[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：対称行列

0.1 次の対称行列について，以下の設問に答えよ．

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ は $\mathbf{A}$ の固有ベクトルの一つであることを示し，対応する固有値を求めよ．

(2) $\mathbf{A}$ の固有ベクトルのうち，(1) で与えられた $\boldsymbol{x}_1$ を除くもの 2 つ $(= \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3)$ を挙げよ．ただし，それらの大きさを $|\boldsymbol{x}_2| = |\boldsymbol{x}_3| = 1$ とし，3 つの固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ が互いに直交するものを選ぶこと．

(3) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda}$ ($\mathbf{\Lambda}$: 対角行列) となるような直交行列 $\mathbf{P}$ を求め，これを用いて $\mathbf{A}^n$ を計算せよ．

(北海道大 2013)　　(m20130101)

0.2 2 次の正方行列 A による 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．ただし, A, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の要素はすべて実数である．このとき，以下の設問に答えよ．なお，途中の計算手順を詳しく記述すること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ．また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．ただし，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ を頂点とする平行四辺形の面積は $|ad - bc|$ で与えられる．

(2) A を直交行列 $\begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix}$(ただし，$r^2 + s^2 = 1$) とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を求めよ. また，この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対称行列である．A を直交行列を用いて対角化せよ．

(4) (3) と同じく，$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される 4 つの点の像を考える．この 4 つの点を頂点とする四角形の面積が，1 次変換前と比較して 1 次変換後に何倍になるかを求めよ．

(北海道大 2014)　　(m20140102)

0.3 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．ただし，a, b は定数とする．

(1) 定数 a, b を求めなさい．

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 行列 A の固有ベクトルを求めなさい.

(岩手大 2013) (m20130302)

0.4 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) 固有値を求めなさい.

(2) 行列 A を直交行列により対角化しなさい.

(3) $X^2 - E = A$ を満たす行列 X をひとつ求めなさい.

(岩手大 2014) (m20140302)

0.5 $\mathbb{R}^3$ において x, y の標準内積を (x, y) で表す. 3 次実対称行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める. このとき, 次の問に答えよ.

(1) A は相異なる正の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を持つ. λ_1, λ_2, λ_3, および それらに対する長さ 1 の固有ベクトル ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 をそれぞれ求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の一次変換 $f_j \quad (j = 1, 2, 3)$ を

$$f_j \ : \ x \mapsto (x\,,\ \phi_j)\phi_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

で定める. $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する f_j の表現行列を P_j とするとき,

$$P_j^2 = P_j\,, \quad j = 1, 2, 3$$

$$P_j P_k = O\,, \quad j \neq k \text{ のとき}$$

を示せ. ただし, O は零行列である.

(3) $m = 1, 2, \cdots$ に対して, 行列 B を

$$B = \lambda_1^{\frac{1}{m}} P_1 + \lambda_2^{\frac{1}{m}} P_2 + \lambda_3^{\frac{1}{m}} P_3$$

と定めるとき, $B^m = A$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2005) (m20050506)

0.6 対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で定義する.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2006) (m20060503)

0.7 3次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ および3次元ベクトル $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を用いて表される2次形式

$$f(\boldsymbol{m}) = {}^t\boldsymbol{m}\boldsymbol{A}\boldsymbol{m} = 5x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xy + 4yz + 8xz$$

を考える．ここで，左上付き添字 t は転置を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ．また，各固有値の重複度を答えよ．

(3) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ が対角行列となるような直交行列 $\boldsymbol{P}$ を1つ求めよ．また，この $\boldsymbol{P}$ を用いて $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．

(4) 3次元ベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ を考える．(3) で求めた $\boldsymbol{P}$ を用いて変数変換 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}$ を行い，$f(\boldsymbol{m})$ の標準形を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120502)

0.8 3次の対称行列 A および3次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $f(x, y, z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで，左上付き添字 ^{t} は転置を表す)．$f(x, y, z)$ を x, y および z の多項式で表せ．

(3) 原点を通り A の固有ベクトルに平行な直線と，2次曲面 $f(x, y, z) = 18$ との交点をすべて求めよ．

(東北大 2014)　　(m20140502)

