[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：対角行列

0.1　次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ $(= \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)$ を挙げよ．　ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし，3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$　($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.2　次式の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の行列について，次の設問に答えなさい．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

設問 1. $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

設問 2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \mathbf{\Lambda}$（$\mathbf{\Lambda}$ は対角行列）となる行列 $\boldsymbol{P}$ と $\mathbf{\Lambda}$ を求めなさい．

設問 3. $\boldsymbol{B}$ が直交行列であることを示しなさい．

設問 4. ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ を $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Bx}$ による一次変換としたとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の大きさが等しいことを示しなさい．ただし，ベクトルの大きさの二乗は，$\boldsymbol{x}^T\,\boldsymbol{x}$ で求めることができる．ここで，T は転換を表す．

(北海道大 2018)　　(m20180103)

0.3　t を実変数，x, y を未知関数とする次のような連立微分方程式を考える．

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 5y\,, \quad \frac{dy}{dt} = x - 2y \qquad (\mathbf{a})$$

この連立微分方程式は次のように書き表すことができる．

$$\frac{dr}{dt} = Ar \qquad (\mathbf{b})$$

ここで，行列 A と列ベクトル r は次のように与えられる．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

次の問に答えよ．

(1) 実定数を成分とする 2 行 2 列の正則行列 P を導入すると，上記の (**b**) が次のように書きかえられることを示しなさい．

$$\frac{dR}{dt} = BR \qquad (\mathbf{c})$$

ここで，B, R は P とその逆行列 P^{-1} を用いて次のように与えられる．

$$B = P^{-1}AP, \quad R = P^{-1}r$$

(2) P を次のようにとると，B が対角行列になることが分かった．

$$P=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P の行列式 $det\,P\,, P$ の逆行列 P^{-1}，および B を求めよ．

(3) 次式のように，列ベクトル R の成分を X, Y とする．

$$R=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

微分方程式 (**c**) を解き，X, Y のそれぞれを t の関数として表す一般解を求めよ．

(4) $t=0$ において $x=x_0, y=y_0$ という初期条件を満足する連立微分方程式 (**a**) の解を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960304)

0.4 行列 $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ に関して次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ および逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列であるような正則な 2 次正方行列 P をひとつ求めなさい.

(4) 任意の自然数 n に対し A^n を求めなさい.

(岩手大 2010)　　(m20100302)

0.5 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(4) A^n を求めなさい．ただし，n は自然数とする.

(岩手大 2015)　　(m20150302)

0.6 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$，　$C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(2) $AB=C$ であるとき，逆行列 A^{-1} を用いて u, v, w の値をそれぞれ求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2018)　　(m20180302)

0.7 行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，ベクトル $\boldsymbol{e}_x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A のランク（階数）rank (A) が 3 であることを示しなさい.

(2) $\boldsymbol{e}_x{}' = A\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y{}' = A\boldsymbol{e}_y$ であるとき，２つのベクトル $\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y{}'$ を二辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(3) 行列 A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めなさい.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように行列 P を求め，A を対角化しなさい.

(岩手大 2019)　　(m20190302)

0.8 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) $A^5 - 13A^3$ を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を 1 つ求めよ. また, その逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2010)　　(m20100503)

0.9 ３次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ および３次元ベクトル $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される２次形式

$$f(\boldsymbol{m}) = {}^t\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} = 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz + 8xz$$

を考える．ここで，左上付き添字 t は転置を表す．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．また，各固有値の重複度を答えよ.

(3) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を 1 つ求めよ．また，この $\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(4) ３次元ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ を考える．(3) で求めた $\boldsymbol{P}$ を用いて変数変換 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ を行い，$f(\boldsymbol{m})$ の標準形を求めよ.

(東北大 2012)　　(m20120502)

0.10 x を実数とする．$n \times n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える.

$$\boldsymbol{A}_n(x) = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{A}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x = 0$ としたときの行列である.

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ.

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする. この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = 0$ を満たすことを示せ.

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = -\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)| - |\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ. ただし, $|\boldsymbol{A}_0(\lambda)| = 1$, $|\boldsymbol{A}_1(\lambda)| = -\lambda$ とする.

(5) $\lambda = -2\cos\theta$, $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)| = \dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき, これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ. ただし, $\sin\theta \neq 0$ である.

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta} = 0$ を満たす θ を求めよ. これを使って, $\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda = -2\cos\theta$ を求めよ. また, 求めた固有値は, $n = 2$, $n = 3$ の場合, それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ.

(東北大 2015) (m20150505)

0.11 3 次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して, 固有空間の次元を求めよ.

(3) 3 次直交行列 P で, ${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ. ただし, ${}^tP$ で P の転置行列を表す.

(東北大 2015) (m20150506)

0.12 次の行列 $\boldsymbol{C}$ について, 以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさを 1 とする.

(2) $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求め, $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{P}^t$ は行列 $\boldsymbol{P}$ の転置行列を表す.

(東北大 2018) (m20180506)

0.13 次の行列 $\boldsymbol{A}$ について, 以下の問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を表す.

(3) n が 1 以上の整数であるとき, n を用いて $\boldsymbol{A}^n$ を表せ.

(東北大 2019) (m20190503)

0.14 (1) 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B について，以下の問に答えよ．

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列 B の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを 1 とする．

(b) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする．n が 1 以上の整数であるとき，ベクトル $B^n\boldsymbol{u}$ を求めよ．

(3) 次の行列 C について，以下の問に答えよ．

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．ただし，P^{-1} は P の逆行列を表す．

(b) n が 1 以上の整数であるとき，行列 C^n を求めよ．

(東北大 2020)　　(m20200503)

0.15　次の行列 $\boldsymbol{C}$ について，以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) すべての固有値と固有ベクトルを求めよ．

(b) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような正則行列 $\boldsymbol{P}$ を求め，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{P}^{-1}$ は $\boldsymbol{P}$ の逆行列を示す．

(c) n が 1 以上の整数であるとき，n を用いて $\boldsymbol{C}^n$ を表せ．

(東北大 2021)　　(m20210503)

0.16　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

0.17　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような $3\times\ 3$ 行列 P を一つ求めよ．

（お茶の水女子大 1999）　　(m19990609)

0.18 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 B^TAB は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000） (m20000614)

0.19 (1) 正方行列 A と B がともに上三角行列であるとき，積 AB もまた上三角行列となることを示せ.

(2) 次の行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A の固有値を求め，それぞれの固有値に対する A の固有空間の基底を一組求めよ.

(b) 適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090602)

0.20 以下の各問いに答えよ.

(1) t を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} t & -t-1 & -1 \\ t-1 & -t & -1 \\ 3-2t & 2t+3 & 4 \end{pmatrix}$$

の固有値を求め，各固有値に対する固有空間の次元が t の値によってどのように変わるかを答えよ．また，この行列が対角化可能となるような t の値を求め，そのとき $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を一つ求めよ.

(2) n を自然数，A を n 次実正方行列とする． 以下では i は自然数，$r(X)$ は行列 X の階数を表すものとする.

(a) $r(A^i) \geq r(A^{i+1})$ となることを示せ.

