{c}\ , \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

と定める．ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は，$\boldsymbol{x} =^t (x_1,\ x_2,\ x_3,)$，$\boldsymbol{y} =^t (y_1,\ y_2,\ y_3,) \in \mathbb{R}^3$ に対して $\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積である．
$\mathrm{rank}(f)$ を t の値で場合分けして求めよ．

(岡山大 2016)　　(m20164004)

0.159 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ と定める．次に答えよ．

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) V の正規直交基底を一組求めよ．

(3) 写像 $f\ :\ V \to V$ を $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix}$ と定める．f が線形写像になることを示せ．

(4) (2) で求めた V の一組の基底を e_1, e_2 とする．$f(e_1)$ と $f(e_2)$ をそれぞれ，e_1, e_2 を用いて表せ．

(広島大 2003)　　(m20034109)

0.160 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ と $g\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を写像とする．このとき，次の命題について正しいときは証明を与え，正しくないときは反例を与えよ．

(1) g と合成写像 $g \circ f$ が線形写像で g が単射ならば，f は線形写像である．

(2) f と合成写像 $f \circ g$ が線形写像ならば，g は線形写像である．

(広島大 2003)　　(m20034110)

0.161 (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は, $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

に対し, 核空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = 0\}$ の次元と, 像空間 $W = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054104)

0.162　実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f : V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する．

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008)　　(m20084105)

0.163　2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^tAB)\,,$$

とおく．ただし，${}^tA$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ.

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ $(X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.164　2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ. また, ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ. $\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと.

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき, $T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$, $T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき, 写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.165　$a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) f の像および核の次元を求めよ.

(2) $a = 0$ のとき, f の逆写像に対応する行列を求めよ.

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大 2015)　　(m20154103)

0.166　A は実 $n \times\ k$ 行列でその階数は $\operatorname{rank} A = k < n$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ.

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ.

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし, 実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) =^t (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

を定める. このとき,

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big)({}^tAA)\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し, $f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.167　行列 A, ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ．

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174103)

0.168 a, b を実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & a & -6 \\ 2 & -6 & b \end{pmatrix}$ によって表される $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像をそれぞれ f, g とおく．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(2) g の核 $\mathrm{Ker}\, g$ の次元を求めよ．

(3) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ となるために a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184101)

0.169 V を n 次元の線形空間とし f は V から V への線形写像とする．

(1) $f(0) = 0$ を示せ．

(2) $X = \{x \,;\, x \in V\,,\ f(x) = 0\}$ は V の線形部分空間であることを示せ．

(3) $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ を V の基底とする．$f(x) = 0\ (x \in V)$ なら $x = 0$ となるとき $\{f(e_1),\ f(e_2),\ \cdots,\ f(e_n)\}$ は一次独立であることを示せ．

(徳島大 2009)　　(m20094401)

0.170 V を線形空間とし, $f: V \longrightarrow V$ を線形写像とするとき, 次の問に答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ 及び $\mathrm{Im}\, f = \{w \in V \mid w = f(v)\,,\ v \in V\}$ はともに V の部分線形空間であることを示せ．

(2) $f \circ f = f$ ならば, $V = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\,(1_V - f)$ が成り立つことを示せ．
ここで，$\mathrm{Im}\,(1_V - f) = \{w \in V \mid w = v - f(v)\,,\ v \in V\}$ とする．

(3) V が有限次元線形空間とする. このとき, $f \circ f = f$ であるための必要十分条件は
$\dim \mathrm{Im}(1_V - f) = \dim \mathrm{Ker}\, f$ であることを示せ．

(高知大 2005)　　(m20054505)

0.171 実数を成分とする $2 \times\ 2$ 行列全体の集合を V とする．さらに V から $\boldsymbol{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する．V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \qquad\qquad f_2(M) = a + d$$

このとき，f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，V と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006)　　(m20064504)

0.172 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和，行列の実数倍をそれぞれ，線形和，スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$ で定義するとき，tr は線形写像であることを示せ．

(3) $\mathrm{Ker\ tr} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(4) Ker tr の次元を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074505)