0.9 3次実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) A のすべての固有値を求めよ．

(2) (1) で求めた固有値のそれぞれに対して，固有空間の次元を求めよ．

(3) 3次直交行列 P で，${}^tPAP$ が対角行列となるものを一つ求めよ．ただし，${}^tP$ で P の転置行列を表す．

(東北大 2015)　　(m20150506)

0.10 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{r}$ について以下の問に答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，固有ベクトルの大きさを1とする．

(2) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって角度 θ 回転させたものをベクトル $\boldsymbol{s}$ とする．$\theta = 30^\circ$とした場合の回転行列 $\boldsymbol{R}$ とベクトル $\boldsymbol{s}$ を求めよ．ただし，θ は反時計回りを正とする．

(3) 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = [\,1, 0\,]^t$, $\boldsymbol{e}_2 = [\,0, 1\,]^t$ を行列 $\boldsymbol{R}$ によってそれぞれ原点に対して反時計回りに角度 $\theta = 30^\circ$回転させたベクトルを $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ とする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{s}$ を $(\boldsymbol{e}'_1\ \ \boldsymbol{e}'_2)$ 座標系により表記したベクトル $\boldsymbol{s}'$ を求めよ．さらに $\boldsymbol{s}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{s}$ となる変換行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(東北大 2016)　　(m20160504)

0.11　3 次対称行列 A を次で与える．
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ．

(2) A の固有ベクトルから成る $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970610)

0.12 (1) 次の対称行列の固有値と固有ベクトルを全て求めよ．
$$\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(2) n 行 n 列の実対称行列 A の，n 個の固有ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ が，全て求まったとしよう．ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ はそれぞれ列ベクトルとし，互いに直交するように取った．次に，列ベクトル $b_1, \cdots, b_n$ を横に並べて作った，n 行 n 列の行列を B としよう．即ち，$B = (b_1, \cdots, b_n)$．このとき，行列の積 $B^T AB$ は対角行列であることを証明せよ．但し，B^T は B の転置行列を表すものとする．

（お茶の水女子大 2000）　　(m20000614)

0.13 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(2) (1) の条件のもとで次の重積分を計算せよ．ただし，必要なら $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ を用いてよい．
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}dxdy$$

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030608)

0.14 (1) 実対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値がすべて正である条件を書け．

(お茶の水女子大 2003)　　(m20030613)

0.15　次の実対称行列 B の固有値, 固有ベクトルを求め, 直交行列により対角化しなさい．
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶に水女子大 2010)　　(m20100612)

0.16　行列に関する次の問に答えよ．

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$
の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい．

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて
$O^T BO$ とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1，c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1，c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

0.17 ある対称行列 F が直交行列 P によって対角行列 $F' = P^T FP$ へと変換された．ここで T は行列の転置を表す．以下の問に答えなさい.

(1) F のトレース（対角成分の和）はこの変換により不変であること，つまり $T_r\, F = T_r\, F'$ を証明しなさい.

(2) 行列 F が以下のように与えられたとき，P と F' を求めなさい.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 F と F' のトレースを求めなさい.

(お茶の水女子大 2016)　　(m20160604)

0.18 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ．変換に用いた直交行列も答えること.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170607)

0.19 次の式で定義される実対称行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.

(3) 行列 $\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200605)

0.20 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して，次の問に答えよ.

(1) 行列 A を対称行列 S と交代（逆対称，反対称）行列 K の和で表せ.

(2) 行列 $KS+SK$ は対称行列，交代行列，その他の行列の何れか.
又，行列 $KSKS+SKSK$ は上記の三つの行列の何れか.

(3) 行列 A の固有方程式を示せ.

(4) 行列 A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(東京大 1997） (m19970702)

0.21 行列 A を $A = \begin{bmatrix} x & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ y & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．ただし，x と y は実数とする.

以下の問いに答えよ．なお，${}^tX$ を X の転置行列とすると，$X = -{}^tX$ を満たす X を交代行列と呼ぶ.
また，$X = {}^tX$ を満たす X を対称行列と呼ぶ.

(1) A は交代行列と対称行列の和で表すことができる．交代行列を T，対称行列を S とするとき，T と S を求めよ.