(b) $r(A^i) = r(A^{i+1})$ のとき，$r(A^{i+1}) = r(A^{i+2})$ となることを示せ.

(c) $r(A^n) = r(A^{n+1})$ となることを示せ.

(お茶に水女子大 2012) (m20120602)

0.21 5 次正方行列 A を次で与える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値は，-2 と 8 であることを示せ.

(2) A の固有値 $-2, 8$ の固有空間をそれぞれ $V(-2)$, $V(8)$ で表す．$\boldsymbol{a}$ を $V(-2)$ の 0 でないベクトルとし，$\boldsymbol{b}$ を $V(8)$ の 0 でないベクトルとする． このとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は 1 次独立（線形独立）であることを示せ.

(3) 各固有空間 $V(-2)$, $V(8)$ の基底を求めよ.

(4) 行列 A が対角化可能であることを示し，$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140603)

0.22 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T FP$ へと変換された. ここで T は行列の転置を表す. 以下の問に答えなさい.

(1) F のトレース（対角成分の和）はこの変換により不変であること，つまり $T_r\, F = T_r\, F'$ を証明しなさい.

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき，P と F' を求めなさい.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160604)

0.23 以下の問いに答えよ. ただし，行列はすべて複素行列とする.

(1) X をベクトル空間, U, V, W を X の部分ベクトル空間とする. W が U, V の和集合 $U \cup V$ に含まれるとき, W は U に含まれるか, V に含まれるかのどちらかであることを示せ.

(2) A を 3 次正方行列で, $A^3 = O$, $A^2 \neq O$ となるものとする. ただし, O は零行列とする. A の階数を求めよ.

(3) 次の行列 A を考える. ただし, a は複素数とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & a-2 \\ 2a & 2 & 2-2a \\ -a & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

(a) $a = 0$ のとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(b) $a \neq 0$ のとき, A は対角化可能でないことを示せ.

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220604)

0.24 3 次の正方行列 A の固有値を λ とし, λ は固有方程式 $\lambda^3 - (\alpha+\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda = 0$ を満たすとする. このとき, $A^3 - (\alpha+\beta)A^2 + \alpha\beta A = 0$ が成り立つ. ここで, α, β は互いに異なる 0 でない実数とし, 行列 A は対角化可能であるとする, また, O を零行列, E を単位行列とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A^n $(n \geqq 3)$ は次のような行列 A の 2 次式で表せることを示せ.

$$A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n E$$

ここで, a_n, b_n, c_n は実数である.

(2) 行列 A が対角行列 D に対角化されるとき, (1) の a_n, b_n, c_n を含む次の式

$$D^n = a_n D^2 + b_n D + c_n E \quad (n \geqq 3)$$

が成り立つことを示せ.

(3) (1) の a_n, b_n, c_n を求めよ.

(4) α, β の絶対値が 1 より小さければ, 無限級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i = E + A + A^2 + \cdots$$

は $a'A^2 + b'A + c'E$ と表されることを示し, 実数 a', b', c' を求めよ.

(5) (4) の a', b', c' に対し，$(E-A)(a'A^2+b'A+c'E)$ を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130705)

0.25 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ．

(2) 実直交行列 P で上の性質をもつものは存在するか？　YES ならば 例をみつけよ．NO ならば その理由を記せ．

(東京工業大 1998)　　(m19980803)

0.26 $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 & 6 \\ -12 & 11 & 6 \\ -6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2000)　　(m20000804)

0.27 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ に対して

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010805)

0.28 $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & -8 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $P^{-1}CP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ．

(東京工業大 2004)　　(m20040804)

0.29 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -8 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ と定める．$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(東京工業大 2006)　　(m20060803)

0.30 実対称行列 A について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ．

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ に対し，適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．

(東京工業大 2009)　　(m20090801)

0.31 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．

(東京工業大 2012)　　(m20120803)

0.32 3 次の正方行列 M を次で定義する:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2+2a+3 & 2 & a^2-6a+7 \\ a^2-3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) $a=1$ のとき $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(2) $a=2$ のとき $Q^{-1}MQ$ が対角行列となるような正則行列 Q が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような Q が存在する場合は $Q^{-1}MQ$ を求めよ.

(3) $a=3$ のとき $R^{-1}MR$ が対角行列となるような正則行列 R が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような R が存在する場合は $R^{-1}MR$ を求めよ.

(東京工業大 2014)　　(m20140803)

0.33 実数 a, b に対して

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をみつけよ.

(東京工業大 2015)　　(m20150803)

0.34

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ.

(2) 正の整数 n に対して A^n を求めよ.

(東京工業大 2017)　　(m20170802)

0.35 行列

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(東京工業大 2019)　　(m20190802)

0.36 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} 9 & 16 & -2 \\ -3 & -5 & 1 \\ -3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 3 次正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列になるものを求めよ.

(2) 3 次正則行列 Q で，$Q^{-1}AQ$ と $Q^{-1}BQ$ が対角行列になるものを求めよ.

(東京工業大 2020)　　(m20200802)

0.37　3 次の正方行列 A について次の条件が成り立つとする．$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ は固有値 1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は固有値 -1 の固有ベクトルである．$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 0 の固有ベクトルである．このとき以下の問に答えよ．

(1)　A を求めよ．

(2)　A を対角化する行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

(電気通信大 2000)　　(m20001004)

0.38　3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　A の各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3)　$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(電気通信大 2012)　　(m20121001)

0.39　4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため, 掲載を差し控えさせていただきます.

(2)　f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3)　B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ．

(4)　V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.40　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ が零ベクトルでない解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をもつとする．このような実数 λ の値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ に対して，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $V_\lambda = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\right\}$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ をうまくとると，f の基底 $\boldsymbol{B}$ に関する表現行列 M は対角行列となる．このような $\boldsymbol{B}$ および M を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018)　　(m20181002)

0.41　3 次正方行列 $M = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -10 & 8 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ を考える．

(1) M の固有値をすべて求め，さらに最小の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{A} = (\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)$ と線形写像 $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える．

基底 $\mathcal{A}$ に関する f の表現行列が M であるとする．

(2) $f(\boldsymbol{a}_1)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合で表せ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を考える．基底 $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列が対角行列になっているとする．このような $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3)$ を $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ を用いて一組求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221002)

0.42　$0 < x < 1$ とし, $A = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を 1 つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする，A^n を求めよ．

(4) A^n の各成分は，$n \to \infty$ のとき極限をもつことを示せ．

(横浜国立大 2014)　　(m20141101)

0.43　次の行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 1 以上の整数とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

(横浜国立大 2022)　　(m20221101)

0.44　行列 $A = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$ に関して，以下の問に答えよ．ただし，$0 < a < 1$ かつ $0 < b < 1$ とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化する必要はない．

(2) 上で求めた固有ベクトルのもとで行列 A を対角化したときの対角行列 B を求めよ．

(3) 行列 A の対角化を用いて，A^n を求めよ（n は自然数）．

(筑波大 2001)　　(m20011310)

0.45 次の微分方程式を解くために，以下の設問に答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1 &= 2x_1 - 2x_2 \\ \dfrac{d}{dt}x_2 &= -x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

