[選択項目] 年度：1991～2023 年　文中：体積

0.1 次の問いに答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$ について, 次の問に答えよ.

(a) 楕円の内部の面積を求めよ.

(b) x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

(c) y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を求めよ.

（岩手大 2004）　(m20040302)

0.2 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ の内部と円柱 $x^2+y^2=ax$ の内部の共通部分を考える．ただし，a は正の定数とする．次の問いに答えなさい.

(1) 球 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ を図示しなさい.

(2) 極座標 (r,θ) を用い $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおいて，球および円柱の方程式を表しなさい.

(3) 共通部分の体積を求めなさい.

(岩手大 2008)　(m20080304)

0.3 球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ.

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ ～ $\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい.

直交座標 (x,y,z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は, $\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z=\boxed{\text{（イ）}}$ で表される.

その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる.

$$V=2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\,dxdy\cdots\cdots\cdots ①$$

極座標 $(r,\,\theta)$ を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z=\boxed{\text{（カ）}}$ で表される.

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい.

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい.

(岩手大 2012)　(m20120303)

0.4 次の立体について，以下の問いに答えなさい.

曲面 $x^2+y^2=z^2$, 平面 $z=0$, 平面 $z=1$ で囲まれた立体

(1) この立体を図示しなさい.

(2) この立体の体積 V は，次の重積分で表せる. $\boxed{\text{(ア)}}$, $\boxed{\text{(イ)}}$ にあてはまる式を答えなさい.

$$V=\iint_D\left(1-\boxed{\text{(ア)}}\right)dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\boxed{\text{(イ)}}\right\}$$

(3) (2) の重積分を極座標になおして，この立体の体積を求めなさい.

(岩手大 2014)　　(m20140303)

0.5 曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2$ $(a>b>0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$ から $\boxed{\text{（エ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\text{（ア）}}$ 及び $\boxed{\text{（イ）}}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\text{（ウ）}}$ 及び $\boxed{\text{（エ）}}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\text{（オ）}}$ から $\boxed{\text{（キ）}}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\text{（オ）}}\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\text{（カ）}}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z\geqq 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\text{（キ）}}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V=2\iint_{D_1}\boxed{\text{（キ）}}\,dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.6 2 つの曲線 $y=\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$,　$y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とその曲線によって囲まれた図形 S について，次の問いに答えなさい．

(1) 2 つの曲線を図示し，また図形 S を斜線で図示しなさい．

(2) 2 つの曲線の交点の x 座標を求めなさい．

(3) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい．

(岩手大 2016)　　(m20160304)

0.7 (1) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ のとき, 行列 $J=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}$ と, その行列式 (determinant) を計算せよ.

(2) 積分 $I=\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$ を計算せよ. ただし,R は正の定数で,D は領域 $x^2+y^2\leqq R^2$ を表す. 必要ならば問題 (1) の変数変換を用いよ.

(3) 半径 R の球の体積 V を, 上の問題 (2) の積分 I を用いて表せ. 理由も簡潔に述べること.

(秋田大 2005)　　(m20050406)

0.8 原点と点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ を頂点とする空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の立方体を，行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ で変換する．変換後の体積を求めよ．また，A は逆行列をもつか，簡潔な理由を添えて答えよ．

(秋田大 2006)　　(m20060402)

0.9 xyz 空間内の，次の不等式を満たす部分を G とする．

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq x(a-x),\ 0 \leq z \leq by^2$$

ただし，a,b は正数とする．次の問いに答えよ．

(1) G を平面 $x=\dfrac{a}{2}$ で切ったとき，切り口の面積を求めよ．

(2) G の体積 V を求めよ．

(3) a と b に関係 $b=e^{-7a}$ があるとき，V を最大にする a の値を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940501)

0.10 次の問いに答えよ．

(1) $\sin^4\theta\ \cos^2\theta = a_0+a_2\cos 2\theta+a_4\cos 4\theta+a_6\cos 6\theta$ とおくとき，a_0 , a_2 , a_4 , a_6 を定めよ．

(2) 変数変換 $x=a\sin^2\theta \quad (a>0)$ を用いて，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}dx$$

(3) 円柱 $(x-a)^2+(y-a)^2 \leq a^2$ が，2 平面 $z=ax,\ z=-ax$ により切り取られる部分の体積を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

(東北大 1995)　　(m19950501)

0.11 原点 $\boldsymbol{O}(0,0,0)$ を中心とする半径が 1 の球（単位球）に内接する正四面体を考える． 球の中心から各頂点 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ に至る 4 本のベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}},\overrightarrow{\boldsymbol{OB}},\overrightarrow{\boldsymbol{OC}},\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}$ とし，$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ を z 軸に，$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$ を xz 平面に置き， その 4 本の内, 任意の 2 本のベクトルのなす角度を θ とする． この時, 各ベクトルの成分は
$\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}=(0,0,1)$,　$\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}=(-\sin\theta,0,\cos\theta)$,　$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,-\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$,
$\overrightarrow{\boldsymbol{OD}}=(\sin\theta\cdot\cos 60^\circ,\sin\theta\cdot\sin 60^\circ,\cos\theta)$　と表せる．

(1) $\cos\theta$, $\sin\theta$ の値を求めよ．

(2) 単位球と頂点 $\boldsymbol{B}$ で接する平面の方程式を求めよ．

(3) 正四面体の 1 辺の長さを求めよ．

(4) 正四面体の体積を求めよ．

（東北大 2004）　　(m20040503)

0.12 円柱面 $x^2+y^2=ax$ と球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ で囲まれ, 不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ を満たす領域を R として, 次の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．

(2) 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のヤコビアン $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ．

(3) 領域 R の体積 V を求めよ．

(東北大 2006)　　(m20060501)

0.13 x と y を実数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$ と定義する．
不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$，$0 \leqq z \leqq f(x,y)$ で表される領域を R として，以下の問に答えよ．

(1) 領域 R の概形を描け．

(2) 領域 R の体積を求めよ．

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z=f(x,y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.14 直交座標系 (x,y,z) において，点 O,A,B,C,D の座標がそれぞれ $O(0,0,0)$, $A(2,2,-4)$, $B(3,5,-2)$, $C(5,1,-3)$, $D(0,0,-6)$ で与えられるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA, OB, OC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V を求めよ．

(2) 3 辺 A, B, C を通る平面 P の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた平面 P を接平面とし，2 点 O, D を通る球の方程式を求めよ．

(4) 点 A を x 軸の回りに回転した後，平面 Q ： $\sqrt{2}x+y+3z=2$ に直交する方向へ移動することにより，点 O に移すことを考える．この場合の x 軸回りの回転角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と平面 Q に直交する方向の移動量 L を求めよ．

(東北大 2009)　　(m20090501)

0.15 x を実数とし， 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^nf}{dx^n}=\left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3) 曲線 $y=f(x)$ $\left(区間\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.16 点 $P(0,-1)$ を通る直線と曲線 C ： $y=-x^2+2x$ が 2 点 Q, R で交わるとき，以下の問いに答えよ．ただし，点 Q の x 座標を a として，$0<a<2$ とする．

(1) 点 Q, R それぞれにおける曲線 C の接線 ℓ_Q , ℓ_R の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 ℓ_Q , ℓ_R の交点の軌跡を求めよ．

(3) (2) の交点が第 1 象限にあるとき，y 軸，曲線 C，接線 ℓ_Q および (2) で求めた軌跡で囲まれた領域を図示し，この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求める積分の式を示せ．

(東北大 2012)　　(m20120503)

0.17 xy 平面上の点 P の座標が実数 t の関数として次の式で与えられる．

$$\begin{cases} x(t)=\sin t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$$

ここで，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で点 P の描く曲線を C とする．
このとき，以下の問に答えよ．

(1) $t = \dfrac{\pi}{3}$ における点 P の座標，およびその点における曲線 C の接線の傾きを求めよ．

(2) 曲線 C と x 軸によって囲まれる領域の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 C が x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2013)　　(m20130502)

0.18 xyz 空間の曲面 $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ について，以下の問に答えよ．ただし，a, b, c は正の実数とする．

(1) 曲面 $f(x,y,z) = 0$ が囲む体積 V を求めよ．

(2) 点 $P(1,2,3)$ が曲面 $f(x,y,z) = 0$ 上の点となるとき，a, b, c が満たす式を求めよ．

(3) 曲面 $f(x,y,z) = 0$ 上の点 $P(1,2,3)$ における接平面 π_P および法線 n_P の式を求めよ．

(4) (2) の条件下で，(1) の体積 V が最小となる a, b, c の値を求めよ．

(東北大 2015)　　(m20150504)

0.19 (1) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\right\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy$ の値を求めよ．

(2) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq y \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\right\}$ の体積を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160507)

0.20 xyz 空間の曲面 $\boldsymbol{S} : (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4z$ および平面 $\boldsymbol{P} : z = a(x+y+2)$ について，以下の問に答えよ．ただし，a は正の実数とする．

(1) 平面 $y = -1$ と曲面 $\boldsymbol{S}$ の交線の方程式を求め，図示せよ．

(2) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ の交線 $\boldsymbol{C}$ を考える．$a = 1$ のとき，$\boldsymbol{C}$ を xy 平面に投影した曲線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が一点で接するときの a の値と接点の座標を求めよ．

(4) $a = 1$ のとき，曲面 $\boldsymbol{S}$ と平面 $\boldsymbol{P}$ が囲む領域の体積を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170502)

0.21 n 次元における半径 r の “球” の “体積” を考えましょう．3 次元においては半径 r の球の体積は，原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です．3 次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，1 次元における半径 r の “球” の “体積” は，原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，2 次元における半径 r の “球” の “体積” は，原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では 4 次元において，「半径 r の “球” の “体積”」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 n でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998)　　(m19980601)

0.22 以下に与えられる 3 行 3 列の行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

また，xyz 座標系の基底ベクトルを $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ と表す．

$$\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $A\overrightarrow{e_x}$，$A\overrightarrow{e_y}$，および $A\overrightarrow{e_z}$ を計算せよ．

(2) 行列式 $detA$ を計算せよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) 基底ベクトル $\overrightarrow{e_x}$，$\overrightarrow{e_y}$，および $\overrightarrow{e_z}$ を三辺とする立方体を考える．変換 A によって，その体積は何倍に変換されるか．

（お茶の水女子大 2001）　　(m20010610)

0.23 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ を S とする．S に $(\pm\ 1, \pm\ 1, \pm\ 1)$ で内接する立方体を U とする．ただし，符号はすべての組み合わせをとる．曲面 S で囲まれた領域から立方体 U を除いた領域を V とする．領域 V に対する積分

$$I = \int_V (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めたい．以下の問いに答えよ．

(1) 立方体 U に対する積分

$$J = \int_U (x^2+2y^2+3z^2)dx\,dy\,dz$$

を求めよ．

(2) 球 $W : x^2+y^2+z^2 \leq 1$ に対する積分

$$K = \int_W (x^2+y^2+z^2)dx\,dy\,dz$$

を極座標 $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta)$ を用いて求めよ．体積素片に対して，$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ が成立することを利用してよい．

(3) 上の (1) と (2) を利用して，積分 I を求めよ．

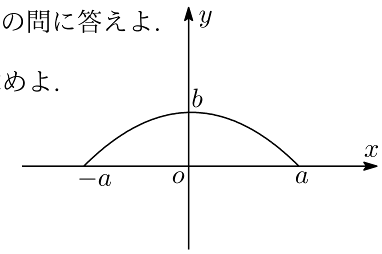
(東京大 2000)　　(m20000702)

0.24 図の曲線は点 $(0, b)$ を頂点とする放物線の一部を表している. 以下の問に答えよ.

(1) 曲線を x 軸まわりに回転させる場合にできる立体の体積を求めよ.

(2) 区間 $-a \leq x \leq a$ における曲線の長さを求めよ.

(3) 曲線を y 軸まわりに回転させる場合にできる曲面の凸側面積を求めよ.

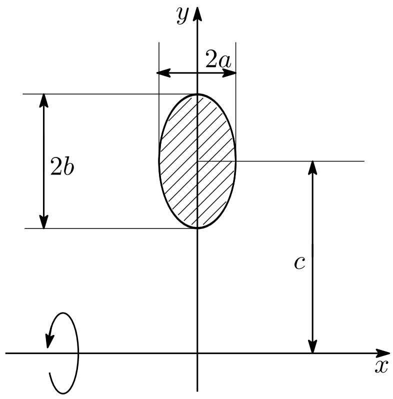


(東京大 2002)　　(m20020702)

0.25 直交座標空間 (x, y, z) において，$x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ で表される円筒の内部で，xy 平面の上方 $(z \geq 0)$，かつ $z = x$ で与えられる平面の下方 $(z \leq x)$ にある部分の体積を求めよ．

(東京大 2003)　　(m20030701)

0.26 図のような xy 平面上の楕円（図中の斜線の部分）を x 軸の周りに回転させてできたドーナツ状の立体の体積を考える．楕円の短軸（x 軸方向）の長さを $2a$，長軸（y 軸方向）の長さを $2b$，楕円の中心と x 軸との距離を c $(c > a,\ c > b)$ とするとき，以下の問いに答えよ．



(1) y を x の関数として表現し，楕円の表す方程式を求めよ．

(2) $x = a\cos\theta$ と置換し，楕円を x 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(3) このドーナツ状の立体をさらに y 軸の周りに 1 回転させてできた立体の体積を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040701)

0.27 (1) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$ とする.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 + 1 \leq 0, \quad 1 \leq z \leq c$$

(2) 次の不等式の表す立体の体積を求めよ. ただし $a > 0$, $b > 0$ とする.

$$0 \leq z \leq x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

(東京大 2005)　　(m20050704)

0.28 点 O を原点とする xyz 空間に, 点 P および x 軸上の点 Q があり, この 2 つの点が $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| = 1/2$ を満たしながら動くとき, 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域を V とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 P の集合を表す曲面の方程式を x, y, z で表せ.

(2) 点 P が xy 平面上の第 1 象限 $(x > 0,\ y > 0)$ に存在し, かつ点 Q が点 O 以外に存在する場合を考える.