(2) T は正則か否かを示せ.

(3) $x = y = 0$ のとき．T の固有値を求めよ.

(4) 行列 B を $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & y & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする.
$y \neq 0$ のとき，A は正則でなく，B は正則であった．このとき，x を求めよ.

(東京大 2012) (m20120705)

0.22 実対称行列 A について，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値がどれも零でないことと A が正則であることは同値であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$ に対し，適当な直交行列 P によって $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ.

(東京工業大 2009) (m20090801)

0.23 (1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上における関数

$$f(x,y,z) = 3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2yz+2zx$$

の最大値と最小値を求めよ.

(横浜国立大 1995） (m19951102)

0.24 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$ とするとき，

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x}$ が存在するような実数 t を求めよ．

(3) 3 変数関数

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz$$

の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上における最大値と最小値を求めよ．

(横浜国立大 1996) (m19961102)

0.25 (1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは長さ 1 となるように表せ

(2) 数ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を，問 (1) で求めた固有ベクトルの一次結合で表せ．

(横浜国立大 1997) (m19971102)

0.26 以下の設問に答えなさい．

(1) 次の対称行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた固有値と固有ベクトルを用いて A^n を求めなさい．
ここで， A^n は $A^n = A \cdot A \cdot A \cdots A$ のように A を n 回掛け合わせることを意味する．
例えば， $A^2 = A \cdot A$ ， $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A$ である．

(千葉大 2000) (m20001204)

0.27 次の 2 次形式について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2$$

(1) $f(x, y)$ は 2 次の実対称行列 A とベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，次のように書き直すことができる．

$$f(x, y) = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

A を求めなさい．ここで，$\mathbf{x}^T$ は $\mathbf{x}$ の転置を表わす．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めなさい．次に， 2 次曲線 $f(x, y) = 1$ を，固有ベクトルの方向を新しい座標軸とする座標系 $O - X, Y$ で表わし，その概形を示しなさい．

(千葉大 2002) (m20021204)

0.28 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 A の固有値を全て求めなさい.

(2) (1) で求めた固有値に対応する大きさ (長さ)1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ をそれぞれ求めなさい.

(3) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ としたとき. $PP^{-1} = P^{-1}P = I$ を計算することによって, P が直交行列であることを確認しなさい. ただし, I は単位行列とする.

(4) $P^{-1}AP$ を計算して, 行列 A を対角化しなさい.

(千葉大 2012) (m20121202)

0.29 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えなさい.

(1) 行列 A は, 異なる二つの実数の固有値 λ_1, λ_2 を持つ（ただし, $\lambda_1 < \lambda_2$）. λ_1, λ_2 を求めなさい.

(2) 行列 A は, ある直交行列 Q によって $Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ と対角化できる. この直交行列 Q を求めなさい. （なお, 実正方行列 Q が ${}^tQQ = I$（I は単位行列）を満たすとき, Q を直交行列という）

(千葉大 2017) (m20171202)

0.30 2 次の実対称行列 A で作った 2 次形式が次のように与えられたとする. ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = 2x^2 - 4xy + 5y^2$

ここで $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ${}^t\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ である.

(1) A の固有値と固有ベクトル（正規化したもの）をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた固有ベクトルを並べて作った 2 次の正方行列 P とその転置行列 ${}^tP$ を使って ${}^tPAP$ を計算せよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}$ に適当な一次変換を行い上記の 2 次形式を標準形に変換せよ.

(筑波大 2007) (m20071320)

0.31 すべての $i, j = 1, \cdots, n$ に対し, 第 (i, j) 成分が第 (j, i) 成分に等しい n 次正方行列を n 次対称行列とよぶ. 行列 M の転置行列を M^T, また n 次正方行列全体からなる線形空間を $\mathcal{M}^{n\times n}$ で表すものとして, 以下の (1)〜(4) を示せ.

(1) 任意の $m\times\ n$ 行列 A に対して $A^T A$ は n 次対称行列である.

(2) 任意の n 次正方行列 B に対して $B^T + B$ は対称行列である.

(3) 任意の n 次対称行列 C に対し, $C = B^T + B$ を満たす行列 B が存在する.