(1) 行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．この行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように行列 P を定め，行列 A を対角化せよ．

(3) ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とおく．$\mathbf{x}$ と A を用いて，上の微分方程式を表せ．

(4) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく．$P\mathbf{y} = \mathbf{x}$ として，これを設問 (3) で求めた表現に代入せよ．また，この y_1，y_2 に関する微分方程式の一般解を求めよ．

(5) x_1，x_2 の一般解を求めよ．

(6) $t = 0$ における初期値 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対応する解 x_1，x_2 の，$t \to \infty$ における振る舞いを調べよ．

(筑波大 2004)　　(m20041321)

0.46 次の行列 A について問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正則行列 P は存在するか，理由をつけて答えよ．

(筑波大 2008)　　(m20081313)

0.47 4 次正方行列　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　について．以下の問いに答えよ．

(1) A の行列式を計算せよ．　(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 4 次正則行列 P を求めよ．

(筑波大 2011)　　(m20111320)

0.48 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ とし，線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，
$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする．

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ．

(2) ある実数 $\lambda (\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}|| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ．

(3) 整数 $n (> 0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$，$f^n(\boldsymbol{x}) = f\bigl(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\bigr)$ で帰納的に定義する．f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ．

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.49　$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の独立な固有ベクトルをすべて求めよ．

(3) A は対角化可能であるかどうかを示せ．もし A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161310)

0.50　行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求めよ．ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ とする．

(3) A を $P^{-1}AP=D$（ただし，P は直交行列，D は対角行列）として対角化したとき，P, P^{-1} および D を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}(A+aE)^nP$ を求めよ．ただし，E は 3 次の単位行列，a は実定数，n は正の整数とする．

以下では $AB=BA$ となる 3 次の正方行列 B について考える．

(5) (2) で求めた $\boldsymbol{u}_j$ $(j=1,2,3)$ は B の固有ベクトルになることを示せ．

(6) (3) で求めた P に対して，$P^{-1}BP$ が対角行列になることを示せ．

(筑波大 2016)　　(m20161316)

0.51　3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し．2 次曲面

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3+4x_1+2x_2-2x_3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+c=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T={}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t=1,2,3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1,2,1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y}={}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③$$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ．

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1，y_2，y_3 を用いて書き直せ．

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3=0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け．

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.52 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ を正の成分をもつ実ベクトルとし，

$$A_x = D_x - \frac{\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{x}}{\sum_{i=1}^m x_i}$$

とおく．ただし，D_x は $D_x = \mathrm{diag}\,(x_1, \cdots, x_m)$ なる対角行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置とする．

(1) 0 が A_x の固有値になることを示し，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) 任意の実ベクトル $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ に対して，${}^t\boldsymbol{y}\,A_x\,\boldsymbol{y} \geq 0$ を示せ．

(筑波大 2017)　　(m20171315)

0.53 次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) a_n，b_n の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

0.54 二つのメーカー X および Y からなる市場において，各メーカーのユーザー数を調査したい．毎年メーカー X のユーザーのうち $\dfrac{1}{10}$ がメーカー Y のユーザーとなり，一方で，メーカー Y のユーザーのうち $\dfrac{1}{5}$ がメーカー X のユーザーとなる，それ以外は同じメーカーのユーザーのままでいるものとし，ユーザーの総数は変化しない．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ある年におけるメーカー X, Y のユーザー数をそれぞれ x_n，y_n で表す．　このとき翌年におけるそれぞれのメーカーのユーザー数 x_{n+1}，y_{n+1} を二次正方行列 A を使って以下の形で表す．行列 A を具体的に示しなさい．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

(2) A の固有値および固有ベクトルを求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を一つ求めるとともに，P の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(4) 行列 A^n を求めなさい．

(5) (4) の結果を使って，$n \to \infty$ としたときのメーカー X および Y のユーザー数の比率を求めなさい．

(筑波大 2018)　　(m20181316)

0.55 0 と異なる実数 a, b, c に対して，$\boldsymbol{u} = (a,\ b,\ c)$ とし, $A = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}$ とおく．ただし，${}^t\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}$ の転置とする．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) A が対角化可能であるかどうかを判定し，対角化可能であれば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181317)

0.56 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．なお，固有ベクトルはその第 1 成分を 1 とせよ．

(2) $P^{-1}AP = D$ が対角行列になるように，3 次正則行列 P とその逆行列 P^{-1} の組を求めよ．なお，D の対角要素は大きい順に並べ，P の第 1 行の要素はすべて 1 とせよ．

(3) 自然数 n に対して，ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = (A+2E)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の各成分を n の関数として求めよ．ここで E は単位行列である．

(4) 3 次元空間の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，その転置ベクトルを ${}^t\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，${}^t\boldsymbol{r}(A+E)\boldsymbol{r} = 1$ で表される曲面 M は，直交変換 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ によって標準形

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1$$

にすることができる．$\alpha > \beta > \gamma$ となるように定数 α, β, γ を定めよ．

(5) (4) における曲面 M に対して

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}$$

で表される回転を施したら，xy 平面，yz 平面，zx 平面いずれに関しても対称な図形となった．このような回転を表す行列 R をひとつ求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191307)

0.57 次の行列 A について，以下の問に答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を全て求めよ．

(2) (1) で求めた全ての固有値に対して固有ベクトルを求めよ．

(3) A は対角化可能か述べよ．また，対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を求めよ．

(筑波大 2019)　　(m20191309)

0.58 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ を求めよ．ただし，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ とする．

(2) 行列 A の正規化した固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ を求めよ． ただし，$A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j\ \ (j = 1,\ 2,\ 3)$ とする．

(3) 行列 A を $P^{-1}AP = D$ として， 対角成分が $D_{11} \geq D_{22} \geq D_{33}$ となるように対角化したとき，$P,\ P^{-1}$ および D を求めよ． ただし，P は直交行列，D は対角行列， D_{ij} は D の第 i 行 j 列の成分とする．

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(5) ベクトル $\boldsymbol{y}(t)$ が， $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t) = -e^{A}\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすとき，$\boldsymbol{y}(t)$ を求めよ．ただし，$\dot{y}(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$ とする．

(筑波大 2020) (m20201302)

0.59 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ．

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを 1 つ求めよ．

(筑波大 2021) (m20211310)

0.60 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように $A^2,\ A,\ I$ の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ．
（設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 $\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

0.61 複素数列 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots)$ を (a_n) と表す．$V = \left\{(a_n) \;\middle|\; a_n \in \mathbb{C}\ \ (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$$
$$\lambda(a_n) = (\lambda a_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$W = \left\{(a_n) \in V \;\middle|\; a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)\right\}$$

とする．また W の元 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ をそれぞれ

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 0$$
$$y_0 = 0,\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 0$$
$$z_0 = 0,\quad z_1 = 0,\quad z_2 = 1$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分空間になることを示せ．

(2) $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ が W の基底になることを示せ．

(3) $F\ :\ W \to W$ を

$$F((a_n)) = (b_n), \qquad b_n = a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定める．F が線形写像であることを示せ．

(4) W の基底 $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ に関する F の表現行列 A を求めよ．

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

(筑波大 2022)　　(m20221315)

0.62 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071409)

0.63 3次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 7 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101401)

0.64 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を1つ求めよ.