(a) このとき, $\angle POQ = \theta$ として, 線分 $\overline{PQ}$ を表す方程式を x, y, θ で表せ.

(b) 線分 $\overline{PQ}$ が通過し得る領域 S を表す式を求め, 領域 S の概形を図示せよ.

(3) 領域 V の体積を求めよ.

(東京大 2010)　　(m20100703)

0.29 (1) xyz 空間において，3 点 $A(1, 3, 1)$, $B(2, 4, 3)$, $C(3, -3, -1)$ を通る平面を α とする.

(a) 平面 α の方程式を求めよ.

(b) 点 $P(1, 1, 1)$ からの距離が 5 であり，平面 α に平行な平面の方程式を求めよ.

(c) (b) で求めた平面に接し，点 P を中心とする球面を S とする，平面 α と球面 S が交わってできる円の中心座標と半径を求めよ.

(2) 四面体 $OABC$ において，線分 AB の中点を P，線分 CP を $1:2$ の比に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ の比に内分する点を R とする，また，3 点 O, B, C を通る平面と直線 AR の交点を S，直線 OS と直線 BC の交点を T とする.

(a) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

(b) 四面体 $OABC$ の体積 V_1 と，四面体 $PQST$ の体積 V_2 の比 $V_1 : V_2$ を求めよ.

注) (1),(2) のそれぞれの問題文中で使われている記号は，無関係である.

(東京大 2011)　　(m20110703)

0.30 (1) 閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V は

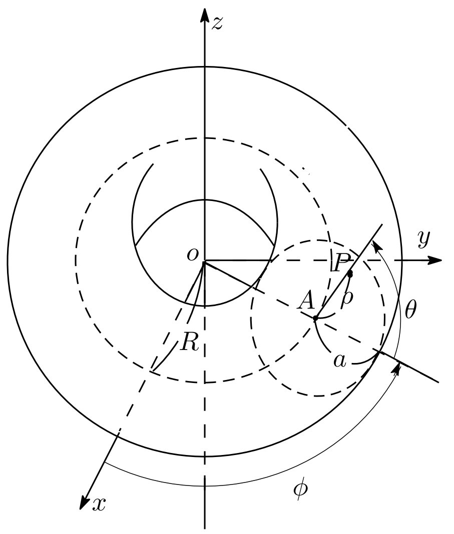
$$V = \frac{1}{3}\iint_S \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (*)$$

と与えられることをガウスの定理を用いて証明せよ． ただし，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素である．

(2) 下図のように，あるトーラスの回転対称軸を z 軸にとり， z 軸に垂直でトーラスを 2 等分するような平面内に x 軸と y 軸をとる． このトーラスは z 軸を含んだ平面で切断すると，その断面は半径 a の円となり， この円の中心は z 軸から距離 R の円周上（トーラス中心軸と呼ぶことにする）にある $(R > a)$． トーラス表面および内部の任意の点を P とする．点 P と z 軸とを含んだ平面と， トーラス中心軸との交点を A とする．線分 AP の長さを ρ，x 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を ϕ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のなす角を θ とする． 点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分を R, ρ, ϕ, θ を用いて書き表せ．

(3) 同図のトーラスの表面 $(\rho = a)$ においてベクトル面積素 $d\boldsymbol{S}$ を，前問 (2) の結果を用いて，ϕ と θ を媒介変数にして表示せよ． この結果を用い，変数の範囲に注意して，このトーラスの表面積を求めよ． なお円周率を π とする．

(4) 式 $(*)$ と前問の結果からこのトーラスの体積を求めよ．



(東京大 2012) (m20120703)

0.31 3 次元空間内の四面体 $ABCD$ について以下の問いに答えよ．

(1) (a) 三角形 ABC の面積を S，三角形 ABC から頂点 D までの高さを h とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積 V を面積 S と高さ h を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(b) 頂点 A と頂点 B, C を結ぶベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$ とする．このとき，三角形 ABC の面積 S をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

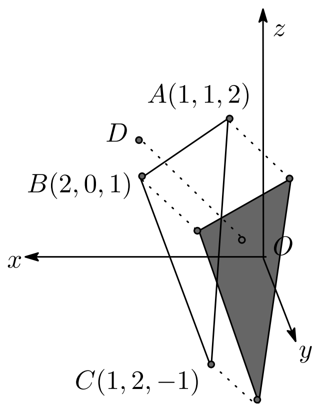
(c) 頂点 A と頂点 D を結ぶベクトルを $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{AD}$ とするとき，四面体 $ABCD$ の体積 V をベクトル $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ を用いて表せ．なお導出過程も示せ．

(2) 下図を参照して, 以下の問いに答えよ．

(a) 3 次元空間内に x 軸，y 軸，z 軸からなる直交座標系を考え，頂点 $A(1,1,2)$，$B(2,0,1)$，$C(1,2,-1)$ からなる三角形 ABC と，ベクトル $(1,1,1)$ に垂直な原点 O を通る平面 P を考える．このとき三角形 ABC の，$(-1,-1,-1)$ 方向に無限遠から入射する平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影図の面積を求めよ．

(b) 四面体 $ABCD$ の平行光線 $\boldsymbol{R}$ による平面 P への投影を考える．四面体 $ABCD$ が 0 でない体積を持ち，なおかつ頂点 D の投影が三角形 ABC の投影図に内包されるとき，頂点 D の座標が満たす必要条件を求めよ．

ただし，頂点 D の座標 $(d_x,\ d_y,\ d_z)$ は条件 $4d_x+3d_y+d_z-9>0$ を満たすとする．



図

(東京大 2016)　　(m20160703)

0.32 (1) 次の積分をせよ．　$\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy \qquad D:0\leq x\leq y\leq 1$

(2) 二つの曲面 : $z^2=4ay$, $x^2+y^2=ay$ 　に囲まれた立体の第 1 象限にある部分の体積を求めよ．

(東京工業大 2001)　　(m20010804)

0.33 球 $x^2+y^2+z^2\leq 1$ と円柱 $x^2+y^2\leq x$ との共通部分の体積 V を求めよ．

(東京工業大 2011)　　(m20110804)

0.34 楕円柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，平面 $z=0$，曲面 $z=x^2+y^2$ で囲まれた立体の体積 V を求めよ．ただし，a,b は正の実数とする．

(東京工業大 2013)　　(m20130804)

0.35 2 つの円柱 $x^2+y^2\leqq a^2$, $y^2+z^2\leqq a^2$ $(a>0)$ の共有部分の体積 V を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140802)

0.36 (1) xyz 空間内の xz 平面上の曲線 $x=e^z\cos z$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq z\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と直線 $x=0$ で囲まれる領域を，z 軸のまわりに回転してできる回転体 A の体積を求めよ．

(2) 球 $x^2+y^2+z^2\leqq 3$ と円柱 $x^2-2x+y^2\leqq 0$ の共通部分を B とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iiint_B |z|\,dxdydz$$

(東京工業大 2022)　　(m20220802)

0.37 xyz 空間の 2 つの曲面 $S_1:z=x^2+2x,\ S_2:z=-y^2+4y-1$ によって囲まれた部分の体積を求めなさい．

(東京農工大 2017)　　(m20170902)

0.38 関数

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

に対して，xyz 空間内の曲面 S : $z=f(x,y)$ を考える．以下の問いに答えよ．

ただし，$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $x=\tan y$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を表す

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ に対して，偏導関数 $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 曲面 S 上の点 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ f\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$ における S の接平面の方程式を求めよ.

(3) 曲面 S と平面 $z=0$ で囲まれる立体の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2020)　　(m20201003)

0.39 点 O を原点とする座標空間内の 4 点 A$(2,1,3)$, B$(1,1,2)$, C$(3,0,1)$, D$(2,-1,2)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 3 点 A, B, C を通る平面 H の方程式を求めよ.

(2) 平面 H と点 D の距離 d を求めよ.

(3) 外積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ.

(4) 三角形 OAB の面積 S を求めよ.

(5) 四面体 OABC の体積 V を求めよ.

(電気通信大 2021)　　(m20211001)

0.40 以下の設問に答えなさい.

(1) 図 1 のように, 太さの無視できる長さ a の棒 4 本で結ばれた平面上の菱形を考える. この図形の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている. 対角線を 1 本追加して, 図形を固定し, 4 本の辺の囲む面積を最大にするには, どれだけの長さの対角線を付加すれば良いかを計算によって求めなさい.

ヒント : 座標系を利用して, 対角線の長さを頂点の座標を変数として表す.

(2) 図 2 のように, 太さの無視できる長さ a の 1 2 本で結ばれる平行六面体を考える. この物体の各頂点は自由に動く蝶番で結ばれている. この物体に対角線を付加して物体を固定したとき 1 2 本の辺が囲む平行六面体の中の体積を最大にすることを考える. このとき, 付加すべき対角線のなかで, 最小の長さのものを何本付加すれば良いかを計算によって示しなさい. ただし, ある面が対角線によって固定されると, その面と平行な面も固定されることを仮定する.

ヒント : (1) の結果を利用する.

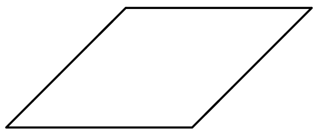


図 1

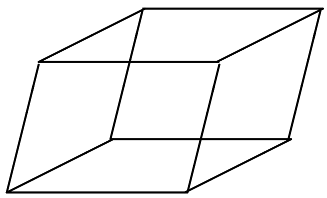


図 2

(千葉大 2000)　　(m20001202)

0.41 3 次元空間中に球 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ と円柱 $x^2+y^2=2ax$ がある. 球が円柱によって切り取られる立体の体積 V を以下の設問に答えることによって求めなさい.

(1) V が次のような重積分になることを図を書いて示しなさい.

$$V=2\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy\ ,\ D=\{(x,y)\mid(x-a)^2+y^2\leq a^2\}$$

(2) x-y 座標系の原点を中心とする極座標 (r,θ) を用いると, 領域 D が次のように表されることを示しなさい.

$$D=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\leq r\leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 設問 (1) の重積分を極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011201)

0.42 次の行列 A について答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を，A の成分を用いて表しなさい．

(2) 行列 A の成分を用いて，原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$,$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する．ここに，^{T} は行列の転置を示す．これらのベクトルを用いて，$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい．ここで，$\bullet$ は内積，$\times$ は外積を意味する．

(3) 行列式の絶対値が，これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい．

(千葉大 2003)　　(m20031205)

0.43 半径が a の無限に長い 2 つの直円柱がある．互いの中心軸が直交して交わっている場合，その共通部分を図示し，体積を求めなさい．

(千葉大 2004)　　(m20041202)

0.44 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ がある．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $(z \geq 0)$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい．

$$V = \iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,, \quad D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D は次のように表されることを示しなさい．

$$D = \left\{(r, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい．

(千葉大 2008)　　(m20081203)

0.45 三次元空間 O- xyz 座標系で, 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2ax$ で囲まれた図形の体積を求めなさい. ただし, a は定数 $(a > 0)$ である.

(千葉大 2010)　　(m20101203)

0.46 三次元空間 $O - xyz$ 座標系で，曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ と平面 $z = a^{-1}$ $(1 < a)$ で囲まれた図形を図示し，その体積 V を求めなさい.

(千葉大 2011)　　(m20111203)

0.47 三次元空間中に，球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ と円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ がある．ただし，$a > 0$．球面に囲まれる領域が円柱により切り取られる立体の上半分 $z \geq 0$ の体積 V を求めたい．

(1) V が次のような重積分になることを図で示しなさい.
$$v = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy\,, \qquad D = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq ax\right\}$$

(2) 極座標を用いると，領域 D が次のように表されることを示しなさい.
$$D = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 \leq r \leq a\cos\theta\right\}$$

(3) 極座標に変換して体積 V を求めなさい.

(千葉大 2013)　(m20131203)

0.48 三次元空間 $O-xyz$ 座標系で，円柱 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ が 2 つの平面 $z=bx$ $(b>0)$ と $z=0$ とで切り取られる立体について，以下の問に答えなさい.

(1) 立体を図示しなさい.

(2) xy 平面上に極座標系 $(r,\ \theta)$ をとって，$O-r\theta z$ 円柱座標系で見た場合，z 軸を通る θ 平面と $\theta+d\theta$ 平面とで立体が切り取られる体積 dV を求めなさい.

(3) 立体の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2014)　(m20141203)

0.49 三次元空間の $O-XYZ$ 座標系で与えられた，放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$，および，二葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ について，以下の問に答えなさい.

(1) 放物面と二葉双曲面との交線の式を求めなさい.

(2) 放物面が二葉双曲面に挟まれる部分の概形を図示しなさい.

(3) 放物面 $z=1+\sqrt{2}-x^2-y^2$ と二葉双曲面の上半分 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい.

(千葉大 2015)　(m20151203)

0.50 三次元空間の O-xyz 座標系で与えられた直円柱 $x^2+y^2\leq ax$ と球 $x^2+y^2+z^2\leq a^2$（ただし，$a>0$）について，以下の問に答えなさい.

(1) 直円柱と球の共通部分の体積を求めなさい.

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ が，直円柱によって切り取られる部分の面積を求めなさい.

(千葉大 2017)　(m20171203)

0.51 楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ について以下の問いに答えよ.

(1) 楕円面上の点 (x_0,y_0,z_0) における外向き単位法線ベクトルを求めよ.

(2) 楕円面上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ.

(3) 楕円面を平面 $z=z_0$ で切断した時にできる図形が囲む部分の面積を求めよ．ただし，$-c<z_0<c$ である.

(4) 問い (3) で得られた面積を z_0 で積分することによって楕円面で囲まれた部分の体積を計算せよ.

(筑波大 2000)　(m20001304)

0.52 面積が a 平方センチメートルの正方形がある．この正方形の四隅から合同な 4 つの正方形を切り取り，残りの部分を折り曲げて接合することにより，上部の開いた箱を作ることにする．箱の容量（体積）を最大化するためにはどうすればよいか．また $a=36$ のときの最大容量を求めよ.

(筑波大 2001)　(m20011301)

0.53 $x^2+(y-b)^2=a^2$ (ただし, $a>0,\ b>0$) を x 軸回りに回転してできる回転体を考える.