0.173 $\boldsymbol{V}$ を内積 $\langle\ ,\ \rangle$ をもつ有限次元の実ベクトル空間とし，$\boldsymbol{W}$ を $\boldsymbol{V}$ の部分空間とする．任意の $x \in \boldsymbol{V}$ は $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^{\perp}$ ($\boldsymbol{W}^{\perp}$は $\boldsymbol{W}$ の直交補空間) を用いて $x = w + w'$ ($w \in \boldsymbol{W},\ w' \in \boldsymbol{W}^{\perp}$) と一意に表すことができる．$x$ に対してこの w を対応させる $\boldsymbol{V}$ から $\boldsymbol{V}$ への写像を f と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $x_1, x_2 \in \boldsymbol{V}$，$\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ に対して，

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f \circ f = f$ が成り立つことを示せ．ただし，$f \circ f$ は f と f の合成写像である．

(3) 任意の $x, y \in \boldsymbol{V}$ に対して，$\langle\ f(x), y\ \rangle = \langle\ x, f(y)\ \rangle$ が成り立つことを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084504)

0.174 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f は，$\boldsymbol{R}^2$ の元 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{R}^3$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\,, \quad f(\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$$

を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{R}^2$ の基底，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 A を求めよ．

(3) $\boldsymbol{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列 B を求めよ．また，B と (2) における行列 A との関係を述べよ．

(高知大 2009)　　(m20094503)

0.175 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする．P の元 $f(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ と $g(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する．

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2 x^2 + \lambda b_1 x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104503) ,

0.176 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \delta_{i,2} \\ \delta_{i,3} \\ \delta_{i,4} \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{e}_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{e}_k$ となっている．ただし，$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ である．このとき次の問いに答えよ.

(1) $f(\boldsymbol{e}_4)$ はどんなベクトルか，成分表示せよ.

(2) $f(\boldsymbol{e}_1),\ f(\boldsymbol{e}_2),\ f(\boldsymbol{e}_3),\ f(\boldsymbol{e}_4)$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底を $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_4$ とするとき．f の表現行列 A を求めよ.

(4) A は正則であることを示せ.

(5) f の逆写像はあるか．あれば求め，無ければその理由を述べよ.

(高知大 2011)　　(m20114504)

0.177 2 次の実正方行列全体の集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．$M_2(\mathbb{R})$ は通常の和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっている．写像 $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を

$$f(A) = {}^tA \quad \big(a \in M_2(\mathbb{R})\big)$$

で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，次の問いに答えよ.

(1) f は一次写像であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底となることを示せ.

(3) (2) の基底に関する f の表現行列を求めよ.

(高知大 2015)　　(m20154504)

0.178 a, b, c は実数であるとする．$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$．$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A^{-1} を求めよ.

(2) $B = AJA^{-1}$ とおく．B を求めよ.

(3) (2) の B によって定まる線形写像を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と書く．このとき $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ はそれぞれ f の像と f の核を表すものとする.

(4) (3) の線形写像 f に対して，$\mathrm{Ker}(f)$ の基底を一組求めよ.

(高知大 2016)　　(m20164504)

0.179　実ベクトル空間 V, W の間の一次写像 $f\ :\ V \to W$ について次の問いに答えよ.

(1)　f の核を $\mathrm{Ker}\ f$ とおき，V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ とおく．f が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}_V\}$ であることを示せ.

(2)　f が単射で，V の k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であるならば，これらの f による像 $f(\boldsymbol{a}_1), \cdots, f(\boldsymbol{a}_k)$ も一次独立であることを示せ.

(3)　実ベクトル空間としての V, W の次元をそれぞれ m, n とおく．f が単射であるならば，$m \leqq n$ であることを示せ.

(高知大 2017)　　(m20174504)

0.180　3 次の正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

で与えられているとし，A を $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への一次写像とみなす．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　A の階数を求めよ.

(2)　A の像 $\mathrm{Image}(A)$ を求めよ.

(3)　A の転置行列 ${}^tA$ の核 $\mathrm{Ker}({}^tA)$ を求めよ.

(4)　$\mathrm{Ker}({}^tA)$ の元は $\mathrm{Image}(A)$ の元と $\mathbb{R}^3$ の標準内積に関して直交することを示せ.

(高知大 2019)　　(m20194504)

0.181　線形写像　$T : R^4 \to R^2$　について

$$\mathrm{Ker}\ T = \{\ x \in R^4 \mid T(x) = 0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T = \{\ T(x) \mid x \in R^4\ \}$$

と定義する．T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle|\ x_1 + 2x_3 = x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T = R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ.