(3) $A^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ.

(埼玉大 2013)　　(m20131408)

0.65 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し，適当な正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(信州大 1998）　　(m19981906)

0.66 以下の正方行列 $A_i \ (i = 1, 2, 3)$ それぞれについて，PA_iP^{-1} を対角行列にする正方行列 P が存在するかどうかを答え，存在する場合はそのような P および PA_iP^{-1} を答えよ.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(信州大 2018)　　(m20181909)

0.67 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線形空間とし，$F : V \to V$ を線形写像とする.

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$V(\lambda) = \{x \in V \mid F(x) = \lambda x\}$ は V の部分空間であることを示せ.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ は相異なる複素数とし，各 i に対し，$V(\lambda_i)$ が 0 でない元 x_i を含むとする．このとき，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ は1次独立であることを示せ.

(3) $F^2 = F$ であるとき，F は適当な基底を選べば対角行列で表現できることを示せ．また，F の固有値をすべて求めよ.

(信州大 2020)　　(m20201909)

0.68 $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θ は実数) とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) 行列 P の逆行列 P^{-1} 及び，行列 A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように $\theta \ (0 \leq \theta \leq \pi/2)$ の値を定めよ.

(3) 曲線 $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 2$ の概形を描け.

(新潟大 2000)　　(m20002004)

0.69 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ.

(3) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ とし, $n \geqq 1$ に対して,

$$\begin{cases} x_n &= \quad 5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n &= \ -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する. このとき, 一般項 x_n と y_n を求めよ.

(新潟大 2003) (m20032004)

0.70 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (θは実数) について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように $\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) 曲線 $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12 = 0$ の概形を描け.

(新潟大 2004) (m20042005)

0.71 実数 a に対して, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

は固有値 1 をもつとする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) a の値を求めよ.

(2) A のすべての固有値を求めよ.

(3) 正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものがあれば, そのような P を 1 つ求めよ.

(新潟大 2005) (m20052002)

0.72 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め, A を対角化せよ.

(新潟大 2015) (m20152019)

0.73 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ.

(新潟大 2017) (m20172020)

0.74 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ.

(新潟大 2018) (m20182010)

0.75 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ.

(新潟大 2019) (m20192015)

0.76 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め，A を対角化せよ.

(5) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

(新潟大 2022) (m20222003)

0.77 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき，下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次正方行列 P を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ と P^{-1} を求めなさい．

(3) 自然数 n について，A^n を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172101)

0.78 a を 1 でない実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ とする．下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような 2 次直交行列 P を 1 つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(長岡技科大 2018)　　(m20182101)

0.79 実数 t の実数値関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ についての連立微分方程式

$$(*) \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 + 6x_2 \\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - x_2 \end{cases}$$

を考える．また，$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく．下の問いに答えなさい．

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正方行列 P を一つあげなさい．また，$P^{-1}AP$ を求めなさい．

(3) P を前問 (2) におけるものとし，実数 t の実数値関数 $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

により定める． このとき，$(*)$ を y_1，y_2 についての連立微分方程式に書き換えなさい． また，y_1，y_2 を求めなさい．

(4) x_1，x_2 を求めなさい．

(長岡技科大 2021)　　(m20212102)

0.80 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ が成立するような行列 P と α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた行列 P とある対角行列 B に対し $X = PBP^{-1}$ とおく．$X^2 = A$ が成立するように行列 B を定めよ．

(金沢大 2001)　　(m20012203)

0.81 $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．　(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(金沢大 2007)　(m20072215)

0.82 行列 $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求め，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを与えよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

(金沢大 2009)　(m20092204)

0.83 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大 2011)　(m20112204)

0.84 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & 0 & 0 & -1 \\ \dfrac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{5} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(金沢大 2014)　(m20142205)

0.85 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ついて，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．

(4) $B = (\alpha E - A)(\beta E - A)^{-1}$ とおく．ただし E は 3 次の単位行列，α と β は A の固有値とは異なる実数とする．B を対角化せよ．

(金沢大 2015)　　(m20152205)

0.86　行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる． P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152211)

0.87　$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 4 \\ 16 & 15 & -16 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162227)

0.88　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルをすべて求めなさい．

(2) ある行列 V を用いて，行列 $A' = V^{-1}AV$ を対角行列にすることができる． V と A' を求めなさい．

(金沢大 2017)　　(m20172212)

0.89　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ について　次の問いに答えよ．

(1) ${}^t\!PAP$ が対角行列となるような 3 次の直交行列 P を一つ求めよ．ただし ${}^t\!P$ は P の転置行列を表す．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とおく（${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す）．

集合 $S = \left\{\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ における，$f(\boldsymbol{x})$ の最大値と最小値，およびそれらを与える $\boldsymbol{x} \in S$ をすべて求めよ．

(3) $A^5 - 5A^4 + 2A^3 + 9A^2$ を求めよ．

(金沢大 2018)　　(m20182202)

0.90　行列

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -13 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 3 次の正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものは存在しないことを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192204)

0.91 次の行列が対角化可能であるか調べ，対角化可能ならば，与えられた行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P とそのときの対角行列を 1 組求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(金沢大 2021)　　(m20212205)

0.92 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値，および各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) A が対角化可能であるかどうを調べよ．さらに，A が対角化可能ならば，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(3) 3 次実正方行列 B が $AB = BA$ を満たすとき，B は対角化可能であることを示せ．

(金沢大 2021)　　(m20212206)

0.93 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) A の各固有値に対する固有空間を求めよ．

(3) A が対角化可能の場合は $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を 1 つ求めよ．対角化可能ではない場合はその理由を述べよ．

(金沢大 2022)　　(m20222205)

0.94 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の各問いに答えなさい．

(1) A の固有値を求めなさい．

(2) ある直交行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P を求めなさい．

(金沢大 2022)　　(m20222214)

0.95 次の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ は 2 行 2 列の実数行列，$\boldsymbol{X}$ は 2 行 1 列の実数行列とする．また，${}^t\boldsymbol{X}$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の転置行列を意味する．

(1) $|\boldsymbol{A}| < 0$ のとき，$\boldsymbol{A}$ の固有値が異符号の実数であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{B}$ の成分がいずれも正であるとする．このとき，$\boldsymbol{B}$ の固有値が実数であるとしても正とは限らないことを例を挙げて示せ．

(3) $\boldsymbol{C}$ が対角行列で対角成分がいずれも正であるとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ.

(4) $\boldsymbol{D}$ が 2 つの異なる正の固有値をもち，それらの固有値に対応する固有ベクトルが直交しているとき，任意の $\boldsymbol{X}$ に対して ${}^t\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}\boldsymbol{X} > 0$ が成立することを示せ．必要ならば，直交行列の逆行列と転置行列が等しくなる性質を利用せよ．なお，直交行列とは，互いに直交する大きさが 1 の列ベクトルからなる正方行列である.