(1) 体積を求めよ.　(2) 表面積を求めよ.

(筑波大 2001)　(m20011305)

0.54 $y = x^2 - 2x - 8$ の曲線を x 軸に対して回転させて囲まれる部分の体積を求めよ.

ただし, 求める部分は $x^2 - 2x - 8 = 0$ の解 x_1 , x_2 の間のみとする ($x_1 \leqq x \leqq x_2$).

（筑波大 2004） (m20041309)

0.55 (1) $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ で与えられる図形の概略を描け ($a > r > 0$).

(2) この図形を y 軸の周りに回転して得られるドーナッツ型の回転体（トーラス）の体積 V を求めよ.

(筑波大 2006) (m20061317)

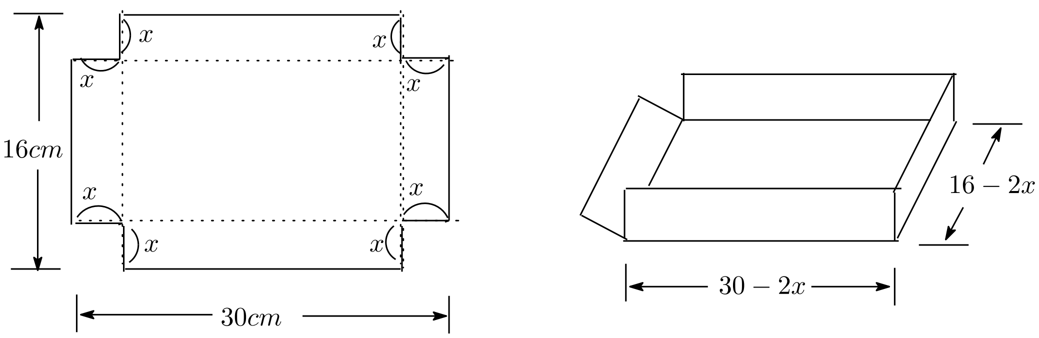
0.56 $z = x^2 + 2y^2$, 平面 $x + y = 1$, および 3 座標面で囲まれる立体の体積を求めなさい.

(筑波大 2008) (m20081307)

0.57 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ と円柱 $x^2 + y^2 \leqq x$ の共通部分の体積を求めよ.

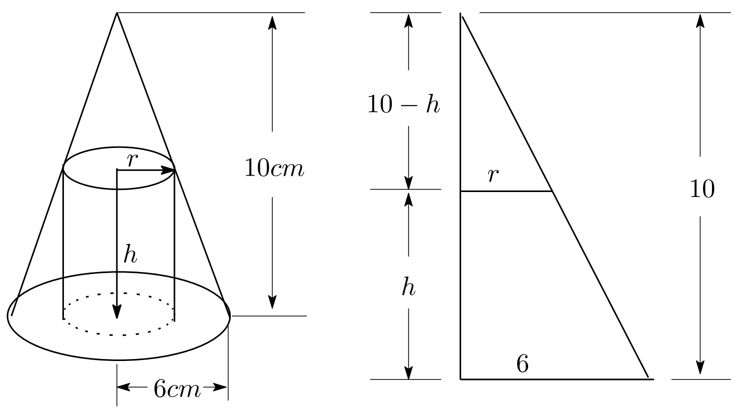
(筑波大 2009) (m20091313)

0.58 $16cm \times 30cm$ の段ボール紙がある. 下図のように, この紙の四隅から一辺 xcm の正方形を取り除き, 残りの部分を使って上に開いた箱を作りたい. この箱の容量（体積）を最大にするには x をいくらにしたらよいか答えなさい.



(筑波大 2011) (m20111305)

0.59 下図のように半径 $6cm$, 高さ $10cm$ の円錐の中に内接する円柱がある. この円柱の体積が最大になるときの半径 r と高さ h を求めよ.



(筑波大 2012) (m20121306)

0.60 3 次元ユークリッド空間の 3 つのベクトル：

$$\boldsymbol{a} = (1, 2, -1) \qquad \boldsymbol{b} = (2, 3, 5) \qquad \boldsymbol{c} = (-1, 0, 2)$$

によって張られる平行六面体の体積を求めなさい.

(筑波大 2012) (m20121316)

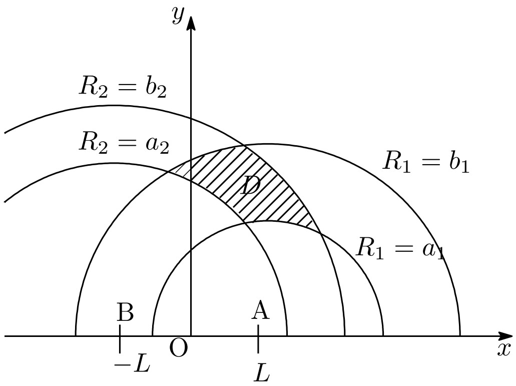
0.61 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，曲面 $z = 5x^2 + 4xy + 8y^2$ と平面 $z = 1$ によって囲まれた図形の体積を求めよ．

(筑波大 2014) (m20141314)

0.62 xy 平面の $y > 0$ なる領域（上半面）の点 $P(x, y)$ に対して，点 $A(L, 0)$ および点 $B(-L, 0)$ からの距離の二乗

$$R_1 = (x - L)^2 + y^2\ , \qquad R_2 = (x + L)^2 + y^2$$

を考える．ここで $L > 0$ とする．また，$f(x, y) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)$ とする．



(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) c をゼロでない定数とし，xy 平面の上半面において $f(x, y) = c$ で表される曲線を考える．この曲線上の任意の点 (x_0, y_0) における法線の方程式を求めよ．そして，その法線と x 軸との交点が c と L だけで決まることを示せ．

(3) a_1, a_2, b_1, b_2 を正の定数とし，$R_1 = a_1$ と $R_1 = b_1$ で指定される円がそれぞれ $R_2 = a_2$ と $R_2 = b_2$ で指定される円と交わる場合を考える（図を参照）．ここで $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ とし，xy 平面の上半面において $a_1 \leq R_1 \leq b_1$, $a_2 \leq R_2 \leq b_2$ で指定される領域を D とするとき，D を x 軸の周りに回転して出来る回転体の体積は

$$V = 2\pi \int_D y\,dxdy$$

で与えられる．x, y に関する積分を R_1, R_2 に関する積分に変換することにより V を求めよ．

(4) xy 平面を複素平面と考え，点 $P(x, y)$ を複素数 $z = x + iy$ に対応させ，
複素関数 $g(z) = \log\left(\dfrac{z - L}{z + L}\right)$ を考える．$z - L = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + L = r_2 e^{i\theta_2}$ とおくことにより，$g(z)$ の実部は $f(x, y)$ に一致することを示せ．ただし，$0 < r_1$, $0 < r_2$, $0 < \theta_1 < \pi$, および $0 < \theta_2 < \pi$ とする．さらに $g(z)$ の虚部は三角形 PAB のどの内角に対応するか答えよ．

(筑波大 2016) (m20161315)

0.63 xyz 直交座標系において円柱面 $x^2 + y^2 = 1$, xy 平面，平面 $z = x$ により囲まれた部分の体積を求めなさい．

(筑波大 2018) (m20181314)

0.64 ラグランジュの未定乗数法を用いて，楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0,\ c > 0$$

に内接する直方体の体積の最大値とそのときの頂点の座標を求めたい．ただし，直方体の各辺は，いずれも x 軸，y 軸，z 軸のどれかに平行であるものとする．

(1) 楕円体に内接する直方体の 8 つの頂点の 1 つを (x, y, z)（ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ ）としたとき，3 方向の辺の長さ $l_x,\ l_y,\ l_z$ と，楕円体に内接する直方体の体積 $V(x, y, z)$ を変数 x, y, z を用いてそれぞれの数式として表せ．

(2) 直方体が楕円体に内接するという条件件を満たす特異点がないことを示せ．

(3) 体積 $V(x, y, z)$ を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めるための，具体的なラグランジュ関数 $F(x, y, z)$ を示せ．ただし，未定乗数を λ とせよ．

(4) (3) で定数化した数式を用いて，楕円体に内接する直方体の体積を最大化する頂点の座標 (x, y, z) とその体積を求めよ．ただし，$x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ とする．

(筑波大 2019)　　(m20191310)

0.65 $z = \dfrac{1}{xy},\ x > 0,\ y > 0$ を満たす 3 次元空間内の曲面 S について以下の問いに答えよ．

(1) $(x, y) = (1, 2)$ における曲面 S の接平面の方程式と法線の方程式を求めよ．

(2) 曲面 S 上で，平面 $x + 3y + 9z + 18 = 0$ との距離が最も近い点の座標を求めよ．

(3) 6 つの平面 $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 2$ で囲まれる立方体を曲面 S で分割して得られる 2 つの領域のうち，原点を含まない方の領域の体積を求めよ．

(筑波大 2020)　　(m20201301)

0.66 次のベクトルについて，以下の問に答えよ．

$$\overrightarrow{PA} = \boldsymbol{a} = (2, 1, 1), \quad \overrightarrow{PB} = \boldsymbol{b} = (1, 2, 1), \quad \overrightarrow{PC} = \boldsymbol{c} = (1, 1, 2)$$

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めなさい．　　(2) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めなさい．

(2) PA, PB, PC で張られた平行六面体の体積を求めなさい．

（埼玉大 2001）　　(m20011406)

0.67 以下の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ について考える．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ で囲まれた平行四辺形の面積を求めよ．

(2) 3 つのベクトルでできる平行六面体の体積が 12 となる時，x の値を求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071405)

0.68 次のベクトルについて考える．

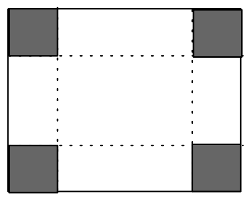
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

(1) 外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積が 50 のとき，z を求めよ．

(埼玉大 2011)　　(m20111405)

0.69 図に示すように，長方形の用紙の四つの角からそれぞれ 1 辺が x の正方形（図の黒で示した部分）を切り取り，図の点線で折り返して，ふたのない容器を作る．この容器の体積を $f(x)$ とする．長方形の二辺の長さをそれぞれ，11，17 としたとき，以下の各問に答えよ．



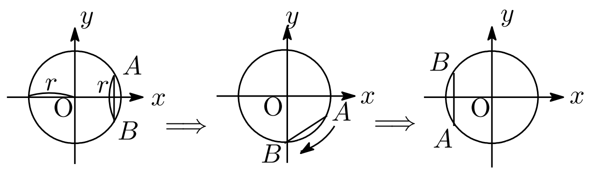
(1) 切り取る正方形の一辺が $(x+1)$ のときと x のときの，容器の体積の差を表す関数 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ を求めよ．

(2) x が整数値を取るときの $g(x)$ の符号を調べ，容器の体積が最大になる整数値 x を求めよ．

(3) x が実数値を取るときに，容器の体積が最大になる実数値 x を求めよ．

(群馬大 2014)　　(m20141502)

0.70 原点を中心とする半径 $r(r>0)$ の円の円周に両端が接する長さ r の線分 AB がある．図のように AB がはじめ y 軸と平行に置かれ，線分の両端を円に接したまま時計回りの方向に再び y 軸と平行になるまで移動する．このとき次の問に答えよ．

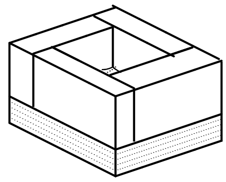


(1) 線分 AB が通る領域を図示し，その面積を求めよ．

(2) (1) の図形を y 軸を中心として回転してできる立体の体積を求めよ．

(図書館情報大 1998)　　(m19981604)

0.71 厚さ $1\,cm$ の板で内側が縦・横・深さ $1\,cm$ のマス M_1 を作る．
同じ板を使って M_1 がぴったりと入るように M_2 をつくる．
以下同様にして $M_3, M_4, \cdots, M_k, \cdots$ を作る．



(1) M_k の容積を求めよ．

(2) マス M_k の板の部分の体積がその容積よりも初めて小さくなるときの k の値を求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001604)

0.72 (1) 半径 r の円盤を，円盤と同じ中心をもつ 3 つの同心円で切って 4 つの部分に分ける（一番内側は円形，他の 3 つはドーナツ型になる）．各部分の面積が互いに等しくなるようにするには，3 つの同心円の半径をいくらにすればよいかを答えよ．

(2) 底面の半径が r，高さが h の円錐を水平に切って体積が等しい n 個の部分 $(n \geq 2)$ に分けたとき，一番上の小さい円錐のすぐ下にある円錐台の厚さを求めよ．

(図書館情報大 2000)　　(m20001606)

0.73 (1) 正確に長方形の形をした土地があり，その縦・横の長さを測ったところ，小数点以下を四捨五入して $517m$ と $483m$ であった．この土地の正確な面積は何 m^2 以上，何 m^2 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ．

(2) 正確に直方体の形をした箱があり，その縦・横・高さの長さをミリ単位で測ったところ，小数点以下を四捨五入して $200mm$, $300mm$, $500mm$ であった．この箱の正確な体積は何 cm^3 以上，何 cm^3 以下かを，小数点以下を四捨五入した整数値で答えよ（単位の違いに注意）．

(図書館情報大 2000)　　(m20001607)

0.74 座標平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ について，以下の各問いに答えよ．

(1) $x=0.01,\ y=0.02$ のとき，$f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ．

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする．

3 つの座標平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ．

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n=1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ．

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.75 3 次元空間の曲線 $x=0$, かつ $z=y^2$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ を z 軸のまわりに回転させてできる曲面を考える．この曲面を内面とする容器を z 軸の正方向が鉛直上向きになるように置き，単位時間当たり体積 V_0（定数）の水を容器が完全に満たされるまで注ぎ入れる．このとき，次の設問に答えよ．

(1) 容器の底から水面までの高さが h のとき，容器内の水の体積 V を求めよ．

(2) 空の容器に水を注ぎ入れ始めてから時間 t 後の容器の底から水面までの高さを t の関数 $h(t)$ と表す．$h(t)$ に対する微分方程式を導け．また，それを解いて $h(t)$ を求めよ．