(4) n 次対称行列全体の集合は, $\mathcal{M}^{n\times n}$ の部分空間である.

(筑波大 2012) (m20121320)

0.32 3 次元実数ベクトル空間 V_α に $x_1x_2x_3$ 直交座標軸を固定し. 2 次曲面

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) 式 ① を以下の 2 次曲面の標準形の式

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0 \qquad \cdots\cdots ② $$

で表すとき，A, $\boldsymbol{b}$, c を求めよ．ただし，A は実対称行列，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置ベクトル，${}^tA$ は A の転置行列を示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,\ x_2,\ x_3)$ とする．

(2) 上記 (1) の A は適当な直交行列 P を用いて対角行列 $T = {}^tPAP$ にすることができる．T と P を求めよ，導出過程も示せ．ただし，対角行列 T の対角成分 t_{ii} $(t = 1, 2, 3)$ は $t_{11} \geq t_{22} \geq t_{33}$ とし，直交行列 P の第 2 列は ${}^t(1, 2, 1)$ に平行にとること．

(3) 3 次元実数ベクトル空間 V_β において $y_1\ y_2\ y_3$ 直交座標軸を固定する．いま，V_α の元 $\boldsymbol{x}$ と V_β の元 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1,\ y_2,\ y_3)$ との間で

$$ \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \qquad \cdots\cdots ③ $$

が成立するものとする．ここで P は (2) で得られた直交行列である．式 ② の 2 次曲面を，$T, b, \boldsymbol{y}$ を用いた式で表せ.

(4) 上記 (3) で得られた式を，y_1, y_2, y_3 を用いて書き直せ.

(5) 上記 (4) で表される 2 次曲面を y_1 軸周りに回転させたところ．平面 $y_3 = 0$ について対称となった．回転後の 2 次曲面を表す式を求めよ．導出過程も示すこと．また，この 2 次曲面の概形を $y_1y_2y_3$ 座標系で描け.

(筑波大 2017)　　(m20171305)

0.33 xy 平面上における 2 次曲線 C

$$ 4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21\ , $$

について考える．以下の問いに答えよ.

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めよ.

(2) A の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$ とする.

(3) (2) で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ.

(4) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ.

(5) 座標変換 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 行うとき，2 次曲線 C を，x', y' を用いて表せ.

(6) x' 軸および y' 軸を，それぞれ x, y を用いた直線の式で表せ.

(7) 2 次曲線 C の概形を xy 平面上に描け．ただし，図中には x' 軸と y' 軸を明記すること.

(筑波大 2022)　　(m20221304)

0.34 関数 $f = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ に関連した以下の問に答えよ．ただし，$\boldsymbol{M}^T$ は，行列 $\boldsymbol{M}$ の転置を表すものとする.

(1) f は，列行列 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 及び，対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$f = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と表す事が出来る．対称行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) 対称行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値，および固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を求めよ．ただし，固有ベクトル（列ベクトル）は，大きさが 1 となるように規格化せよ.

(3) $(x_1, x_2, x_3)^T = y_1\boldsymbol{p}_1 + y_2\boldsymbol{p}_2 + y_3\boldsymbol{p}_3 = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)(y_1,\ y_2,\ y_3)^T$ の関係を用いて，関数 f を変数 y_1, y_2, y_3 で表せ．ただし，$(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)$ は 3 × 3 の正方行列の各列が，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{p}_3$ で表される行列であることを表す.

(埼玉大 2006)　　(m20061404)

0.35　行列 A は以下のように対称行列 R と交代行列 S の和で表すことができる．

$A = R + S,$　　ただし，$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ とする．このとき，R および S を求めよ．

(埼玉大 2007)　　(m20071404)

0.36　$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2)　実対称行列 X で，次の 2 つの条件（ア）,（イ）の両方を満たすものを求めよ．
（ア）$X^2 = A$　　（イ）固有値がすべて正

(図書館情報大 2002)　　(m20021610)

0.37　実対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

について，以下の各問に答えよ．

(1)　A の固有値を求めよ．

(2)　A を直交行列を用いて対角化せよ．

(茨城大 2020)　　(m20201708)