(富山大 2017) (m20172304)

0.96 以下の与える行列 A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

について， 次の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 A の対角行列を $\Sigma = U^{-1}AU$ とする．行列 A を対角化する行列 U を求めよ.

(3) 行列 U を用いて対角化した行列 A の対角行列 Σ を求めよ.

(福井大 2014) (m20142427)

0.97 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して $P^{-1}AP = D$ が成立するような正則行列 P および対角行列 D を求めよ.

(岐阜大 2003) (m20032607)

0.98 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ.

(1) 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = (x_1, x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ.

(2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 2 次の直交行列 P を使って，PAP^T が対角行列（Λ とする）となるようにしたい．ただし，^{T} は, 転置行列を表す．直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ.

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない，(y_1, y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい.

(5) (4) の図形の中に，(x_1, x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい.

(岐阜大 2005) (m20052613)

0.99 次の行列 A に対して以下の問いに答えよ． $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(1) A の二つの固有値とそれぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) A を対角化する行列 P，つまり，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求めよ.

(3) 次の連立微分方程式を解け． $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ ， $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$

(岐阜大 2007) (m20072612)

0.100 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を 1 つ求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$，$a_2 = 5$，$a_3 = 1$,

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \qquad (n \geq 1)$$

で定義する．このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列 B を求めよ．

(4) 一般項 a_n を求めよ．

(岐阜大 2014) (m20142602)

0.101 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列を考える．以下の問に答えよ．

(1) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

[ア] N の行列式を求めよ．

[イ] N の固有値を求めよ．

[ウ] ある自然数 k に対して，$A^k = O$ となるような行列 A を冪零（べきれい）行列という．N が冪零行列であることを示せ．

(2) 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列で，以下の [い]〜[り] であるものを，それぞれ一つずつ挙げよ．ただし，同じものを二度挙げてはならない．

[い] 零行列 [ろ] 単位行列 [は] 直交行列 [に] 対称行列 [ほ] 対角行列 [へ] 上三角行列
[と] 下三角行列 [ち] 固有値がただ一つの行列 [り] 固有値が純虚数である行列

(3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．M が対角化できないことを示せ．

(4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．任意のベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して，

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = (\vec{x},\ A\vec{x}) > 0$$

を満たすような行列 A を正定値行列という．L が正定値行列であることを示せ．

(岐阜大 2020) (m20202605)

0.102 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000) (m20002708)

0.103 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ．

(1) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ を解いて, $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 行列 A の 3 つの固有値 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ と, 対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ を求めよ. ただし, 固有ベクトルは, 第 3 成分が 1 となるようにして示せ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ. そして, $P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(名古屋大 2005)　　(m20052801)

0.104 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ とする.

(1) A の 2 つの固有値 α, β $(\alpha>\beta)$ を求めよ.
また，対応する固有ベクトルを $\begin{bmatrix} z \\ 1\end{bmatrix}$ の形で求めよ（z の値のみで良い）.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を求めよ．また，$P^{-1}AP$ も求めよ.

(3) $\gamma_n=\alpha^n-\beta^n$ とする．A^n を γ_{n-1} , γ_n , γ_{n+1} で表せ.

(名古屋大 2006)　　(m20062801)

0.105 (1) 行列 $A=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(3) 二つの関数 $x(t)$, $y(t)$ が次の微分方程式を満たすとする.

$$\begin{pmatrix} x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\ ,\quad \begin{pmatrix} x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$$

この時，$P^{-1}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} X(t)\\ Y(t)\end{pmatrix}$ はどんな微分方程式を満たすか.

(4) (3) の $X(t)$, $Y(t)$ の微分方程式を解き $\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ を求めよ.

(名古屋工業大 1998)　　(m19982908)

0.106 対称行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．更に，行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ.

(名古屋工業大 2000)　　(m20002905)

0.107 次の行列 A が対角化可能である必要十分条件は $a\neq b$ であることを示し，対角化可能な場合に $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2001)　　(m20012906)

0.108 次の行列 A は対角化可能かどうか判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求めよ.　$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(名古屋工業大 2007)　　(m20072904)

0.109 3 次の正方行列 A を $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 $P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ で各列ベクトル $\boldsymbol{p}_i$ の長さが 1 となる行列 P をひとつ求めよ.

(2) (1) で求めた P の転置行列を ${}^tP$ とする． この時 ${}^tPP = E_3$（E_3 は単位行列）を示し，さらに $P^{-1} = {}^tP$ となる事を示せ.

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $({}^tP\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, P\boldsymbol{b})$ が成り立つ性質を用いて，$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とした時に，次の等式を示せ.

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (({}^tPAP)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}))$$

(4) $\boldsymbol{x}$ の成分を $x_i(i = 1, 2, 3)$ とした時，x_1, x_2, x_3 の 3 つの一次式 $f_i(x) = f_i(x_1, x_2.x_3)(i = 1, 2, 3)$ があり，$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = f_1(x)^2 - f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ となる事を示せ.

(名古屋工業大 2008)　　(m20082902)

0.110 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 13 & -7 \\ -2 & 9 & -4 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

を対角化せよ．(すなわち，正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．)

(名古屋工業大 2013)　　(m20132906)

0.111 次の実対称行列 A に対し，実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020)　　(m20202906)

0.112 次の 2 つの行列 A, P について, P が逆行列をもち, $B = P^{-1}AP$ が対角行列 B となるように, 実数 x, y, α, β の値を求めなさい． ただし, $\alpha > \beta$ とする.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

（三重大 2004）　　(m20043113)

0.113 (1) A を N 行 N 列の実対称行列，すなわち，${}^tA = A$（${}^tA$ は A の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき，A の固有値 $a_i\ (i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ と各 a_i に対する固有ベクトル $\vec{v}_i$ について以下のことを示せ.

(a) 固有値はすべて実数である.

(b) $a_i \neq a_j$ ならば，$\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ は直交する．すなわち，内積 $(\vec{v}_i\,, \vec{v}_j) = 0$．[ただし，$\vec{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(a) 固有値の和と積を求めよ.

(b) B を対角化する行列，すなわち，UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ.

(三重大 2013)　　(m20133117)

0.114 x, y に関する実数値関数 $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい.

(1) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい.

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい.

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x,y)$ を変換した結果得られる $g(u,v)$ を求めなさい．また，$g(u,v) = 4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい.

(三重大 2017)　　(m20173108)

0.115 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) A の逆行列を求めなさい.

また，それを利用して x, y に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を解きなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を求めなさい.

また，それを利用して $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めなさい．ここで，n は自然数とする.

(三重大 2018)　　(m20183105)

0.116 次の 2 行 2 列の行列 $F(\theta)$ について以下の問に答えよ.

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) $F(\theta)$ について次の関係が成立することを示せ.

$$F(\theta_1)F(\theta_2) = F(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) 行列 A を次の 2 行 2 列の行列であるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $F(-\theta)AF(\theta)$ が対角行列 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形になる θ の値と, そのときの対角要素 λ_1 , λ_2 を求めよ.