(3) 容器を完全に満たしてから静かに 45 度傾けたとき，容器内に残る水の体積を求めよ．

(山梨大 2017)　　(m20171801)

0.76 円柱 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ の xy 平面の上方で, 平面 $z=x$ の下方にある部分の体積を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041901)

0.77 2 つの円柱面 $y^2+z^2=1$, $z^2+x^2=1$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(信州大 2006)　　(m20061903)

0.78 すべての辺の長さの総和が 4ℓ の直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，直方体の 2 辺の長さを x, y とするとき，直方体の体積 V を x, y, ℓ を用いて表せ．

(2) V の x に関する偏導関数 V_x および y に関する偏導関数 V_y を求めよ．

(3) 直方体の体積の最大値を求めよ．

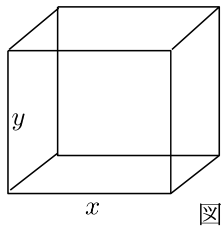


図 1

(新潟大 2006)　　(m20062013)

0.79 放物線 $y=x^2+x-1$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ の周りに回転させて出来る立体の体積を求めよ．

(新潟大 2010)　　(m20102010)

0.80 三つのベクトル

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

を辺として持つ平行六面対の体積 V を求めよ．

(新潟大 2016)　　(m20162003)

0.81 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r)=B\left(1-\frac{r}{R}\right)$ が存在する．ここで r は原点からの距離である．ただし，B は定数で，$R<r$ では $\rho(r)=0$ である．

(1) 半径 $r+\triangle r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 $\triangle V$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\triangle r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に $\triangle V$ は $\triangle r$ に比例し，$\triangle V = f(r)\triangle r$ と書ける．$f(r)$ を求めよ．

(3) $\triangle V$ の領域内の質量は $\rho(r)\triangle V = f(r)\rho(r)\triangle r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる．$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ．

(4) 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は，$F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる．$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ．

(5) 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け．

(新潟大 2018)　　(m20182006)

0.82 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において x 軸に垂直な平面による切口が半径 $1+\sin x$ の円で与えられる回転体の体積 V を求めよ．回転体は x 軸を中心に回転しているとする．

(新潟大 2022)　　(m20222008)

0.83 1 辺の長さが a の立方体が 1 つの面を水平に置いてある．この立方体を含む直立した直円すいのうちで，その体積が最小なものの底面の半径，高さおよび体積を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912103)

0.84 空間の $0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ，$x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1991)　　(m19912104)

0.85 曲面 $z = x^2+y^2$ の $z \leqq 4$ の部分でできる容器を z 軸正方向を上向きにして水をいっぱいに満たす．以下の問いに答えよ．

(1) 満たされた水の体積を求めよ．

(2) 容器を静かに 45°傾けて水をこぼしたとき，残った水の体積を求めよ．

(長岡技科大 1996)　　(m19962102)

0.86 $a > 0$ とする．

(1) 平面において，x 軸からの距離と点 $(0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲線の方程式を求めよ．

(2) 空間において，xy 平面からの距離と点 $(0, 0, a)$ からの距離が等しいような点からなる曲面 S_1 の方程式を求めよ．

(3) 空間において，平面 $x+y+z=0$ からの距離と点 $(1, 1, 1)$ からの距離が等しいような点からなる曲面を S_2 とする．S_2 と平面 $x+y+z=3$ とで囲まれる部分の体積を求めよ．

(長岡技科大 1997)　　(m19972105)

0.87 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $y>0$, $z>0$ の部分を M とし，$A(1,0,0)$, $B(-1,0,0)$ とする．M 上の点 $P(x,y,z)$ から xy 平面に下ろした垂線の足を Q とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 ABQ の面積 S を x, y で表せ．

(2) 三角錐 $PABQ$ の体積 V を x, y で表せ．

(3) P が M 上を動くとき，V の最大値を求めよ．

(長岡技科大 1999)　　(m19992101)

0.88 xy 平面で, 2 曲線 $y=2x^2$, $y=3-x^2$ で囲まれる部分を S とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) S の概形を描き, その面積を求めよ．

(2) S を y 軸の回りに回転させてできる回転体を V とする. V の体積を求めよ.

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき, V の $t \leqq y \leqq t+1$ にある部分の体積の最大値を求めよ.

（長岡技科大 2004） (m20042101)

0.89 xyz 空間において, 球面 $S\ :\ x^2+y^2+z^2=1$ と点 $A(3,0,0)$ について以下の問いに答えよ.

(1) 平面 $x=c$ と球面 S とが交わるような実数 c の範囲を求めよ.

(2) c が前問の範囲を動くとき, 平面 $x=c$ と S との交わりの円を底面とし A を頂点とする円すいの体積を最大とする c の値を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052103)

0.90 xyz 空間において $x^2+y^2 \leqq z \leqq 2$ を満たす部分の体積を求めよ.

(長岡技科大 2005) (m20052104)

0.91 xyz 空間に 4 点 $O(0,0,0),\ A(1,-2,-1),\ B(-2,-5,0),\ C(2,1,0)$ をとる．以下の問に答えよ．

(1) 直線 AB と yz 平面との交点を求めなさい．

(2) 3 点 A,B,C を通る平面と x 軸との交点を求めなさい．

(3) 三角形 OBC の面積を求めなさい．

(4) 四面体 $OABC$ の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2006) (m20062102)

0.92 $0<t<1$ として，空間の 4 点

$$A(t,\sqrt{1-t^2},0),\ B(t,-\sqrt{1-t^2},0),\ C(-t,0,\sqrt{1-t^2}),\ D(-t,0,-\sqrt{1-t^2})$$

を考える，以下の問いに答えなさい.

(1) AB の中点 E の座標を求めなさい.

(2) $\triangle CDE$ の面積 S を t で表しなさい.

(3) 四面体 $ABCD$ の体積 V を t で表しなさい.

(4) V を最大にする t の値とその最大値を求めなさい.

(長岡技科大 2008) (m20082103)

0.93 空間に半径 r の球が 2 つある．これらが共有点を持つとし，中心の間の距離を $2s$ とする．以下の問いに答えなさい.

(1) 2 つの球の共通部分の体積 V を r,s で表しなさい.

(2) $s=r^2$ の条件を満たして r,s が動くとき，V を最大にする r の値を求めなさい.

(長岡技科大 2013) (m20132103)

0.94 xy 平面上で原点 O を中心とする半径 r の円を考える．A$(r,0)$ とし，円周上に点 B を $\angle$AOB$=30^\circ$ になるようにとる．下の問いに答えなさい.

(1) 扇形 OAB を x 軸を中心にして 1 回転させた回転体の体積 $V(r)$ を求めなさい.

(2) 円弧 AB を x 軸を中心にして 1 回転させてできる曲面の面積 $S(r)$ を求めなさい.

(長岡技科大 2014) (m20142104)

0.95 関数 $y=\sin x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれる図形を S とする．下の問いに答えなさい．

(1) 図形 S を図示し，面積を求めなさい．

(2) 図形 S を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(3) 図形 S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(長岡技科大 2015)　　(m20152103)

0.96 xyz 空間における曲線 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ について下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $z=x^2+y^2$ 上の点 (a,b,a^2+b^2) における接平面の方程式を求めなさい． ただし，曲面 $x=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は，f_x，f_y を f の偏導関数とすると，

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

で与えられる，

(2) 前問の接平面が点 $(0,0,-1)$ を通るように動くとき，接点の軌跡を含む平面 S の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 $z=x^2+y^2$ と平面 S とで囲まれる部分の体積 V を求めなさい．

(長岡技科大 2017)　　(m20172104)

0.97 a，h を正の定数とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=h-a(x^2+y^2)$ とする． $f(x,y) \geqq 0$ で表される xy 平面における領域を D とし，その面積を S とする． また，xyz 空間で，曲面 $z=f(x,y)$ と xy 平面で囲まれる立体の体積を V とする． 下の問いに答えなさい．

(1) D を xy 平面上に図示しなさい． また，S を a と h で表しなさい．

(2) $V=\dfrac{1}{2}Sh$ であることを示しなさい．

(長岡技科大 2018)　　(m20182104)

0.98 $a>0$ とする． 座標空間内に球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ と円柱 $x^2+y^2=ax$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

(金沢大 2009)　　(m20092208)

0.99 xyz空間内の二つの曲面　$x^2+y^2-x=0$ と $z^2=x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(金沢大 2011)　　(m20112208)

0.100 xy 平面内の図形に関する, 次の問いに答えよ．

(1) $y=x^3$ 上の点 $P(t,t^3)$ から，$y=x$ へ下ろした垂線の足を Q とする． 点 Q の座標を，t を用いて表せ．

(2) 原点 O から点 Q までの距離を s とする． $t \geqq 0$ のとき, s を t の式として表せ．

(3) 点 P から点 Q までの距離を，(2) の s を変数として $f(s)$ と表すとする． $y=x$ と $y=x^3$ が $x \geqq 0$ の条件の下で囲む図形を，$y=x$ のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を，s に関する積分として $f(s)$ を用いて表せ．

(4) $V=\dfrac{4\sqrt{2}}{105}\pi$ を示せ．

(金沢大 2012)　　(m20122207)

0.101 xyz空間において ，条件

$$x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x,\ x^2+z^2 \leqq 1$$

で定まる立体の体積を求めよ．

(金沢大 2013)　　(m20132205)

0.102 3 次元空間 $O-xyz$ に 3 点 $A(1,2,3)$, $B(2,2,1)$, $C(1,3,1)$ がある. ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ として, 以下の問いに答えよ.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のそれぞれの長さを求めよ.

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき, $\cos\theta$ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

(4) 点 B は原点 O から平面 ABC への垂線の足であることを示せ.

(5) 三角錐 $OABC$ の体積 V を求めよ.

（富山大 2004）　　(m20042306)

0.103 $V=\{(x,y,z)\in R^3 \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ x^2+z^2 \leqq 1\}$ の体積を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042312)

0.104 半径 a の球の体積 V を求める．以下の問いに答えよ.

(1) 直交座標 (x,y,z) を用いて，V を積分表示せよ.

(2) (x,y,z) の極座標 (r,θ,φ) への変換

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

を用いて，$\dfrac{\partial x}{\partial r}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ を求めよ.

(3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ を求めよ.

(4) (1) および (3) の結果を用いて，V を (r,θ,φ) で積分表示せよ.

(5) (4) の積分を実行し，V を求めよ.

(富山大 2009)　　(m20092304)

0.105 三つのベクトル $\mathbf{A}\ (2,-3,4)$, $\mathbf{B}\ (1,2,-1)$, $\mathbf{C}\ (3,-1,2)$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ.

(福井大 2001)　　(m20012414)

0.106 $(0,-2,0)$ を中心とする球上の点 $(1,-3,\sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ．また，この接平面が 3 つの座標軸と交わる点をそれぞれ A,B,C とするとき，立体 $OABC$ の体積を求めよ.

(福井大 2001)　　(m20012415)

0.107 底面の半径 1，高さ 1 である直円柱がある．この底面の半径を含み，底面と 45° をなす平面で直円柱を 2 分するとき，小さいほうの体積を求めなさい.

(福井大 2003)　　(m20032408)

0.108 $x^2+(y-b)^2=a^2 \quad (b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる体積を求めよ.

(福井大 2006) (m20062404)

0.109 円 $x^2+(y-b)^2=a^2 \ \ (b>a>0)$ が x 軸のまわりに回転することによって生ずる回転面で囲まれる立体の体積 v を求めよ．（途中の計算式も書くこと）

(福井大 2008) (m20082404)

0.110 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ．ただし，極座標 (r,θ,ϕ) は，直角座標 (x,y,z) を使って，

$$x=r\sin\theta\cos\phi\,,\ y=r\sin\theta\sin\phi\,,\ z=r\cos\theta \quad (0\leq r\leq\infty\,,\ 0\leq\theta\leq\pi\,,\ 0\leq\phi\leq 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2-xy+y^2=4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009) (m20092402)

0.111 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$ を x 軸の周りに一回転して得られる回転楕円体の体積を求めよ.

(福井大 2009) (m20092411)

0.112 次の量を 3 重積分を使って表し, その値を求めよ.

$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x/a+y/b+z/c=1$ で囲まれる体積.

(福井大 2010) (m20102407)

0.113 座標空間上に 4 点 $A=(1,0,-1)\,,\ B=(4,2,-1)\,,\ C=(-1,3,0)\,,\ D=(2,1,3)$ がある. このとき, 有向線分 $\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC}\,,\ \overrightarrow{AD}$ から定まる平行六面体の体積 V を求めよ.

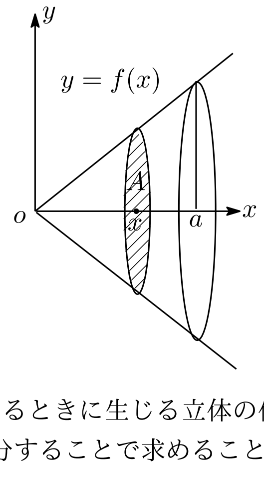
(福井大 2010) (m20102418)

0.114 定数 $a,\ r$ が $0<r\leq a$ のとき，円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ を，x 軸の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ.

(福井大 2011) (m20112417)

0.115 関数 $y=f(x)=\dfrac{1}{4}x$ がある．この関数が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体（回転体）の体積を，次の問いにしたがって求めよ.

(1) 関数 $f(x)$ が x 軸のまわりに回転するとき，$x=x$ で生じる回転体の底面積 A を求めよ.