(1)　$\mathrm{Ker}\ T$ の基底を 1 組求めよ.

(2)　上で求めた $\mathrm{Ker}\ T$ の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ.

(3)　$T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ.

(4)　上の A について $\mathrm{rank}\ A$ を求めよ.

(九州大 1997)　　(m19974705)

0.182　$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

について次の問に答えなさい.

(1) $\varphi(x) = Ax$ となる 3 次平方行列 A を求めなさい.

(2) A の行列式 $\det A$ を求めなさい.

(3) $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$\varphi(e)$ を求めなさい.

(4) $\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる $x \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めなさい.

(5) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_3 = 0\}$ とする．$\varphi(V) = \{\varphi(x) \,|\, x \in V\}$ は部分空間であることを示し，さらにその次元を求めなさい.

（九州大 2001）　(m20014706)

0.183 n を 1 以上の整数とし, n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ の 1 次結合全体を $L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$ と表す. 線形写像

$$f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \longrightarrow f' \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]$$

を T で表す．ただし f' は f の導関数である. 次の問に答えよ.

(1) n 個の連続関数 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ は 1 次独立であることを証明せよ.

(2) $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ を求め, それぞれの次元を求めよ．ここで, 記号 $\mathrm{Ker}(T), \mathrm{Im}(T)$ はそれぞれ

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}] \ | \ \text{恒等的に } Tf = 0\},$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{Tf \ | \ f \in L[1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}]\}$$

を表す.

(九州大 2004)　(m20044706)

0.184 $\mathcal{P}$ を 3 次以下の実係数多項式のつくるベクトル空間とする．すなわち

$$\mathcal{P} = \{f \,|\, f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ , \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}\}\ ,$$

$A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を　$(Af)(x) = \displaystyle\int_0^x f(y)dy - \frac{f'''(0)}{24}x^4$　と定める.

(1) A は線形写像であることを示し，$f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, 3,$ に対し $(Af_n)(x)$ を求めなさい.

(2) W の基底 f_0, f_1, f_2, f_3 に関する A の行列表示を求めなさい.

(3) A^4 を求めなさい.

(4) A は対角化不可能であることを示しなさい.

(九州大 2006)　(m20064708)

0.185 線形写像 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ay - az - w \\ ax + y - z - w \\ -x + y + az + 2w \end{pmatrix}$$

を考える. ただし, a は実数である.

(1) ベクトル空間

$$R(T) = \left\{ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ.

(2) ベクトル空間

$$N(T)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \ ; \ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=0\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4\right\}$$

の次元と一組の基底を求めよ．

(九州大 2010)　　(m20104708)

0.186 $a>b>0$ のとき，線形変換 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ によって円 $x^2+y^2=1$ がどのような図形に写像されるか式と図で示せ．また，それに続けて線形変換 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ をほどこすとき，どのような図形に写像されるか式と図で示せ．

(九州芸術工科大 2003)　　(m20034807)

0.187 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を原点を中心とし半径 2 の円に写像する線形変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の定数 a, b を求めよ．

(九州芸術工科大 2005)　　(m20054811)

0.188 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R^n}$ とし，$\mathbf{R^4}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像 f を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} x_1+x_2-x_3+x_4 \\ -3x_1-x_2+x_3-x_4 \\ 11x_1+5x_2-5x_3+5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R^4}$ の任意のベクトル x に対して $f(x)=Ax$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ．

(3)
$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in\mathbf{R^4}\mid f(x)=\mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\mid\ x\in\mathbf{R^4}\}$$
がそれぞれ $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^3}$ の線形部分空間になることを証明せよ．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbf{R^3}$ の零ベクトルを表す．

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034932)

0.189 平面上の直線 l を $l\ :\ y=(\tan\theta)x\ \ (-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とし，f を平面上の与えられたベクトル $\boldsymbol{a}$ を l と線対称な位置に移すという線形写像とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $f(\boldsymbol{e}_1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)$ を求めよ．

(2) 線形写像 f を表す行列を求めよ．

(佐賀大 2005)　　(m20054919)

0.190 2 つのベクトルを $\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．2 次元列ベクトル空間 V^2 から V^2 への線形写像 $y=f(x)$ が $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ を満たすとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ はど

のようなベクトルへ写像されるか $f(\boldsymbol{x})$ の形を行列・ベクトル表示で求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074919)