(奈良女子大 2005)　　(m20053204)

0.117 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ. なお, 固有ベクトルは規格化すること.

(4) 行列 A は, 直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより, 対角行列 B に変換することができる.

$$B = V^T A V$$

行列 V と B を求めよ.

(奈良女子大 2012) (m20123205)

0.118 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような適当な P を選べ.

(京都大 1995) (m19953304)

0.119 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad T^T \cdot A \cdot T = D$

とするとき, 直交行列 T と対角行列 D を一組求めよ. また, $A = B^2$ となる正方行列 B を一組求めよ.

(京都大 1996) (m19963304)

0.120 n 行 n 列の行列 A が対角化可能とは, ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1}, および, ある対角行列 Λ を用いて

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

と表現できることである.

(1) 対角化可能な行列 A があるとき, これを対角化する手順について説明せよ.

(2) 次で与えられる 3 行 3 列の行列 A を実際に対角化し, 行列 P と対角行列 Λ を与えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(京都大 2002) (m20023303)

0.121 行列 $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 \\ -t+1 & t \end{pmatrix}$ とする.

(1) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(2) $C^{-1}AC$ が対角行列となるような正則行列 C, および, そのときの対角行列 $C^{-1}AC$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ. ただし, n は正の整数である.

(大阪大 2001) (m20013505)

0.122 行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として, 以下の設問に答えよ. ただし a, b は実数である.

(1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ. また, 固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. また, 2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に, $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ. また, A^n を求めよ. ただし n は正の整数である.

(4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり, かつ, 零ベクトルではない 2 次元ベクトル x に対して

$$^{t}xAx > 0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ. ここで ^{t}x は x の転置ベクトルを表す.

(大阪大 2005) (m20053506)

0.123 2 次元平面上の点 $A(1,0)$ を点 $A'(a,1-b)$ に, 点 $B(1,1)$ を点 $B'(a+b,1+a-b)$ に移す 1 次変換を f とする. ただし, a,b は実数とする. また, f を表す行列を F とする.

(1) 行列 F を a と b を用いて表せ.

(2) 行列 F の固有値を求めよ. また, 2 つの固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(3) 行列 F の 2 つの固有値が異なる実数値となる場合に, $P^{-1}FP$ を対角行列とする正則行列 P, 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ. ただし, 正則行列 P の列ベクトルの長さは 1 とする. ここで P^{-1} は行列 P の逆行列である.

(4) (3) で求めた正則行列 P の列ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ.

(5) 原点 $(0,0)$ 以外の任意の点を X とする. また, 点 Y は, 点 X が 1 次変換 f によって移された点とする. 原点 $(0,0)$ から X までの距離, および Y までの距離を, それぞれ d_X, d_Y とする. ここで a と b は (4) で求めた必要十分条件を満たし, 定数とする. また, 点 X は自由に選べるものとする. このとき, 2 つの距離の比 d_Y/d_X の最大値を a と b を用いて表せ.

(大阪大 2010) (m20103506)

0.124 次の 2 次曲線 (a) について以下の設問に答えよ.

$5x^2 + 2xy + 5y^2 + c = 0 \cdots\cdots$ (a)

(1) $\boldsymbol{x} = (x,y)^T$ として, 式 (a) を $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + c = 0$ の形で表すときの対称行列 A を示せ. ただし, T は転置を表す.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P とそのときの対角行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ. ただし, 正則行列の列ベクトルの大きさは 1 とする.

(4) $\boldsymbol{x}' = (x',y')^T$ として設問 (3) の正則行列 P を用いて $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ で式 (a) を座標変換して得られる $\boldsymbol{x}'^T B\boldsymbol{x}' + c = 0$ の概形を x' 軸, y' 軸と共に描け. ただし, $c = -12$ とする.

(大阪大 2014) (m20143502)

0.125 次の実二次形式について, 以下の問いに答えよ. $2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

(1) この二次形式の係数を要素とする対称行列を A とするとき, 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 直交行列 T を選んで, $T'AT$ が対角行列となるような T を定めよ. ただし, T' は T の転置行列である.

(3) この二次形式を直交変換により標準形にせよ.

(大阪府立大 2007)　　(m20073603)

0.126 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) A の各固有値に対する固有空間の基底を 1 組ずつ求めよ.

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(大阪府立大 2018)　　(m20183609)

0.127 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，内積は標準内積とする.

(1) A のすべての固有値を求めよ.

(2) 固有値 0 に対する A の固有空間の正規直交基底を求めよ.

(3) 行列 A を対角化する直交行列 P を 1 つ求め，対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(大阪府立大 2019)　　(m20193610)

0.128 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

また $T^{-1}AT$ が対角行列になるような正則行列 T は存在するか．存在するならそれを求め，存在しないならその理由を述べよ.

(神戸大 2000)　　(m20003804)

0.129 A を，対角成分 $a_1, \cdots, a_n$ が相異なる n 次実対角行列とする．このとき $AX = XA$ を満たす $n \times n$ 実行列 X をすべて求めよ.

(神戸大 2003)　　(m20033808)

0.130 2 次の正方行列 $A = \begin{bmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$ に関する以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(3) A を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = B$ となるような正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ.

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ.

(神戸大 2007)　　(m20073811)

0.131 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$（単位行列）をみたす実正方行列を直交行列という.

(神戸大 2010) (m20103801)

0.132 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ と固有空間 $W(\lambda; A)$ を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を 1 つ求めよ．なお，${}^tPP = E$（単位行列）を満たす実正方行列 P を直交行列という.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対して，A^n のトレース $\mathrm{Tr}\, A^n$ を計算せよ.

(神戸大 2016) (m20163801)

0.133 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対して固有ベクトル空間を求めよ.

(3) $B = P^{-1}AP$ となるような直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2018) (m20183801)

0.134 正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ.

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ.

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ.

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ.

(神戸大 2020) (m20203802)

0.135 実数 a, b に対し 3 次実正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

を考える．このとき，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) A が相異なる 3 つの固有値をもつための a, b の条件を求めよ.

(3) (2) の条件が成り立つとき，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．また，そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

(神戸大 2021)　　(m20213801)

0.136 a を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P が存在するための必要十分条件を，a を用いて表せ.

(2) (1) の条件が成り立つとき，$B = P^{-1}AP$ となる直交行列 P と対角行列 B の組を一つ求めよ.

(神戸大 2022)　　(m20223806)

0.137 行列 A とベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{u}$ は A の固有ベクトルであることを示せ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 3 次正方行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 上記の P に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} P^{-1}A^nP$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ.

(神戸大 2023)　　(m20233801)

0.138 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) A の逆行列を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(岡山大 2012)　　(m20124003)

0.139 3 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = {}^t\!AA$$

により与えられる．ここで，${}^t\!A$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) A および B の行列式を計算せよ.

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ.

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.140 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005)　　(m20054105)

0.141 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化せよ．すなわち，$P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P および対角行列 D を一組求めよ.

(広島大 2013)　　(m20134103)

0.142 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ.

(1) A が正則行列であることを示し，A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) A のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(3) 3 次正則行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列になるものを一つ求め，さらにそのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ.