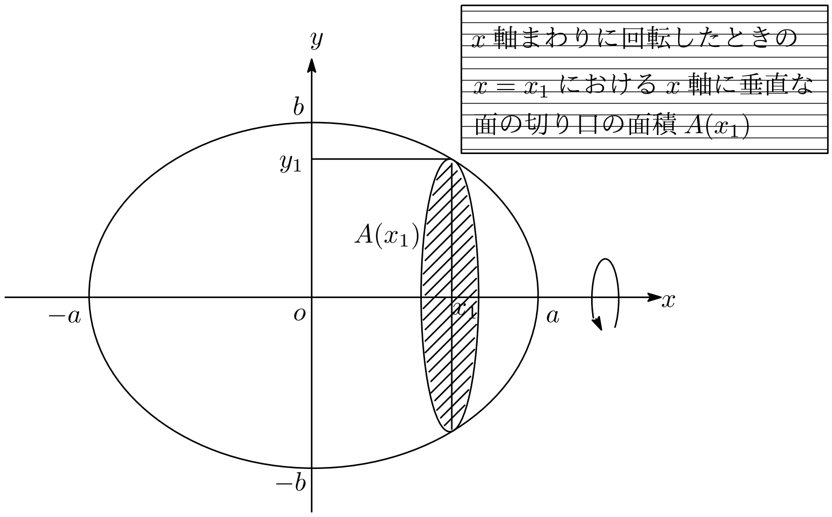


(2) 関数 $f(x)$ が $0\leq x\leq a$ において x 軸のまわりに回転するときに生じる立体の体積 V を求めよ．体積 V は (1) で求めた面積 A を $0\leq x\leq a$ の範囲で積分することで求めることができる．なお，円錐の体積を求める公式を使ってはいけない.

(福井大 2012) (m20122407)

0.116 右下図に示すように，2 次元 $x-y$ 直交座標系で，原点 O が長軸と短軸の交点で，x 軸上にある長径が $2a$ および y 軸上にある短径が $2b$ の楕円がある．この楕円について次の問いに答えよ．

(1) この楕円の方程式を書け．



次にこの楕円が x 軸のまわりに回転したときに生じる立体の体積を求める． 各問いに答えよ．

(2) この回転体を x 軸に垂直な面で切ると，切り口は円である．$x=x_1$ でのその切り口の面積 $A(x_1)$ を求めよ．

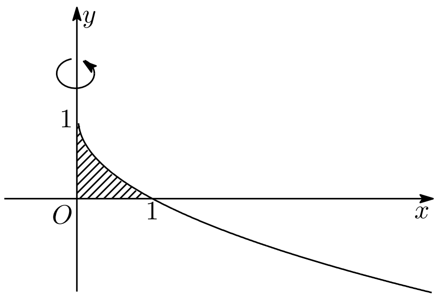
(3) x 軸上の任意な x での切り口の面積 $A(x)$ を x で積分 $(-a \leq x \leq a)$ すると，回転体の体積 V を求めることができる．この積分により V を求めよ．ただし，途中の式も書くこと．

(福井大 2013)　　(m20132408)

0.117 $y=\log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$ と x 軸の囲む部分を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(福井大 2014)　　(m20142406)

0.118 曲線 $y=1-\sqrt{x}$ と直線 $x=0$ および $y=0$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転できる立体の体積を求めよ．



(福井大 2015)　　(m20152404)

0.119 体積が一定で，各辺の長さが変化する直方体について，以下の問いに答えよ．

(1) 直方体の 3 つの辺の長さをそれぞれ x, y, z とし，直方体の体積を定数 $C>0$ とおく．
このとき，z を x, y, C を用いて表せ．ただし，$x>0$, $y>0$, $z>0$ とする．

(2) 直方体の表面積を $f(x,y)$ とする．$f(x,y)$ を x, y, C を用いて表せ．

(3) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．ただし，

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\qquad f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

である．

(4) $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が同時に 0 となるような x と y の値を，C を用いて表せ．

(5) 一般に，以下の定理が知られている

> <u>定理</u>
> 二階偏微分可能な二変数関数 $g(x,y)$ について，
>
> $$g_x(a,b)=0,\qquad g_y(a,b)=0$$
>
> のとき，
>
> $$D=\{g_{xy}(a,b)\}^2-g_{xx}(a,b)g_{yy}(a,b)$$
>
> とおくと，$g(x,y)$ は $x=a$，$y=b$ において，$D<0$ かつ $g_{xx}(a,b)>0$ のとき極小となる．

上記の定理を用いて，$f(x,y)$ は (4) で求めた x,y において極小となることを示せ．なお，定理の証明は不要である．

(福井大 2020)　　(m20202417)

0.120　4 点 $A(1,2,3)$，$B(-2,1,3)$，$C(-1,-2,1)$，$D(2,1,-3)$ に対して以下の問いに答えよ．

(1) 3 点 A,B,C を含む平面 α の式を求めよ．

(2) 点 D を通り，平面 α に垂直な直線の式を求めよ．

(3) AB，AC，AD を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2009)　　(m20092501)

0.121　空間のベクトル $\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(3,-1,-2)$，$\vec{c}=(-1,2,-2)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を求めよ．

(2) $\vec{a}$ とも $\vec{b}$ とも直交する長さ 1 のベクトルを求めよ．

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(4) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(静岡大 2012)　　(m20122505)

0.122　空間内に 4 点 $A(1,1,1)$，$B(2,3,2)$，$C(-2,0,3)$，$D(0,2,5)$ をとる．3 点 A,B,C を含む平面を π とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 平面 π の方程式を求めよ．

(2) 点 D を通り平面 π に垂直な直線の方程式を求めよ．

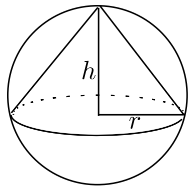
(3) 点 D と平面 π との距離を求めよ．

(4) 三角形 ABC の面積を求めよ．

(5) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(静岡大 2013)　　(m20132501)

0.123 直径 d の球に内接する円錐の体積の最大値を求めよ.
その場合の円錐の体積は, 球の体積の何%にあたるか.



(岐阜大 2004) (m20042601)

0.124 放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ と平面 $z = 0$ で囲まれる体積を求めよ.

(岐阜大 2005) (m20052603)

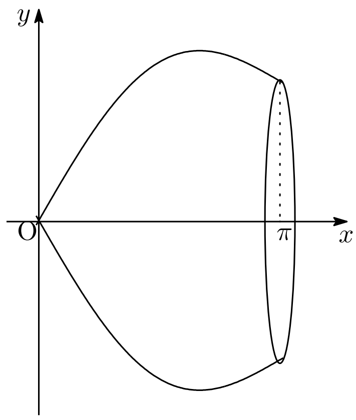
0.125 2 つの円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ および $x^2 + z^2 = 1$ によって囲まれる部分の体積を求めよ.

(岐阜大 2008) (m20082605)

0.126 表面積一定の直方体で体積最大なものは立方体であることを示せ.

(岐阜大 2008) (m20082618)

0.127 $y = \dfrac{x}{2} + \sin x$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分の曲線を x 軸のまわりに回転してできる右図のような回転体の体積 V を求めよ.



(岐阜大 2009) (m20092617)

0.128 x , y , z を軸とする 3 次元空間内の $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ について, $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\triangle ABC$ の重心を G , $\overrightarrow{OG} = \boldsymbol{g}$ としたとき, $\boldsymbol{g}$ を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ で表せ.

(2) $\triangle ABC$ の面積とそれに内接する円の面積を求めよ.

(3) 四面体 $OABC$ の体積とそれに内接する球の体積を求めよ.

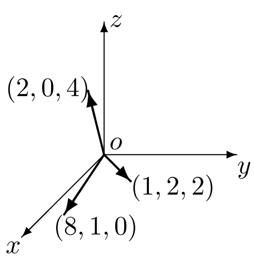
(豊橋技科大 1996) (m19962707)

0.129 半径 a の球に内接し, 体積が最大になる直円柱の高さ, および直径を求めよ.

(豊橋技科大 1998) (m19982709)

0.130 3 本のベクトル :

$$a = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

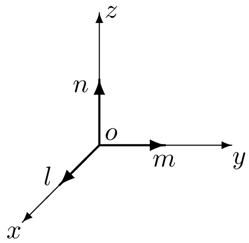


を 3 辺とする平行 6 面体を，これらを列ベクトルとする行列 A

$$A=(a,b,c)=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

で表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この平行 6 面体と体積の等しい立方体を，下図に示す基底ベクトル (l,m,n) を用いて，上と同様に行列 $B=(l,m,n)$ で表せ．



(2) 平行 6 面体 A を，変数 $PA=B$ により体積の等しい立方体 B に変換する行列 P を求めよ．

(豊橋技科大 2001) (m20012709)

0.131 3 次元直交座標系における点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ

$\boldsymbol{a}=(1,4,3)$, $\boldsymbol{b}=(2,3,1)$, $\boldsymbol{c}=(3,p,q)$

とする. $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ と直交している. 以下の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ とが直交していることから p, q の関係式を求めよ.

(2) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$ とが直交していることから, もう一つの p, q の関係式を求めよ.

(3) 以上の関係式から p, q の値を求めよ.

(4) $\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ.

(5) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の外積（ベクトル積）$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ を求めよ.

(6) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ.

(7) $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ とのなす角 θ を求めよ.

(8) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2005) (m20052704)

0.132 (1) 球面 S : $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$ の中心 P の座標と半径を求めよ.

(2) 直線 : $x=2y-2=-z+1$ と直交し，点 $(a,0,0)$ を通る平面 α の方程式を求めよ.

(3) 球面 S の中心 P から平面 α に垂線を下ろす．この垂線が平面 α と交わる点の座標および垂線の長さを，a を用いて表せ.

(4) 平面 α が球面 S と交わる円を底面とし，球面 S の中心 P を頂点とする円錐を考える．この円錐の体積を最大とする a の値を求めよ（ただし，点 P と円錐の底面の距離を h とせよ）.

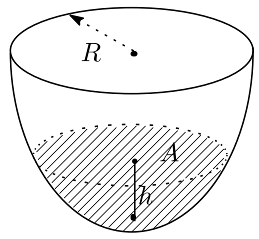
(豊橋技科大 2007) (m20072704)

0.133 半径 R の上に開いた半球があり，上面が地面に対して平行になるように置かれている．この半球に水が入っており（下図の斜線部分），半球の底から測った水面の高さを h とする．次の問いに答えよ．ただし，$h\leq R$ とする.

(1) 水面の面積 A を h の関数として表せ．

(2) 水面の体積 V を h の関数として求めよ．

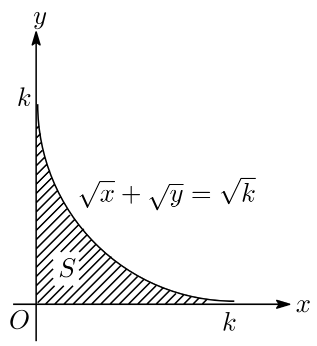
(3) 最下部に微小な小穴を開けた．単位時間当たりの水の体積 V の変化，すなわち dV/dt を示せ．ただし，小穴の大きさは十分に小さく，小穴を開けても半球の体積は変化しないと考えてよい．



(4) (3) の状況において，流体に関する基本定理から，単位時間当たりに小穴から流れ出る水の体積（体積速度）は $Sk\sqrt{h}$ で表される（S は微小な小穴の面積，k は正の定数）．単位時間当たりに小穴から流出する水の体積が，半球において単位時間当たりに減少する水の体積に等しいことを用いて，高さ h と時間 t の関係式（微分方程式）を示せ．さらに，$t=0$ において $h=R$ であったとし，水が全て流出するのに要する時間 T を求めよ．

(豊橋技科大 2013)　　(m20132703)

0.134 (1) 下図に示される，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}\quad(k \geq 0)$ と x 軸，y 軸で囲まれる図形 S の面積が $\dfrac{1}{6}k^2$ となることを導け．



(2) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ との交線の方程式を求めよ．

(3) 曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体 V を，z 軸に垂直な平面 $z=t\ \ (0 \leq t \leq 1)$ で切ったとき切り口は上の図形 S と相似な形状となる．この切り口の面積が $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4$ と表されることを示せ．

(4) 立体 V の体積を求めよ．

(豊橋技科大 2014)　　(m20142701)

0.135 xy 平面上の曲線 $y=\cos(x-\pi)+1\ \ (0 \leqq\ x \leqq\ 2\pi)$ と直線 $y=0$ に囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) D の面積 S を求めよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ．

(豊橋技科大 2017)　　(m20172705)

0.136 xy 平面上の二つの曲線 $y=\sin x\quad(0 \leqq x \leqq \pi)$ と $y=-\sin 2x\quad(0 \leqq x \leqq \pi)$ とで囲まれる領域 R がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\sin x$ と曲線 $y=-\sin 2x$ の交点を $0<x<\pi$ の範囲で求めよ．

(2) 領域 R を図示せよ．

(3) 領域 R の面積 S を求めよ．．

(4) 曲線 $y=\sin x$ と 曲線 $y=|\sin 2x|$ の交点を $0<x<\pi$ の範囲で求めよ.

(5) 領域 R を x 軸を中心として 1 回転させて得られる回転体の体積 V を求めよ.

(豊橋技科大 2018) (m20182704)

0.137 次の 2 つの不等式で表される領域の共通部分の体積 V を求めよ.
$x^2+y^2+z^2 \leqq 1$, $x^2+y^2 \leqq a^2$. ただし，$0<a \leqq 1$ とする.

(名古屋大 2004) (m20042802)

0.138 次のサイクロイド曲線に対して，以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \qquad (a>0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$$

(1) 曲線の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(2) $\theta=\pi$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線を x 軸のまわりに回転させるときにできる立体の体積を求めよ．なお，次の公式を用いてもよい.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

$$\text{ただし，}n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数}) \\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

(名古屋大 2008) (m20082802)

0.139 互いに直交する三つの単位ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による正規直交座標系において，
曲線 C を $\boldsymbol{r}(t)=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+2t\,\boldsymbol{k}$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{r}(t)$ および $\boldsymbol{k}$ に直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}(t)$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{k}$ および設問 (1) で求めた $\boldsymbol{u}(t)$ の三つのベクトルに囲まれる 4 面体の体積を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\cos z\,\boldsymbol{k}$ を考える．ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ の曲線 C 上の線積分を求めよ.

(名古屋大 2022) (m20222802)

0.140 底面の半径が a，高さが a の直円柱がある．この底面の直径 AB を含み，底面と 30° の傾きをなす平面で直円柱を 2 つの部分に分けるとき，小さいほうの立体の体積を求めよ.