0.38　a を実数とする．このとき，3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1)　A を対称行列と交代行列の和で表せ．

(2)　A が正則であるための a の値に関する条件を求めよ．また，A が正則であるとき，A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(3)　$a \geqq 0$ のとき, A は対角化可能であることを証明せよ．

(新潟大 2011)　　(m20112006)

0.39　次の各問いに答えよ．

(1)　実対称行列の固有値はすべて実数であることを示せ．

(2)　実変数 $x,\ y,\ z$ に対して，関数 $f(x, y, z)$ を

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4zx$$

により定める．このとき，条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで，$f(x, y, z)$ の最大値と最小値を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182012)

0.40　大小 2 つのサイコロを投げて出た目をそれぞれ $a,\ b$ とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ を作る. 以下の問いに答えなさい.

(1)　A が対称行列になる確率を求めなさい.

(2) A が正則行列になる確率を求めなさい.

(3) 行列式 $|A|$ の期待値を求めなさい.

(長岡技科大 2010)　　(m20102101)

0.41 対称行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めた各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$, $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ となる直交行列 P と α,β,γ を求めよ.

(金沢大 2000)　　(m20002203)

0.42 $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=1\cdots(*)$ を次の手順で，(x,y) 平面に図示せよ.

(1) $(*)$ の左辺は $2\times\ 2$ の対称行列 A を用いて，$(x\quad y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と表すことが出来る．A を求めよ.

(2) A の固有値 $(\lambda_1<\lambda_2)$，および，長さ 1 の固有ベクトル $v_1=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$（$\lambda_1$に対応），

$v_2=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$（$\lambda_2$に対応）を求めよ．ただし，$a>0$, $c>0$ と選ぶ.

(3) 行列 $P=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$ とおく．$P^{-1}AP$ を計算せよ.

(4) 変数変換 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ としたとき，(x,y) 平面上の図形は，反時計回りに q ラジアン回転すると (X,Y) 平面上の図形に移る．q を求めよ．また，上記の図形を (X,Y) 平面上で図示せよ.

(5) $(*)$ を (x,y) 平面上で図示せよ.

(金沢大 2016)　　(m20162234)

0.43 対称行列 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ.

(1) 固有値を全て求めよ.

(2) A を直交行列によって対角化せよ.

(金沢大 2022)　　(m20222204)

0.44 (1) 行列 $M=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ に対して，$M=A+B$ となるような対称行列 A，交代行列 B を求めよ.

註 : A が対称行列であるとは ${}^tA=A$ であること（${}^tA$ は A の転置行列を表す），B が交代行列であるとは ${}^tB=-B$ であることを意味する.

(2) (1) で求めた対称行列 A を，適当な直交行列 P によって対角化せよ.（直交行列 P を求める計算の過程も明示すること）

(富山大 1994)　　(m19942302)

0.45 3 次実対称行列 A は固有値 2 と 3 をもち，固有値 2 に対する固有空間 W_2 はある実数 x, y を用いて

$W_2 = \left\{ c \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ と表され，固有値 3 に対する固有空間 W_3 は

$W_3 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| c_1,\ c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ と表されている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x,\ y$ を求めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を W_2 と W_3 のベクトルの和で表せ．

(3) 自然数 n に対して $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ を求めよ．

(富山大 2016)　　(m20162302)

0.46 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を，対称行列と交代行列の和として表しなさい．

(福井大 2001)　　(m20012416)

0.47 以下の問いに答えよ．ただし，$\mathbf{0}$ は n 次元ゼロベクトルを表し，$\boldsymbol{v}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を表す．

(1) 次の行列 $A_1,\ A_2$ の行列式をそれぞれ求めよ．

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 問 (1) の A_1 を係数行列とする以下の連立一次方程式の解 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ を求めよ．ただし，$x_1,\ x_2,\ x_3$ は実数とする．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{u}$，および n 次の実対称行列 A_3 を用いて

$$f(\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{u}^\top A_3\, \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}}$$