(4) $B = A^{-1} + A^2 + A^3$ とおく．B のすべての固有値を求め，さらにそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを一つずつ求めよ.

(広島大 2021)　　(m20214102)

0.143 複素数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合を $M(2, \mathbb{C})$ で表す．E_2 を 2 次の単位行列とする. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対し，A の随伴行列 A^* を

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

により定める．ただし，複素数 z に対し $\bar{z}$ は z の複素共役を表す．また

$$H(2) = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$
$$U(2) = \{A \in M(2,\mathbb{C}) \mid P \text{ は正則で} \quad P^{-1} = P^*\}$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $A \in H(2)$ とする．A の固有値は実数であることを示せ．

(2) $A \in H(2)$ とする．A がただ一つの固有値をもつならば，ある実数 λ が存在して $A = \lambda E_2$ となることを示せ．

(3) $A \in H(2)$ は異なる二つの固有値をもつとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとするとき，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，(,) は $\mathbb{C}^2$ の標準エルミート内積である．

(4) $A \in H(2)$ に対し，ある $P \in U(2)$ が存在して P^*AP が対角行列となることを示せ．

(広島大 2021)　　(m20214104)

0.144　次の対称行列について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ．

(3) ${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ．(${}^tP$ は P の転置行列を表す)

(広島市立大 2005)　　(m20054203)

0.145　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、次の問に答えよ．

(1) 固有値，固有ベクトルの組を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ とおく．列ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を並べてできる行列 $P = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ が直交行列であることを示せ．

(3) (2) の P に対して，P^tAP が対角行列であることを示せ．(ただし，P^t は P の転置行列を表すものとする．)

(広島市立大 2006)　　(m20064205)

0.146　次の行列 A に対し，以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となるものを求めよ．なお，P^{-1} も求めること．

(3) n を正の整数とするとき，A^n を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074205)

0.147　次の行列 A に対して，以下の問いに答えよ．　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の固有値の 1 つが 2 であるとき，a を求めよ．

(1) で求めた a に対して，以下の (2),(3),(4) の問いに答えよ．

(2) A の固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各固有値に対する，A の固有ベクトルを求めよ．

(4) 正則行列 P で，$P^{-1}AP$ が対角行列となる P を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084203)

0.148 次の 3 次正方行列 A に対し, 以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P, およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(広島市立大 2010)　　(m20104205)

0.149 次の 3 次正方行列 A について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトル空間の基底をそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P およびそれに対応する D を求めよ．

(4) 問 (3) で求めた D に対し，D^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(5) A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

(広島市立大 2011)　　(m20114204)

0.150 次の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ．

(4) (3) で求めた P に対し，P^{-1} を求めよ．

(5) (3) で求めた P に対応する D を示せ．

(広島市立大 2012)　　(m20124205)

0.151 次の 3 次正方行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の各固有値に対応する固有ベクトルをそれぞれ求めよ.

(3) $D = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を求めよ.

(4) 問 (3) で求めた P に対応する D を示せ.

(広島市立大 2013)　　(m20134204)

0.152　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ について答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ. ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2006)　　(m20064401)

0.153　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 固有値を求めよ.

(2) 各固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 P を求めて ${}^tPAP$ を対角行列にせよ. ここで, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(徳島大 2013)　　(m20134401)

0.154　$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) J のすべての固有値を求めよ.

(2) J の異なる固有値に対して, それぞれの固有空間の基底を求めよ.

(3) J は対角化可能かどうか, 理由をつけて答えよ. また 対角化可能である場合には, $P^{-1}JP$ が対角行列となるような P を求めよ.

(高知大 2013)　　(m20134504)

0.155　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $A = PDP^{-1}$ を満たす正則行列 P とその逆行列 P^{-1}, および対角行列 D を求めよ.

(3) 正の整数 n に対し, A^{2n} を求めよ.

(高知大 2013)　　(m20134505)

0.156　A, B を 3 次実対称行列とする. 一般に, ${}^tP$ は行列 P の転置行列を表わすものとする.

(1) ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在するなら, $BA = AB$ であることを示せ.

(2) A の固有値がすべて等しいなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(3) $BA = AB$ であるなら，${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ．

(九州大 2010)　　(m20104706)

0.157 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ．

(九州大 2012)　　(m20124709)

0.158 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を一つ求めよ．

(九州大 2014)　　(m20144709)

0.159 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値，および，それぞれの固有値に属する固有空間の基底を一組ずつ求めよ．

(2) A を直交行列により対角化せよ，すなわち，$P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，$P^{-1}AP$ がどのような対角行列となるかを表示せよ．

(九州大 2019)　　(m20194707)

0.160 A, B, Q を n 次実正方行列とし，A は正則行列で，Q は対称行列であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，必要ならば，実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい．

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ．

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば，AB も D に対角化可能であることを示せ．

(3) $A = Q^2$ かつ B が対称行列であるとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で，B は対称行列であるとする．このとき，AB は対角化可能で，かつその固有値はすべて実数であることを示せ．

(九州大 2021)　　(m20214711)

0.161 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．a, b は実数である．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値が 2 つの異なる実数で得られることを示せ．

(2) 以下に示す行列 P を用いると $P^{-1}AP$ は対角行列となった．このとき，a, b の満たすべき条件を示せ．

$$P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

(九州大 2022) (m20224708)

0.162 F の直交行列 P を求めて，$P^{-1}FP$ を対角行列にする．

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

以下の手順に従って求めよ．

(1) F の固有値を求め，

(2) 長さ 1 の固有ベクトルを求め，

(3) 直交行列 P を求め，

(4) 対角行列 $P^{-1}FP$ を求めよ．

(佐賀大 2003) (m20034930)

0.163 次の問に答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

(2) 行列 A を対角化せよ．

(3) (2) で得られた対角行列を B とすると $P^{-1}AP = B$（ただし P は正則行列）の関係が成り立つ. この関係を利用して A^n を求めよ．

(佐賀大 2005) (m20054926)

0.164 行列 $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ．

(1) A の固有方程式を求めよ．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

(3) A の固有値 λ_1, λ_2 に対する各々の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を求めよ．

(4) A を対角化したときの対角行列 $B(= P^{-1}AP)$ および正則行列 P を求めよ．

(5) A^n（n：自然数）を求めよ．

(佐賀大 2010) (m20104921)

0.165 3 次正方行列 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) B の固有値と，それぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ．

(2) PBP^{-1} が対角行列となるような 3 次正則行列 P を求めよ．

(佐賀大 2012)　　(m20124906)

0.166 次の行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ．

(3) $A^n = PXP^{-1}$ となるような行列 X を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(佐賀大 2013)　　(m20134909)

0.167 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．さらに，対角行列 $P^{-1}AP$ も書け．

(佐賀大 2014)　　(m20144908)

0.168 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & 2 \end{bmatrix}$ について，固有値の 1 つが $\lambda = 1$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) α の値を求めよ．

(2) 残りの固有値を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，行列 P とその逆行列 P^{-1} をそれぞれ求めよ．

(佐賀大 2016)　　(m20164913)

0.169 次の 2 次正方行列に関する以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) ある直交行列 P に対して ${}^tPAP = B$ が対角行列になるとき，対角行列 B を求めよ．
ただし，${}^tP$ は P の転置行列である．

(3) $\boldsymbol{x}$ を 2 次元実ベクトルとして，

$$\max_{||x||=1} ||A\boldsymbol{x}|| = \max_{||x||=1} ||B\boldsymbol{x}||$$

を示し，その値を求めよ．

(佐賀大 2022)　　(m20224912)

0.170 (1) 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(d) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，A の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ.