(三重大 2002) (m20023111)

0.141 空間座標系で，$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqq 1$$

をみたす点の集合の作る立体の体積を求めよ.

(三重大 2004) (m20043108)

0.142 1 辺が 10cm の正方形を底面にもつ，高さ 15cm の四角錐の容器を上下逆さまに置く．この容器に毎秒 0.5cm^3 の割合で水を静かに注ぐとき、以下の問に答えなさい.

(1) t 秒後の水面の深さを y(cm)，水面の 1 辺の長さを x(cm) としたとき，水面の面積 $S(\text{cm}^2)$ と水の体積 $V(\text{cm}^3)$ を x, y であらわせ．また，x と y の関係を示しなさい.

(2)　水面の 1 辺の長さ x(cm) を t で表しなさい。

(3)　水面の面積 $S(\mathrm{cm}^2)$ を t で表し、S の増加する割合を求めなさい.

(三重大 2006)　　(m20063108)

0.143　3 次元空間内で，球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と円柱面 $x^2+y^2=x$ によって囲まれる部分の体積を求めなさい.

(三重大 2013)　　(m20133108)

0.144　xyz 空間中の曲面 $z=5-x^2-y^2$，z 軸を中心軸とする半径 1 の円筒，および xy 平面によって囲まれた領域の体積を求めよ.

(三重大 2016)　　(m20163115)

0.145　(1)　次の関数の不定積分を求めなさい.

$$\sin 3x \cos 2x$$

(2)　次の曲線と y 軸とで囲まれた部分を y 軸周りに回転してできる回転体の体積を求めなさい.

$$y=-3x^2+12 \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

(三重大 2017)　　(m20173103)

0.146　3 次元空間の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S を求めよ.

(2)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 となるベクトルを全て求めよ.

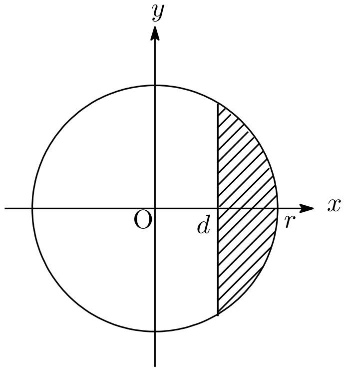
(3)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を求めよ.

(4)　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ からなる行列 $A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 2 & -2\\0 & -2 & 3\end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(三重大 2018)　　(m20183101)

0.147　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\{ax+b(1-x)\}^2}$ を求めよ．ただし，$a \neq b$ とする.

(2)　下図のように，半径 r の球を中心から d 離れた平面で切り取るとき，斜線の凸レンズ状部分の体積を求めよ.



(奈良女子大 2019)　　(m20193207)

0.148　球面 $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (a>0)$ の $x^2+y^2=ax$ の円柱内の体積を求めよ.

(京都大 1996)　　(m19963302)

0.149 次の文章の（あ）〜（え）に適当な数式を入れよ．

ある容積 V の室内の空気には粒子状の汚染物が含まれており，換気を行って汚染物の濃度（単位体積あたりの粒子数）を下げることにした．時刻 t における濃度を $C(t)$ とし，単位時間あたり一定の体積 Q の室内の空気を，汚染物が含まない空気に入れ換えるとすれば，時刻 t から微小時間 δt 後の時刻 $t+\delta t$ までの間に排出される粒子数は $\boxed{\text{（あ）}}$ となる．その結果，濃度は $C(t)$ から $C(t+\delta t)$ に変化した．ただし，室内の濃度は常に空間的に一様であり，換気を開始してからの汚染物の発生はなかったものとする．上記の関係を式で表すと

$$C(t+\delta t) = \boxed{\text{（い）}}$$

である．$\delta t \to 0$ の極限を考えることにより，濃度 $C(t)$ に関する微分方程式

$$\boxed{\text{（う）}}$$

を得る．この微分方程式の解は

$$C(t) = \boxed{\text{（え）}}$$

である．ただし，換気を開始した瞬間を時刻 $t=0$ とし，その時の濃度を C_0 とする．

(京都大 2015)　　(m20153302)

0.150 2つの3次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$
に対して，外積 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は次のように定義される．

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ1，互いに垂直）を，また，$|\ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2) 外積について $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) 3つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ.（ $\cdot$ は，内積を表す.）

(大阪大 1996)　　(m19963501)

0.151 2つの曲線　$(y-a)^2 = a(a+x)$,　$(y-a)^2 = a(a-x)$　がある．ただし，$a>0$ とする．
次の問に答えなさい．

(1) 2つの曲線の交点を求めなさい．また2つの曲線の概形を描きなさい．

(2) $x-y$ 平面において，2つの曲線で囲まれる領域の面積を求めなさい．

(3) 2つの曲線で囲まれる領域を y 軸まわりに1回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

(4) 2つの曲線で囲まれる領域を x 軸まわりに1回転させた時にできる立体の体積を求めなさい．

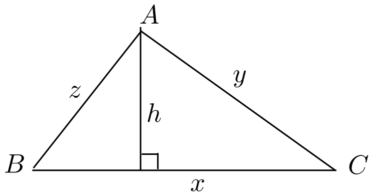
(大阪大 2006)　　(m20063504)

0.152 a を正定数とする．3辺の和が $2a$ という条件を保ちながら変化する三角形 ABC を考える．
$BC=x$, $CA=y$, $AB=z$ とする．頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さを h とする．次の問いに答えよ．

(1) 辺 BC を軸として三角形 ABC を回転してできる立体の体積 V を，x および h を用いて表せ．

(2) 体積 V を x, y の関数として表せ．同時に，変数 x, y の動きうる領域 D を図示せよ．必要があれば三角形 ABC の面積は $\sqrt{a(a-x)(a-y)(a-z)}$ で与えられるというヘロンの公式を用いてもよい．

(3) x, y が領域 D 内において変動するとき，V の値が最大となるときの x, y の値およびそのときの V の値を求めよ．



(大阪大 2009)　　(m20093504)

0.153 ベクトル $\boldsymbol{p}=(p_x,\ p_y,\ p_z)$, $\boldsymbol{q}=(q_x,\ q_y,\ q_z)$ に対して，$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ の内積，外積をそれぞれ $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}\times\ \boldsymbol{q}$ と表す．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$, $\boldsymbol{B}=(B_x,\ B_y,\ B_z)$, $\boldsymbol{C}=(C_x,\ C_y,\ C_z)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$A\cdot(B\times\ C)=B\cdot(C\times\ A)=C\cdot(A\times\ B)$$

(2) 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=(4,3,5)$, $\boldsymbol{b}=(3,1,4)$, $\boldsymbol{c}=(8,3,2)$ が作る平行六面体の体積を求めよ．

(3) 空間内に直交座標系をとる．$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルとする．

$$\boldsymbol{e}_r=\cos u\,\cos v\,\boldsymbol{i}+\sin u\,\cos v\,\boldsymbol{j}+\sin v\,\boldsymbol{k}$$

とおく．正の定数 R に対して，原点を中心とした半径 R の球面 S は，次の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表せる．

$$\boldsymbol{r}=R\mathbf{e}_r,\ \ 0\leqq\ u\leqq\ 2\pi,\ \ -\frac{\pi}{2}\leqq\ v\leqq\ \frac{\pi}{2}$$

球面 S 上の各点 P における外向き法線ベクトルが，点 P の位置ベクトルと同じ向きをもつように S の向きを定める．このとき，ベクトル $\boldsymbol{F}=\dfrac{u}{R}\boldsymbol{e}_r$ に対して，S における次の面積分を求めよ．

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot dS$$

(大阪大 2015)　　(m20153503)

0.154 曲面 $S\ :\ x^2+y^2-z^2+x+y+2=0\ (z>0)$ について以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 S と平面 $z=2$ の交線の長さを求めよ．

(2) 曲面 S と平面 $z=2$ に囲まれた領域の体積を求めよ．

(3) 点 (x,y,z) が曲面 S 上にあるとき，$x+y-2z$ の最大値を求めよ．

(大阪大 2016)　　(m20163508)

0.155 θ が $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$x=2\cos\theta,\quad y=2\sin 2\theta$ で表される点 (x,y) は 1 つの曲線を描く．この曲線の方程式を $y=f(x)$ とする．$y=f(x)$ の 1 点 (a,b) における接線の方程式が $y=-2(x-c)$ となるとき，以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c の値をそれぞれ求めよ．

(2) 区間 $0\leq x\leq a$ における曲線 $y=f(x)$ と区間 $a\leq x\leq c$ における直線 $y=-2(x-c)$ と x 軸で囲まれる領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(大阪大 2017)　　(m20173501)

0.156 3 次元空間の原点 O と 3 点 A, B, C を，$(0,0,0)$, $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(c_1,\ c_2,\ c_3)$，とする．以下の問いに答えよ．

(1) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積を $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ を用いて示せ.

(2) 線分 OA, OB, OC を 3 辺とする平行六面体の体積を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて示せ.

(大阪府立大 2008)　　(m20083604)

0.157 3 次元空間内の点 A, B の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ とする.

(1) 行列

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ.

(2) (1) の行列 C を用いて,

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}\ , \quad ||\boldsymbol{x}|| \leqq 1$$

とするとき，点 B 全体のなす図形の体積を示せ．ただし，$||\boldsymbol{x}||$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の大きさを表す.

(大阪府立大 2011)　　(m20113607)

0.158 (1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ を求めよ.

(2) 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共有部分の体積を求めよ.

(神戸大 2009)　　(m20093804)

0.159 xz 平面において，曲線 $z = \sqrt{8-x^2}$ 　(ただし $0 \leqq x \leqq 2\sqrt{2}$)，直線 $z = x$，および z 軸で囲まれた領域を D とする．また，xyz 空間内において，z 軸を回転軸として D を 1 回転して得られる立体を V とする．以下の各問いに答えよ．

(1) D の概形を描け.

(2) D の面積を求めよ.

(3) V の体積を求めよ.

(4) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ.

(神戸大 2017)　　(m20173810)

0.160 (1) xy 平面上の領域

$$D = \left\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}$$

が極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 　$(0 \leq \theta < 2\pi)$ によって対応する θr 平面上の領域を E とする．D と E を図示せよ.

(2) xyz 空間内の領域 A, B を次のように定める.

$$A = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4, \quad 0 \leq z\right\}$$

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}$$

A と B の共通部分の体積を求めよ.

(神戸大 2020)　　(m20203804)

0.161 xy 平面上の閉領域 D を

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

と定め，

$$z = x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in D)$$

で表される xyz 空間内の曲面を S とする．以下の各問いに答えよ．

(1) S と D で挟まれた部分の体積

$$V = \int_D |x^2 - y^2| dxdy$$

を求めよ．

(2) S の曲面積を求めよ．

(神戸大 2021) (m20213806)

0.162 二次方程式 $ax^2 + x + b = 0$ が実数解を持たないような実数 a, b, および 二変数関数 $f(x, y) = ax^2 + xy + by^2 + x + y$ について，次の問いに答えよ．

(1) 二変数関数 $f(x, y)$ が極値をとる点 (x, y) を，a, b を用いて表せ．

(2) (1) で求めた x, y は a, b の値によって変化するため，$x = x(a, b)$, $y = y(a, b)$ とかける．特に $x > 0$ かつ $y > 0$ となるような a, b について，三辺の長さがそれぞれ $2x$, y, y であり，表面積が 24 である直方体の体積を $V(a, b)$ とする．このとき $V(a, b)$ は最大値を持つが，$V(a, b)$ が最大となるときの a, b の値を求めよ．

(神戸大 2022) (m20223803)

0.163 位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{\boldsymbol{j}} + 3\vec{\boldsymbol{k}}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ および $\vec{\boldsymbol{k}}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを，O は原点を表す．

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を計算し，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ とのなす角 θ に対する $\cos\theta$ を求めよ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ で作られる三角形 OAC の面積を求めよ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ で作られる平行六面体の体積を求めよ．

(鳥取大 2007) (m20073913)

0.164 次の問に答えよ．

(1) サイクロイド：$x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

(2) 曲線 $y = 2x^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに回転したときに得られる立体の体積を求めよ．

(鳥取大 2011) (m20113904)

0.165 点 O を原点とする直交座標系 (x, y, z) において，位置ベクトル，$\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{j} + \vec{k}$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．なお，$\vec{i}$, $\vec{j}$ および $\vec{k}$ はそれぞれ x, y および z 方向における単位ベクトルを表す．

(1) 外積 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ を計算せよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および $\overrightarrow{OC}$ を 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

(鳥取大 2012)　　(m20123903)

0.166　曲線 c : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$ および直線 ℓ : $x=\dfrac{a}{2}$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$x \geqq \dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　$x \geqq \dfrac{a}{2}$ において，曲線 C と直線 ℓ で囲まれる図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(鳥取大 2013)　　(m20133901)

0.167　4 点 $A(1,0,7)$, $B(2,1,8)$, $C(1,0,3)$, $D(2,2,9)$ を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．

(広島大 2001)　　(m20014108)

0.168　$f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ．

(2)　(1) で求めた接平面，yz 平面，zx 平面，xy 平面の 4 つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ．

(3)　(2) の四面体の 4 つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする．
このとき，$\displaystyle\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$　を求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094105)

0.169　$0<r<1$ とする．座標空間において，原点を中心とし半径が 1 である球体 B から，領域 $\left\{(x,y,z)\in B \ \middle|\ x^2+y^2<r^2\right\}$ を取り除いて得られる物体を $B(r)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$B(r)$ の体積を求めよ．

(2)　$B(r)$ の体積が B の体積の $\dfrac{1}{8}$ であるとする．このとき，r の値と $B(r)$ の表面積を求めよ．

(3)　$B(r)$ の表面積の最大値と，最大値を与える r の値を求めよ．

(広島大 2018)　　(m20184104)

0.170　面 $z=x^2+y^2$ と面 $z=x$ で囲まれた部分の体積を求めよ．

(広島大 2022)　　(m20224103)

0.171　円柱面 $x^2+y^2=bx$ と球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ の両者によって囲まれる部分の体積 V を求めよ．

(広島大 2023)　　(m20234103)

0.172　3 次元ユークリッド空間の三つの点 $O(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,0,4)$ について以下の問に答えよ．

(1)　点 $(x,y,0)$ で xy 平面に垂直に交わる直線を l とする．　ただし，$x^2+y^2\leq 9$ である．　線分 OB を z 軸に関して 360 度回転させたときに線分 OB が描く曲面と直線 l の交点を (x,y,z) と表す．このとき，z を x,y の関数で表せ．

(2)　問 (1) で求めた関数を $f(x,y)$ とおく．　三角形 OAB を z 軸に関して 360 度回転させたときに三角形 OAB が描く立体の体積 V は，

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

と書くことができる．ただし，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 9\}$ である．この 2 重積分を計算することにより，V の値を求めよ．

(広島市立大 2011)　　(m20114203)

0.173 放物線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる体積 V_1 および y 軸のまわりに回転してできる体積 V_2 を求めなさい.