とおく．このとき，$f(\boldsymbol{u})$ の最大値は A_3 の最大固有値に一致し，そのときの $\boldsymbol{u}$ は A_3 の最大固有値に対応する固有ベクトルであることが知られている．A_3 が次の行列であるとき，この事実を使って $f(\boldsymbol{u})$ の最大値，および対応する $\boldsymbol{u}$ をひとつ求めよ．

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(4) $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$ を満たす n 次元実ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対し，行列 A_4 を次のように定める．

$$A_4 = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^\top$$

このとき，$\boldsymbol{c}$ は A_4 の固有ベクトルであることを示せ．また，$\boldsymbol{c}$ に対応する固有値を求めよ．

(福井大 2022)　　(m20222425)

0.48　方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = 1$ によって表される R^2 内の図形を次のやり方にしたがって求めよ．

(1) 方程式 ${x_1}^2 + 2x_1x_2 + 3{x_2}^2 = (x_1, x_2)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ となる対称行列 A を求めよ．

(2) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) ２次の直交行列 P を使って，PAP^T が対角行列（Λ とする）となるようにしたい．ただし，^{T} は, 転置行列を表す．直交行列 P とこの対角行列 Λ を求めよ．

(4) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ によって座標変換を行ない，(y_1, y_2) 座標で先の方程式で表される図形の概形を描きなさい．

(5) (4) の図形の中に，(x_1, x_2) 座標の座標軸を書き入れなさい．

(岐阜大 2005)　　(m20052613)

0.49　成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列を考える．以下の問に答えよ．

(1) $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．

[ア] N の行列式を求めよ．

[イ] N の固有値を求めよ．

[ウ] ある自然数 k に対して，$A^k = O$ となるような行列 A を冪零（べきれい）行列という．N が冪零行列であることを示せ．

(2) 成分が $0, 1, -1$ のどれかからなる 2 次行列で，以下の [い]〜[り] であるものを，それぞれ一つずつ挙げよ．ただし，同じものを二度挙げてはならない．

[い] 零行列　[ろ] 単位行列　[は] 直交行列　[に] 対称行列　[ほ] 対角行列　[へ] 上三角行列
[と] 下三角行列　[ち] 固有値がただ一つの行列　[り] 固有値が純虚数である行列

(3) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．M が対角化できないことを示せ．

(4) $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．任意のベクトル $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して，

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = (\vec{x},\ A\vec{x}) > 0$$

を満たすような行列 A を正定値行列という．L が正定値行列であることを示せ．

(岐阜大 2020)　　(m20202605)

0.50　次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A を直交変換によって対角行列になおす直交行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(豊橋技科大 2000)　　(m20002708)

0.51 次の行列 A, B に関して，次の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 B が対称行列であるとき，定数 a, b を求めよ．

(3) (2) のとき，行列 B の固有値をすべて求めよ．

(豊橋技科大 2017) (m20172702)

0.52 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の逆行列を求めよ．

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化したもの（大きさが 1 のもの）を示せ．

(3) A を対称行列と交代行列の和で表せ．なお，行列 X の転置行列を X^t としたとき，$X^t = X$ を満たすものを対称行列，$X^t = -X$ を満たすものを交代行列という．

(名古屋大 2004) (m20042803)

0.53 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．更に，行列 ${}^tTAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求めよ．

(名古屋工業大 2000） (m20002905)

0.54 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) $A = B^2$ を満たす対称行列 B を一つ求めよ．

(名古屋工業大 2017) (m20172903)

0.55 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

(1) A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) グラム・シュミットの正規直交化法で，(1) で求めた固有ベクトルから正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2018) (m20182906)

0.56 次の実対称行列 A に対し，実直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものと，そのときの対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(名古屋工業大 2020) (m20202906)

0.57 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ （ a, b, c は実数 ）は適当な直交行列 T（直交行列とは ${}^tT\ T = T\ {}^tT = I$ [単位行列] を満たす行列，${}^tT$ は T の転置行列）を使って，${}^tTAT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のような対角形に変形できる．

(1) 自然数 n に対して $A^n = T \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} {}^tT$ となることを示せ．

(2) $a + b = \alpha + \beta$, $ab - c^2 = \alpha\beta$ の関係があることを示せ．

(3) $a = b = 2$, $c = -1$ のとき，α, β の値を求めよ．また，直交行列 T も求めよ．

(三重大 2007)　　(m20073117)