0.191　xy 平面上の原点回りの回転角 -45°, 60°の 1 次変換を ，それぞれ f, g とする．次の問いに答えよ．

(1) 合成関数 $g \circ f$ の行列を求めよ．

(2) 点 $(1, 1)$ を合成関数 $g \circ f$ で写像した点を求めよ．

(佐賀大 2015)　　(m20154923)

0.192　線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が　$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$　で与えられているとき，次の問いに答えよ．

(1) f の核の基底を求めよ．　　(2) f の像の次元を求めよ．

(熊本大 2007)　　(m20075204)

0.193　xy 平面上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移す写像

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad ①$$

について，以下の問いに答えなさい．

(1) この写像を表す行列の固有値と固有ベクトルの組は，次に示す ② と ③ の二つであることを示しなさい．なお，固有ベクトルの大きさは，$\sqrt{2}$ に選んである．

$$\text{固有値 } \lambda_1 = \frac{3}{2}\ ,\ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\text{固有値 } \lambda_2 = \frac{1}{2}\ ,\ \text{固有ベクトル } \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad ③$$

(2) 二つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ は 1 次独立なので，xy 平面上の点を表すベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の 1 次結合によって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

のように表現できる．α および β を，x および y を用いて表しなさい．

(3) この写像によって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が移る点 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を，α, β, $\boldsymbol{x}_1$ および $\boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい．

(熊本大 2013)　　(m20135202)

0.194　xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を同じ平面上の点 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ に移す写像

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) この写像の表す固有値 λ_1, λ_2 と固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ の組を求めなさい．なお，固有ベクトルの大きさは $\sqrt{2}$ とすること．

(2) xy 平面上の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ により以下のように表せる.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$$

$\alpha,\ \beta$ を $x,\ y$ を用いて表しなさい.

(3) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を $\alpha,\ \beta,\ \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ を用いて表しなさい.

(熊本大 2019)　　(m20195203)

0.195 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) R^3 から R^3 への写像 f_A を

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する. f_A は線形写像であることを示せ.

(2) f_A が単射とならないような a の値を求めよ.

(3) f_A の像の次元は 2 以上であることを示せ.

(4) A は 2 を固有値としてもつことを示せ.

(5) A が 1 を固有値としてもつとき, 次の (a),(b) に答えよ.

(a) a の値を求めよ.

(b) A は対角化可能であることを示せ.

(島根大 2009)　　(m20095801)

0.196 3 次縦ベクトル全体のなすベクトル空間を R^3 とする,

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

とする. 線形写像 $f\ :\ R^3 \to R^3$ は, 次を満たすものとする.

$$f(\boldsymbol{v_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad f(\boldsymbol{v_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},\quad f(\boldsymbol{v_3}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}\}$ は R^3 の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{v_1},\ \boldsymbol{v_2},\ \boldsymbol{v_3}$ の 1 次結合で表せ.

(3) $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

(4) f の像の 1 組の基底を求めよ.

(5) f の核の次元を求めよ.

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(島根大 2010)　　(m20105801)

0.197 写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax^2 + 2y - 2z + w \\ x - y + z + bw + c - 2 \\ 2x + (d+1)yz - w \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，f が線形写像になり，かつ核の次元が 2 となる a, b, c, d の値を求めよ．

(島根大 2012)　　(m20125805)

0.198 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\ker f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.199 $(3,4)$ 型行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) f_A は線形写像であることを示せ．

(2) f_A の核 $\mathrm{Ker} f_A$ に属するベクトルをすべて求めよ．

(3) f_A の像 $f_A\left(\mathbb{R}^4\right)$ の基底を求めよ．

(4) $f_A(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ をすべて求めよ．もしそのような $\boldsymbol{y}$ が存在しない場合はその理由を述べよ．

(島根大 2014)　　(m20145801)

0.200 以下に現れる関数はすべて $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級とする．写像

$$f\,:\,\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\quad f(x,y)=\big(u(x,y),\ v(x,y)\big)$$

と二変数関数 $g(u,v)$ の合成を $F=g\circ f$ と定める．このとき，

$$F(x,y)=(g\circ f)(x,y)=x$$

ならば，以下の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\begin{pmatrix} g_u & g_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(島根大 2014)　　(m20145806)

0.201 次の問いにおいて V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f:V\to V$ は線形写像とする．$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする．