(山口大 2006)　　(m20064301)

0.174 定数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき, パラメータ表示された曲線

$$\begin{cases} x = & a\cos t \\ y = & b\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

を考える.

(1) この曲線の概形を描け.

(2) $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点におけるこの曲線の接線の方程式を求め, (1) で描いた図に書き入れよ.

(3) もとの曲線を y 軸を中心に回転したときにできる図形の体積を求めよ.

(愛媛大 2005)　　(m20054605)

0.175 $x-y$ 平面の領域 $D\ :\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1$ 上で, 曲面 $z = xe^{-y}$ と平面 $z = 0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074613)

0.176 $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とする.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(2) 空間内の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ における曲面 $z = f(x, y)$ の接平面の方程式を求めよ.

(3) 空間における領域

$$\Omega = \left\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 \leqq\ a^2\ \ 0 \leqq\ z \leqq\ f(x, y)\right\}$$

の体積を求めよ. ただし, $0 < a < 1$ とする.

(愛媛大 2013)　　(m20134603)

0.177 (1) 次の不定積分を求めよ. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx$

(2) 次の定積分を求めよ. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sin^{-1} 2x\ dx$

(3) 曲線 $y = \sin^{-1} 2x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$, 直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

ただし, $\sin^{-1} x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ とする.

(愛媛大 2017)　　(m20174602)

0.178 xyz 空間内の円柱面 $T\ :\ x^2 + y^2 = x$ と曲面 $S\ :\ z = \sqrt{x^2 + y^2}$ について, 次の設問に答えよ.

(1) T , S と xy 平面で囲まれる立体の体積を求めよ.

(2) 曲面 S の円柱面 T で切れ取られた部分の曲面積を求めよ.

(九州大 2003)　　(m20034703)

0.179 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を 2 つの空間ベクトルとする. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を S とする.

(1) S は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ と内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を用いて

$$S=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

と表されることを示せ．

(2) 以下の設問では，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\-3\\-2\end{pmatrix}$ とする．このとき，S を求めよ．

(3) $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ とする．$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を含む平面上にあるベクトル $\boldsymbol{d}$ で，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$ がその平面と直交するものを求めよ．

(4) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積を求めよ．

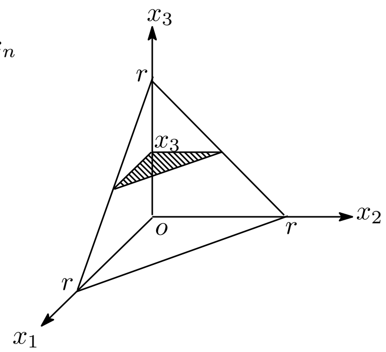
(九州大 2003)　　(m20034705)

0.180　正の数 r と整数 $n\geq 1$ に対して

$$K_n(r)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\ |\ x_i\geq 0\ \ (1\leq i\leq n)\ ,\ \sum_{i=1}^{n}x_i\leq r\}$$

とおくと, $K_n(r)$ の体積 $|K_n(r)|$（ただし, $n=1$ のときは長さであり, $n=2$ のときは面積）は次で与えられる.

$$|K_n(r)|=\int\cdots\int_{K_n(r)}1\ dx_1\cdots dx_n$$



次の問に答えよ.

(1) $|K_1(r)|$, $|K_2(r)|$ を求めよ.

(2) 右図を参考にして $|K_3(r)|$ を求めよ.

(3) $|K_n(r)|$ を求めよ.

(九州大 2004)　　(m20044701)

0.181　2 変数関数 $z=x^2-y^2$ について次の設問に答えよ.

(1) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面の xy 平面 $z=0$ による切り口はどんな図形になるか，方程式と図で説明せよ.

(2) $z=x^2-y^2$ のグラフの表す曲面と，柱面 $x^2+y^2=1$ と xy 平面 $z=0$ で囲まれる立体図形 : $0\leqq\ z\leqq\ x^2-y^2$, $x^2+y^2\leqq\ 1$ の体積を求めよ.

(3) $z=x^2-y^2$ のグラフの作る曲面が，柱面 $x^2+y^2=1$ で切り取られる部分 : $z=x^2-y^2$, $x^2+y^2\leqq\ 1$ の曲面積を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074702)

0.182　xyz 空間において，　$z=e^{-(x^2+y^2)}$　で表される曲面 Σ がある．以下の問いに答えよ．

(1) 曲面 Σ と　$z=0,\ x^2+y^2=na^2$　によって囲まれる部分の体積 V_n を求めよ．ただし，n は自然数である．

(2) 曲面 Σ と　$z=0,\ x=a,\ x=-a,\ y=a,\ y=-a$　によって囲まれる部分の体積を V とする．xy 平面において，　$y=e^{-x^2},\ y=0,\ x=a,\ x=-a$　で囲まれる部分の面積を S とした時，V と S の関係を示せ．

(3) V を V_1, V_2 と比較することによって，　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$　を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084708)

0.183 $a>0$ として，xy 平面上の曲線 $(a-x)y^2=a^2x$ を考える．

(1) 上の曲線の概形をかけ．

(2) 上の曲線を $x=0$ のまわりに回転してできる曲面を境界とする 3 次元領域（回転軸を含む部分）の体積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084710)

0.184 3 次元空間において二つの曲面　$A\ :\ x^2+y^2+z^2=1\ ,\qquad B\ :\ x^2+y^2=x$　を考える．

(1) これら二つの曲面で囲まれる領域の体積を求めよ．

(2) 曲面 A が曲面 B によって切り取られる部分の曲面積を求めよ．

(九州大 2008)　　(m20084711)

0.185 xyz-空間に，4 点 $P(-1,1,1)$，$Q(-1,2,2)$，$R(0,2,0)$，$S(1,-1,-1)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ のなす角を求めよ．

(2) xyz-空間において平面の方程式は，一般に，適当な定数 a,b,c,d により $ax+by+cz=d$ と表される．3 点 P,Q,R を通る平面の方程式を求めよ．

(3) 点 S から，3 点 P,Q,R を通る平面に垂線を下ろした足を点 H とする．ベクトル $\overrightarrow{SH}$ を求めよ．

(4) 3 角錐 $PQRS$ の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094708)

0.186 曲線 C は xy-平面の第一象限と第二象限に描かれているとし，次の条件を満たすとする．

- C は y 軸上の点 $(0,a)$ $(a>0)$ を通る．
- 第一象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられ，第二象限内では接線の傾きが $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$ で与えられる．

このとき

(1) 曲線 C は第一象限内では $x=a\log\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられ，第二象限内では $x=a\log\dfrac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y}+\sqrt{a^2-y^2}$ で与えられることを示し，C の概形を描け．

(2) 曲線 C を x 軸の周りに回転させて出来る回転体の体積を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094712)

0.187 3 次元空間内で

$V=\{(x,y,z)\ ;\ x=t\cos\theta\ ,\ y=t\sin\theta\ ,\ z=r\ ,\ 0\leq t\leq r\ ,\ 0\leq r\leq 3\ ,\ 0\leq\theta<2\pi\}$

で表される集合 V を考える．

(1) V の体積を求めよ．

(2) L を平面

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + 1$$

とし, $S = V \cap L$ とおく.

$$\min\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\} \qquad \max\{z\ ;\ (x, y, z) \in S\}$$

を求めよ.

(九州大 2010)　　(m20104705)

0.188 互いに異なる正の定数 a, b, c を考える．空間内の点 $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ $C(0,0,c)$ を頂点とする 4 面体を V とする．また V 内部にある点を $P(x,y,z)$ とする．以下の問いに答えよ.

(1) 点 A, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_1, 点 O, B, C, P を頂点とする 4 面体を V_2, 点 O, C, A, P を頂点とする 4 面体を V_3, 点 O, A, B, P を頂点とする 4 面体を V_4 とする．4 面体 V_1, V_2, V_3, V_4 の体積比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ を a, b, c, x, y, z を用いて表せ．ただし, λ_j $(j = 1,2,3,4)$ は $0 \leq \lambda_j \leq 1$ および $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ を満たす実数とする.

(2) 関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{\phi} = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 \qquad \boldsymbol{\psi} = \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2$$

で定める．関数 $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(x,y,z)$ を, a, b, c, x, y, z を用いて表せ.

(3) 関数 $f = f(x,y,z)$ を $f(x,y,z) = e^{x+y+z}\sin(x-z)\boldsymbol{\phi}(x,y,z) + x^2\sin(-x+y)\psi(x,y,z)$ で定める．このとき, 積分

$$\int_{\ell_{AB}} f \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．ただし, ℓ_{AB} は点 A から B に進む方向を正とする線分, $\boldsymbol{r}$ は線分 ℓ_{AB} 上にある点の位置ベクトルである.

(4) 関数 f を前問で定めた関数とする．このとき, 積分

$$\int_S (\nabla \times f) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし, S は点 O, B, A を頂点とする 3 角形, $\boldsymbol{n}$ は z 成分が負となる S の単位法線である.

(九州大 2022)　　(m20224702)

0.189 二次曲線 $y = ax^2 + b$ と直線 $x = -1$, $x = 1$ および $y = 0$ とで囲まれる部分を面 D とする．このとき，以下の各問いに答えなさい．ただし，a, b は定数であり，$a > 0$, $b \geqq 0$ とする.

(1) 面 D の部分に斜線を施して図示しなさい.

(2) 二次曲線の $-1 \leqq x \leqq 1$ の部分を，曲線が x 軸に接するまで y 軸と平行に移動したとき，この曲線の移動部分がつくる面の面積 S を求めなさい.

(3) 面 D を y 軸を中心に回転させたときの回転体の体積 V_y，および x 軸を中心に回転させたときの体積 V_x を求めなさい．ただし，$a = b = 1$ とする.

(4) $b = 0$ のとき，$V_y = V_x$ が成り立つ a の値を求めなさい.

(佐賀大 2003)　　(m20034910)

0.190 極座標 (r, θ, ϕ) における「面積素」および「体積素」を求め，これらの結果を用いて，半径 a の球の面積 S，および体積 V を計算しなさい.

(佐賀大 2003)　　(m20034933)

0.191 辺の長さの総和が 1 の直方体のうち, 体積が最大になるものを求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054904)

0.192 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ と円柱 $x^2+y^2 \leq x$ の共通部分の体積を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054905)

0.193 放物面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

(佐賀大 2005) (m20054934)

0.194 ある気体の温度 T，圧力 P，体積 V が次の関係式で表せるとき，以下の (1),(2) の偏導関数を求めなさい．ただし，a, b, R は定数である． $(P + a/V^2)(V - b) = RT$

(1) $(\partial P/\partial T)_V$ (2) $(\partial^2 P/\partial V^2)_T$

(佐賀大 2006) (m20064925)

0.195 球 $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ を $z = 2$ で切り取ったとき，$z \geq 2$ の部分の体積を求めよ.

(佐賀大 2006) (m20064943)

0.196 $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$ を x 軸の周りで回転させてできる体積 V を求めよ．ただし，a, b は，正の定数である.

(佐賀大 2007) (m20074925)

0.197 空間内で $x^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$ と表示される円柱の xy 平面 $(z = 0)$ より上，かつ，平面 $z = x$ より下にある部分の体積を求めよ.

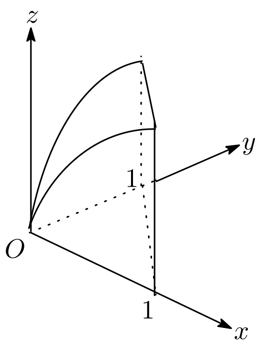
(佐賀大 2009) (m20094925)

0.198 (1) 曲線 $xy = 3$ と直線 $x + y = 4$ の交点の座標をすべて求めよ.

(2) 曲線 $xy = 3$ と直線 $x + y = 4$ で囲まれる図形を，x 軸まわりに回転した回転体の体積 V_x と y 軸まわりに回転した回転体の体積 V_y を求めよ.

(佐賀大 2014) (m20144910)

0.199 図に示されている，曲線 $z = \sqrt{x+y}$ と平面 $x + y = 1$ および三つの座標平面で囲まれた立体の体積を求めよ.



(佐賀大 2018) (m20184911)

0.200 円柱面 $x^2 + y^2 = 1$ (z は任意) と 2 平面 $z = y$ および $z = 0$ で囲まれた立体について考える．次の問いに答えよ.

(1) 円柱面と 2 平面で囲まれた領域 D を式で表せ.

(2) 円柱面と 2 平面で囲まれた立体の体積を求めるための積分の式を示せ.

(3) (2) の積分を求めよ.