0.58 (1) 次の対称行列 A の固有値，固有ベクトルをすべて求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 一般の実対称行列 B について，その固有値はすべて実数で，異なる固有値に属する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(三重大 2009)　　(m20093110)

0.59 (1) A を N 行 N 列の実対称行列，すなわち，${}^tA = A$ （${}^tA$ は A の転置行列）を満たし成分が実数の行列とするとき，A の固有値 $a_i\,(i = 1, 2, 3, \cdots, N)$ と各 a_i に対する固有ベクトル $\vec{v}_i$ について以下のことを示せ．

(a) 固有値はすべて実数である．

(b) $a_i \neq a_j$ ならば，$\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ は直交する．すなわち，内積 $(\vec{v}_i\,,\,\vec{v}_j) = 0$ ．[ただし，$\vec{v}_i$ はすべて実ベクトルに選んでおく.]

(2) 2 行 2 列の行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix}$$

とする．

(a) 固有値の和と積を求めよ．

(b) B を対角化する行列，すなわち，UBU^{-1} が対角行列になるような行列 U を求めよ．

(三重大 2013)　　(m20133117)

0.60 x, y に関する実数値関数 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}xy$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす対称行列 A を求めなさい．

(2) A の全ての固有値と，それぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい．

(3) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような正規直交行列 T を求めなさい．さらに，$T^{-1}AT$ を求めなさい．

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ により変数変換をすることで，$f(x, y)$ を変換した結果得られる $g(u, v)$ を求めなさい．また，$g(u, v) = 4$ の概形を u-v 平面上に描きなさい．

(三重大 2017)　　(m20173108)

0.61 3 次の実対称行列

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 P の固有値 λ_i $(i = 1, 2, 3)$ と対応する単位固有ベクトル v_i $(i = 1, 2, 3)$ を求めなさい．
ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ を満たすものとする．

(2) VV^T を求めなさい．ただし，

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

である．

(3) 行列 P は固有値・固有ベクトルに対して，$PV = VA$ が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

である．このとき，$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$ を満たす行列 P_1，P_2，P_3 が存在することが知られている．行列 P_1，P_2，P_3 を求めなさい．

(4) 0 以上の整数 n に対して P^n を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203111)

0.62 2 次曲線 C： $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$ について，以下の問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすると，与えられた 2 次曲線 C は 2 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて
${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 4$ と表現可能である．行列 $\boldsymbol{A}$ を求めなさい．ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の転置を表すこととする．

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ は 2 つの固有値を持つ．この固有値 λ_1，λ_2 とそれぞれの固有値に対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ を求めなさい．ただし，$\lambda_1 < \lambda_2$，$\boldsymbol{u}_1$ の第 1 成分は正，$\boldsymbol{u}_2$ の第 1 成分は負であるとする．

(3) 行列 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2]$ およびベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ であるとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$ で与えられる変換を考える．このとき，xy 平面上の 2 次曲線 C は，XY 平面上で 2 次曲線 C' に変換される．2 次曲線 C' の式を X, Y を用いて表しなさい．

(三重大 2022)　　(m20223103)

0.63 次の実対称行列 A について以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) 行列 A の固有ベクトルをすべて求めよ．なお，固有ベクトルは規格化すること．

(4) 行列 A は，直交行列 V とその転置行列 V^T を以下のように左右からかけることにより，対角行列 B に変換することができる．

$$B = V^T AV$$

行列 V と B を求めよ．

(奈良女子大 2012)　　(m20123205)

0.64 xy 座標で多項式 $5x^2-6xy+5y^2=8$ で表される曲線を考える.

(1) この式は実数の定数 a,b,c を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

と書き換えることができる. 行列 A を求めよ.

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1<\lambda_2$ とする). $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする. $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ.

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016)　　(m20163208)

0.65 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda(0<\lambda<1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leq\lambda F(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle$ とおく. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す.

(1)〜(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(a) $F(\boldsymbol{x})=\langle\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle$ は凸関数である.

(b) 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\ A\boldsymbol{y}\rangle\geq 2\langle\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{y}\rangle$ が成り立つ.