(e) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda = AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ.

(2) A を $n \times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．A が相異なる n 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} \geq 0$ を示せ.

(佐賀大 2022)　　(m20224918)

0.171　次の行列 A について, 以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 行列 A の固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A を以下のように

$$B = P^{-1}AP$$

対角化する行列 P と対角行列 B を求めよ.

(長崎大 2005)　　(m20055009)

0.172　2 次の対称な正方行列 $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，行列 A と 2 次元のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，2 次式 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \boldsymbol{v}^T A\,\boldsymbol{v}$ と定義する．ただし，記号 T は，行列やベクトルの転置を示し，$\boldsymbol{v}^T$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を示すものとする.

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい.

(2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し，$U^T AU = D$ と表現する．ただし，D は 2 次の対角行列とする．行列 U と D を求めなさい.

(3) (2) の結果を利用して，$f(x, y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい.

(大分大 2012)　　(m20125108)

0.173　3 次の実正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 3 次の正則行列 P を 1 つ求めよ.

(熊本大 2004)　　(m20045204)

0.174　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる.

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい.

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される.

$$A^n = \underbrace{AAA \cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0$，$a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(熊本大 2020)　　(m20205203)

0.175 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，次の各問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 適当な直交行列 P により，$P^{-1}AP$ は対角行列となる．そのような直交行列 P を 1 つ求めよ.

(宮崎大 2022)　　(m20225301)

0.176 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ と与えられているものとする．このとき，以下の問題に答えなさい.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の 2 つの固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化しなさい．すなわち，下の関係を満たす正則行列 P と対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ を求めなさい．もし，対角化が不可能な場合はその理由を述べなさい.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$$

(3) $\boldsymbol{A}^{10}$（すなわち $\boldsymbol{A}$ の 10 乗）を求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085506)

0.177 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と各々の固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような，正則な正方行列 P を求めよ．ただし, 行列 P は直交行列（逆行列と転置行列が等しい行列）とする.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115508)

0.178 以下の行列 A は，適当な正則行列 P を用いて $P^{-1}AP = B$ のように相似変換し，行列 B を対角行列にすることができる．対角行列となる B を求めよ．また，P の一例を示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(香川大 2022)　　(m20225706)

0.179 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ.

(2) 固有値 λ_1, λ_2 それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を, 長さ 1 となるように求めよ.

(3) 設問 (2) で求めた $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を列ベクトルとみなして構成された行列 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \ \ \boldsymbol{p}_2)$ と, その逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角行列に変換せよ.

(島根大 2005)　　(m20055815)

0.180 (1) 次の行列 A の固有値と, それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルを大きさが 1 になるように規格化すること.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 設問 (1) の行列 A に対し, ${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ. ただし, ${}^tP$ は P の転置行列を表す.

(島根大 2010)　　(m20105807)

0.181 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を求めよ.

(島根大 2017)　　(m20175803)

0.182 行列 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき.

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値及び固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような, 行列 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ を求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^k$ を求めよ.

(首都大 2003)　　(m20035903)

0.183 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{C}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(3) 行列 $\boldsymbol{C}^n$ を求めよ.

(首都大 2007)　　(m20075902)

0.184 行列 A を $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ とするとき, 以下の問いに答えなさい.

(1) A の固有値をすべて求めなさい.

(2) A の各固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(首都大 2012)　　(m20125903)

0.185 行列 A について下記の (1),(2),(3) に答えなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) すべての固有値とそれぞれの固有値の固有ベクトルをすべて求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と $P^{-1}AP$ を求めなさい.

(3) A^5 を求めなさい.

(首都大 2016)　　(m20165902)

0.186 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ につて，以下の問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P とその逆行列を求め，行列 A を対角化しなさい.

(3) A^n を求めなさい．ただし，n は任意の自然数とする.

(首都大 2019)　　(m20195902)

0.187 行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい.

(1) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P をひとつ示し，A を対角化しなさい.

(3) A^n を求めなさい．ただし，n は任意の自然数とする.

(東京都立大 2020)　　(m20205902)

0.188 2 行 2 列の行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ が与えられているとする.

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，^{T} は，行列の転置を表す.

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ.

(2) P^TAP が対角行列となる直交行列 P を求めよ.

(3) 行列 A の固有値を λ_1，λ_2 とするとき，以下のすべての条件を満たす 2 行 2 列の行列 B, C を求め，以下の条件を満足していることを示せ.

(a) $A = \lambda_1 B + \lambda_2 C$

(b) $B = B^T$，$C = C^T$

(c) $BC = CB = \boldsymbol{O}_{2\times 2}$，なお，$\boldsymbol{O}_{2\times 2}$ は，すべてのの要素が 0 の 2 行 2 列の行列を表す.

(d) $B^2 = B$, $C^2 = C$

(東京都立大 2020)　　(m20205908)

0.189 以下の問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とする．A が正則行列かどうか調べ，正則ならば A^{-1} を求めよ．

(2) $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ とする．

(a) B の固有値および固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルの第 1 成分が 1 となるようにせよ．

(b) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような P，およびそのときの $P^{-1}BP$ を求めよ．

(宇都宮大 2004)　　(m20046101)

0.190 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) A の階数 rank A を求めよ.

(2) A の核 Ker(f) の基底を求めよ.

(3) 行列 A とその転置 ${}^t\!A$ の積 $A\,{}^t\!A$ が対角化可能かどうか調べ，対角化可能なら $P^{-1}A\,{}^t\!AP$ が対角行列となるような直交行列 P を求めよ.

(はこだて未来大 2021)　　(m20216301)

0.191 i は虚数単位とする．3 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1-i & 1+i \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対し固有空間の基底を求めよ.

(3) 行列 A が対角化可能かどうか調べよ．さらに，対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P と P^{-1} を求めよ.

(はこだて未来大 2022)　　(m20226301)

0.192 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ.

(東京海洋大 2021)　　(m20216407)

0.193 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，$B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P と対角行列 B を求めよ．

(東京海洋大 2022)　　(m20226402)

0.194 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値を α, β とし，α と β に対する固有ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{x} = k\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$,　$\boldsymbol{y} = h\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ $(h \neq 0)$ とするとき，次の問 1〜問 4 に答えよ．

ただし，$\alpha > \beta$ とする．

問 1 α, β を求めよ．

問 2 a, b を求めよ．

問 3 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P をひとつ求めよ．

問 4 次式が成り立つように a_n を求めよ．

$$A^n = \begin{bmatrix} 2a_n - 1 & -a_n + 1 \\ 2a_n - 2 & -a_n + 2 \end{bmatrix}$$

(和歌山大 2022)　　(m20226501)