(佐賀大 2018) (m20184918)

0.201 平行六面体 $ABCD-EFGH$ の体積を v とし，また，この六面体の各面の対角線の交点を $PQRSTU$ とし，平行六面体 $APQR-STGU$ の体積を v' とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\mathbf{c}$ を用いて v を表しなさい．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}=\mathbf{c}$ を用いて v' を表しなさい．

(3) v を用いて v' を表しなさい．

(佐賀大 2021)　(m20214924)

0.202 次の設問 (1),(2) に答えよ．

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int e^{2x}\sin 3x dx$$

(2) 次の曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ．

$$y=\frac{1}{x+1}\quad,\qquad x\text{ 軸},\quad y\text{ 軸},\quad \text{直線 } x=2$$

（長崎大 2004）　(m20045004)

0.203 方程式 $y=x^2+2x+2$ について, 以下の問に答えよ．

(1) この方程式を示すグラフを図示せよ．

(2) このグラフを x 軸方向に $+3$, y 軸方向に -2 移動したグラフの方程式を示せ．

(3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれる領域を x 軸について回転させた時の体積を求めよ．

（長崎大 2004）　(m20045005)

0.204 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 次の 3 つの曲線で囲まれた図形を x 軸に関して回転してできる回転体の体積を求めよ．

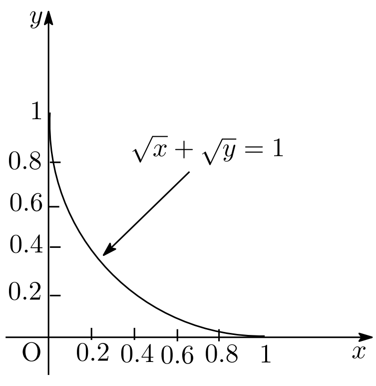
$$y=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,,\qquad x\text{ 軸}\,,\qquad \text{直線 } x=2$$

(長崎大 2010)　(m20105013)

0.205 右図に示すような曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ について，以下の問題に答えよ．

(1) この曲線と直線 $x=0,\ y=0$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) この曲線を x 軸のまわりに回転して出来る回転体の体積を求めよ．



(長崎大 2011)　(m20115005)

0.206 半径 R の半球状のドームがある．

このドーム内に納めることの出来る，最大の体積を持つ円柱を求めたい．

(1) この円柱が半球に接しているとき，高さ h の円柱の体積 V を，R と h を用いて示せ．

(2) このとき h に対して円柱の体積 V はどの様に変化するか示せ．

(3) 円柱の体積が最大となる時，円柱の半径と高さを各々 R を用いて示せ.
また，最大となる円柱の体積と半球状のドームの体積との比はいくらか.

(大分大 2002)　　(m20025102)

0.207 座標空間において，原点を中心とした半径 a の球 B の体積 V を，以下の手順で求める.

球 B を xy 平面で切ったときの断面のうち，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を D と表す.

また，球 B の表面（球面）のうち $z \geqq 0$ を満たす部分を表す方程式を $z = f(x,\ y)$ とする.

さらに，D を xy 平面内の領域とみなし，重積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,\ y)dxdy$ を考える.

このとき，次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $z = f(x,\ y)$ を具体的に書き下せ.

(2) 領域 D を xy 平面に図示せよ.

(3) 領域 D を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと，I は

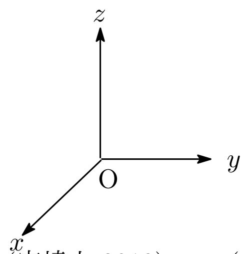
$$I = \int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{イ}}} \left(\int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\boxed{\text{エ}}} \boxed{\quad\text{オ}\quad}\, d\theta \right) dr$$

と書き直せる．空欄 $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数または式を答えよ.

(4) I を計算することによって，$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ であることを示せ.

(宮崎大 2018)　　(m20185305)

0.208 空間において，方程式 $2x + y + 2z - 2 = 0$ で表される平面を α とする．これについて，次の各問に答えよ.



(1) 平面 α を，右図のような座標空間の中に図示せよ.

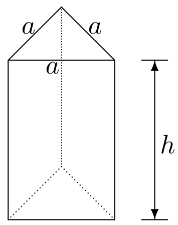
(2) 平面 α，および，次の 3 つの平面

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

で囲まれた部分の体積を，<u>重積分を用いて</u>求めよ.

(宮崎大 2019)　　(m20195304)

0.209 断面の一辺の長さ a，長さが h の三角柱の体積が最大になるように a と h を定めるとき，a と h の比を求めよ.
ただし，$a + h = 20$ とする.



（鹿児島大 2001）　　(m20015412)

0.210 高さ h，底面の半径 r，母線の長さ l の円錐の体積 V 及び表面積 S を求めよ.

(鹿児島大 2006)　　(m20065409)

0.211 曲線：$y = a\sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ （a：定数）と x軸によって囲まれた部分を　x軸のまわりに　1 回転してできる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2009)　　(m20095408)

0.212 ベクトルに関する以下の各問に答えよ.

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について，$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\dfrac{|\boldsymbol{c}|}{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})} \neq 0$ が成り立つ．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，求める θ の範囲は $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とする.

(2) $\overrightarrow{OA}=(1,2,3)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$ であり，原点 O から $\triangle ABC$ に垂線を下ろしたときの交点を D とする．$\overrightarrow{OD}$ ならびに $\triangle ABC$ の面積 S，四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2012)　　(m20125405)

0.213 曲線：$y=x^3$ を y 軸の周りに 1 回転して得られる回転面と，$y=1$，$y=8$ を通って y 軸に垂直な 2 平面とで囲まれた領域の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125415)

0.214 曲線：$y=x^2$ と曲線：$x=y^2$ で囲まれる領域の面積を求めなさい．また，その領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めなさい.

(鹿児島大 2012)　　(m20125420)

0.215 3 次元の直交座標系 $O-xyz$ において，点 $A(1,2,-1)$，点 $B(2,1,1)$，点 $C(-1,4,5)$ がある．ただし，点 O は xyz 座標系の原点 $(0,0,0)$ である．以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ.

(2) 線分 BC の中点を点 D とする．点 A，D を通る直線 ℓ の方程式を求めよ.

(3) 線分 OA，OB，OC とこれらに平行な辺で囲まれる平行六面体の体積 V を求めよ.

(鹿児島大 2018)　　(m20185423)

0.216 半径 a の球に内接する直円柱のうちで，体積が最大になる直円柱の高さと体積を求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215419)

0.217 放物線：$y=x^2 \ \ (0 \leq x \leq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器を水で満杯にする．この容器の底に排水口があり，時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする．V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ とする．このとき，次の問に答えなさい.

(1) 水の深さ h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表しなさい.

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めなさい.

(鹿児島大 2021)　　(m20215422)

0.218 $y=\sin x \ \ (0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2005)　　(m20055501)

0.219 3 つのベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ についてのスカラー 3 重積 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\ \boldsymbol{C})$ は，ベクトル $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ で形成される平行六面体の体積に等しいことを示せ．ただし，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ はすべてが同一平面上にないものとする.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115505)

0.220 3 つの異なるベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を 3 辺にもつ平行六面体の体積 V が

$$V=|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})|$$

と表されることを示せ.

(室蘭工業大 2011)　　(m20115509)

0.221 $y = \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.

(室蘭工業大 2015)　　(m20155503)

0.222 直交座標系の任意の点 $P(x, y, z)$ において，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を考える.

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y,\ A_z) = (x, y, z)$ とし，原点を中心として半径 a の球面を閉曲面 S とした時，以下の問いに答えよ.

(1) 閉曲面 S 上の任意の点における法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ ($|\boldsymbol{n}| = 1$) を求めよ.

(2) 閉曲面 S 上全体にわたる面積分 $\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ.

(3) 閉曲面 S 内全体にわたる体積分 $\displaystyle\iiint \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\, dV = \iiint \bigtriangledown \cdot \boldsymbol{A}\, dV$ を求めよ.

(室蘭工業大 2016)　　(m20165508)

0.223 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4$ と円柱 $x^2 + y^2 \leqq 1$ の共通部分の体積を求めよ.

(岡山県立大 2005)　　(m20055604)

0.224 以下の式で表される多変数関数 z について，次の問いに答えよ.

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ.

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ.

(3) この曲面上の $x = 2,\ y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする．V の値を求めるための二重積分の式，ならびにその積分領域 D を数式で表せ.
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.225 $z = x^2 + y^2$ について次の問いに答えよ.

(1) $w = \log(z)$ の関係があるとき，2 階偏導関数 $w_{xx},\ w_{xy},\ w_{yx},\ w_{yy}$ を求めよ.

(2) 曲面 z と平面 $x + y = 2$，ならびに 3 つの座標平面で囲まれる立体の体積 V を求めるための 2 重積分の式を記述せよ．ただし，体積 V は計算で求めなくともよい.

(香川大 2016)　　(m20165702)

0.226 円柱 : $x^2 + y^2 \leq 1$ のうち放物曲面 : $z = 2 - x^2 - y^2$ と平面 : $z = 0$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

(香川大 2022)　　(m20225704)

0.227 次の問に答えよ.

(1) 原点 O を中心とし, 半径 a の円の上半分を D とする. 次の 2 重積分を求めよ ($a > 0$).

$$I = \iint_D y\, dxdy$$

(2) 平面 $z = y$ と xy 平面の間で, xy 平面上の半円 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ の上にある立体の体積 V を求めよ ($a > 0$).

(島根大 2005)　　(m20055813)

0.228 次の問いに答えよ．a, b, c はすべて正の数とする.

(1) 3 次元空間において頂点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ をもつ三角形の面積 S を求めよ．

(2) 3 次元空間において頂点 $O(0,0,0)$, P, Q, R をもつ四面体の体積を V とする．(1) で求めた S と V との比 S/V を考える．a,b,c が $abc=1$ をみたしながら変化するときの S/V の最小値を求めよ．

(島根大 2008)　　(m20085803)

0.229 xy 座標平面において放物線を $y=\dfrac{1}{3}x^2$ とし，直線を $y=x$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 放物線と直線の二つの交点 $A(x_1,\ y_1)$ と $B(x_2,\ y_2)$ の座標を求めよ．ただし，$x_2>x_1$ とする．

(2) 点 $A(x_1,\ y_1)$ から点 $B(x_2,\ y_2)$ までの放物線の長さ L を求める式を示せ．すなわち，式だけを示せばよく，値を求める必要はない．

(3) 点 $B(x_2,\ y_2)$ における放物線の接線と法線の方程式を求めよ．

(4) 放物線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(5) 放物線と直線で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185801)

0.230 直交座標系 (x,y,z) において，直線 $\ell : x-1=-y+3=-z-5$ および点 $A(4,5,2)$ に対し，以下の問いに答えなさい．

(1) ℓ および A を含む平面を α とする．α の方程式を求めなさい．

(2) A から ℓ に垂線 AH を引くとき，H の座標を求めなさい．

(3) 原点 O から α に垂線 OH' を引くとき，H' の座標を求めなさい．

(4) 四面体 $OAHH'$ の体積を求めなさい．

(東京都立大 2020)　　(m20205901)

0.231 座標空間内に原点 $O(0,0,0)$，および 4 点 $A(1,-1,0)$，$B(-1,3,2)$，$C(2,1,3)$，$D(-1,0,3)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の 1 次結合として表せ．

(2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ．

(東京都立大 2020)　　(m20205909)

0.232 $x^2+(y-2)^2=k^2$ を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ．ただし $0<k<2$ とする．

(東京都立大 2022)　　(m20225906)

0.233 関数 $z=x^2+xy+y^2$ のグラフと xy 平面，および円筒 $x^2+y^2=R^2$ で囲まれた領域の体積を求めよ．ただし，R は正の実数である．

(滋賀県立大 2013)　　(m20136004)

0.234 (1) 3 次曲線 $y=x^3-x^2-x+1$ のグラフの概形を描け．

(2) 設問 (1) の曲線と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(宇都宮大 2007)　　(m20076103)

0.235 平面上の，曲線 $y^2=x-1$，および，直線 $y=x-3$，について下の問いに答えよ．

(1) これらの曲線と直線で囲まれた図形 S の面積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(2) (1) の図形 S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．計算経過も記入せよ．

(宇都宮大 2015)　　(m20156103)

0.236 方程式 $(x^2-1)^2+y^2=1$ の表す曲線 C について，下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，円周率は π と表記し，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2016)　　(m20166103)

0.237 曲線 $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ と直線 $y=x,\ x=1,\ x=4$ で囲まれた図形を A とする．
下の問いに答えよ

(1) 図形 A の面積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(2) 図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2019)　　(m20196103)

0.238 x–y 平面上の曲線 $4x^2+y^2=4$ に囲まれた図形を x 軸回りに回転させて得られる回転体の体積を求めなさい．

(宇都宮大 2019)　　(m20196106)

0.239 実数 $a>1$ として下の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(1\leq x\leq a)$ を x 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体の側面積 $S(a)$ の式を記述し，$2\pi\displaystyle\int_1^a\frac{dx}{x}$ より大きいことを示せ．なお，計算過程も記入せよ．

(3) (1) と (2) で求めた $V(a)$，$S(a)$ に対して a を無限大に近づけたとき，おのおのの極限を求めよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206103)

0.240 次の曲線および直線で囲まれた部分からなる図形について，各問に答えなさい．

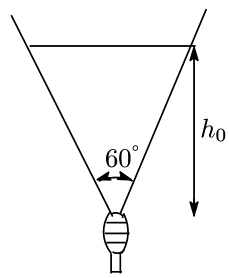
$$y=\sqrt{2x}\ ,\quad x=9\ ,\quad y=0$$

(1) この図形の面積を求めなさい．

(2) この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166403)

0.241 右の図のような頂角が 60° の円錐形の容器に，水が h_0[cm] の深さまで入っている．但し，この円錐形の容器の頂点は真下を向いており，中心線は垂直に保たれている．いま，時刻 $t=0$ において，この容器の底から水を抜き始めた．



(1) 時刻 t[分] における水位を h[cm] とする．この時の容器に残っている水の体積 V[cm^3] の時間変化は次式のように表すことが出来る．
空欄 $\boxed{\text{ア}}$ に適切な記号や数値からなる数式を入れなさい．

$$-\frac{dV}{dt}=-\frac{\boxed{\text{ア}}\,dh}{dt}$$

(2) 流出速度が水位に比例する時，$-dV/dt = kh$ と表せるので上式は次式となる．

$$-\frac{\boxed{\text{ア}}\,dh}{dt} = kh$$

ここで，k[cm^2/分] は比例定数である．時刻 t[分] における水位 h[cm] を，数値や記号などを用いて表しなさい．

(東京海洋大 2016)　　(m20166404)