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V のベクトルとする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1),\cdots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるならば，$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) 不等式 $\dim(V)\leq\dim\big(f(V)\big)+\dim(\mathrm{Ker}\,f)$ を示せ．ただし，$\mathrm{Ker}\,f$ は f の核である．

(島根大 2015)　　(m20155805)

0.202 (1) 3 次実列ベクトル全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 4 つのベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$$

とする．このとき，

(ア) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立であることを示せ．

(イ) $\boldsymbol{a}_4$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(2) 実数上のベクトル空間 V の基底を $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ とする．線形写像 $f:V\to V$ が次を満たすとき，

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) &=& \boldsymbol{v}_1 &+& 2\boldsymbol{v}_2 &+& \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_2) &=& 2\boldsymbol{v}_1 &+& \boldsymbol{v}_2 &+& \boldsymbol{v}_3 \\ f(\boldsymbol{v}_3) &=& 4\boldsymbol{v}_1 &+& 2\boldsymbol{v}_2 &+& 2\boldsymbol{v}_3 \end{cases}$$

このとき，

(ウ) f の像 $f(V)$ の次元を求めよ．

(エ) $f(W)=W$ を満たす V の 1 次元の部分空間 W をすべて求めよ．

(島根大 2016)　　(m20165801)

0.203 $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となるような線形写像とする，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ と像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求めよ．

(島根大 2017)　　(m20175804)

0.204 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とする．線形写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．また，$A = [\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5]$ を A の列ベクトルへの分割とする．すなわち，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．$W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ で張られる $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $f_A(\mathbb{R}^5) = W = \langle\ \boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\ \rangle$ となることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5$ の中から，W を生成する最小個数のベクトルの組を 1 組求めよ．また，W の次元を述べよ．

(3) f_A の核 $\mathrm{Ker}\ f_A$ の基底を 1 組求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185804)

0.205 V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，V_1, V_2 を V の部分空間とする． また f を V から W への線形写像とする．次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 f は V の零ベクトル 0_V を W の零ベクトル 0_W に写すことを示せ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\ f$ は W の部分空間であることを示せ．

(3) $V_1 \cap V_2$ は V の部分空間であることを示せ．

(島根大 2018)　　(m20185805)

0.206 V, U を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，f を V から U への線形写像とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ は U の部分空間であることを示せ．

(2) f は単射であるとする．このとき，

(a) V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立であるなら，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ も 1 次独立であることを示せ．

(b) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が V の基底であっても $f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ は U の基底であるとは限らないことを示せ．

(島根大 2019)　　(m20195803)

0.207 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の階数を求めよ.

(3) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を次のように定める.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x - y + z \\ 3x + y - 2z \end{pmatrix}$$

(a) f は線形写像であることを示せ.

(b) $f(\mathbb{R}^3)$ の一組の基底を求めよ.

(島根大 2019)　　(m20195804)

0.208 a を実数, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(X) = AX$$

と定める. f の核を $\mathrm{Ker}f$, 像を $\mathrm{Im}f$ で表す. 必要なら a による場合分けを行い, それぞれの場合に $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の次元を求めよ. さらに $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ の基底をそれぞれ 1 組ずつ求めよ.

(島根大 2020)　　(m20205805)

0.209 線形写像 $f : R^3 \to R^3$ は, ${}^t(1,0,0)$ を ${}^t(1,0,-1)$ へ, ${}^t(0,1,1)$ を ${}^t(0,1,0)$ へ, ${}^t(0,1,2)$ を ${}^t(2,1,-2)$ へ, それぞれ移すものとする. ここで ${}^t\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置を表す. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が 1 次従属であることを示せ.

(2) $f(x) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in R^3)$ となるような行列 A を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 A について, 行列 A の階数を求めよ.

(はこだて未来大 2011)　　(m20116303)

0.210 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ で定まる線形写像 $f : R^3 \to R^3$, $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, a は実数とする.

(1) A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(2) A の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ.

(3) A の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ.

(はこだて未来大 2014)　　(m20146301)

0.211 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f \ : \ R^4 \to R^3 \ , \qquad f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ の基底を求めよ．

(はこだて未来大 2017) (m20176301)

0.212 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A の階数 rank A を求めよ．

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ．

(3) 行列 A とその転置 ${}^t\!A$ の積 $A\,{}^t\!A$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1}A\,{}^t\!AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ．

(はこだて未来大 2021) (m20216301)