(c) 任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x}\rangle\geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid F(\boldsymbol{x})\leq k\}$ で定義する. ただし, $k>0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in D$ と任意の $0\leq\lambda\leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103304)

0.66 2次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える.
以下の問に順次答えよ.

(1) 2次形式 $F=2x^2-4xy+5y^2$ の行列 A を求めよ.

(2) 対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ 1 の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ.

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より 2 次の正方行列 $P=[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ を作成した場合， P が直交行列となっていることを示せ.

(4) P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5) (3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x, y) 座標系から (x', y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x', y') で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた 2 次曲線 $2x^2 - 4xy + 5y^2 = 3$ の図形を描け．

(大阪大 1999)　　(m19993503)

0.67 s を実数, v を実数を成分とする 3 次元ベクトルとして,

$$A_s = E - sv\,{}^t v$$

と定義する. E は単位行列, ${}^t v$ は v の転置ベクトルを表す. ただし, v は零ベクトルではないとする. 以下の問に答えよ.

(1) A_s が直交行列となる s をすべて求めよ.

(2) 必要があれば, A_s が対称行列であることを用いて, A_s の固有値をすべて求めよ.

(3) 実数を成分とする 3 次元列ベクトル x_0 に対して

$$x_{i+1} = A_s x_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

と定める. このとき, すべてのベクトル x_0 に対して, x_i が収束するための s の範囲を求めよ. また, その時の極限 x_∞ を x_0 と v を用いて表せ. ただし, x_i が x_∞ に収束するとは, x_i の各成分が x_∞ の各成分に収束することである.

(大阪大 2004)　　(m20043506)

0.68 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ．ただし，a, b および c は実数であり，また，$b \neq 0$ である．

(1) 実数の固有値が 2 個存在することを示せ．

(2) 相異なる固有値に属する固有ベクトルが互いに直交することを示せ．

(3) 行列 A は対称行列であるので，適当な直交行列 U によって対角化される．この直交行列 U を使った $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ という一次変換によって，$(x \quad y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ となることを示せ．ただし，λ_1 および λ_2 は行列 A の相異なる固有値である．

(4) (3) の関係を利用して $2x^2 - 2xy + 2y^2$ を $\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2$ の形にしたい．このときの λ_1 および λ_2 を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083508)

0.69 (1) A および B を n 次実対称行列とする．n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ についての方程式 $\lambda A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が実数 $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \cdots,\ \lambda_n$ のときに $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である解をもつとする．λ_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ に対応する解を $\boldsymbol{x}_i$ とする．$\lambda_i \neq \lambda_j$ のとき，${}^t\boldsymbol{x}_i A \boldsymbol{x}_j = 0$ となることを示せ。ただし，${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，上の方程式が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるような解をもつ λ_1, λ_2 と，それに対応する解 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を一つずつ求めよ．

(大阪大 2009) (m20093501)

0.70 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

0.71 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & b \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.

ただし，a, b, c は実数である.

(2) 行列 A を対角化する直交行列の中で，対称行列となる P を一つ求めよ.

(3) A^n を求めよ．ただし，n は自然数を表す.

(4) (2) で求めた P を用いて $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と 1 次変換することで，$x^2+2y^2+z^2+xz$ が $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 w^2$ と表せることを示せ．また，定数 λ_1, λ_2, λ_3 の値を求めよ.

(大阪大 2013) (m20133503)

0.72 次の 2 次曲線 (a) について以下の設問に答えよ.

$5x^2 + 2xy + 5y^2 + c = 0 \cdots\cdots$ (a)

(1) $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ として，式 (a) を $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + c = 0$ の形で表すときの対称行列 A を示せ．ただし，T は転置を表す.

(2) 行列 A の固有値を求めよ.

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P とそのときの対角行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ．ただし, 正則行列の列ベクトルの大きさは 1 とする.

(4) $\boldsymbol{x}' = (x', y')^T$ として設問 (3) の正則行列 P を用いて $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ で式 (a) を座標変換して得られる $\boldsymbol{x}'^T B \boldsymbol{x}' + c = 0$ の概形を x' 軸，y' 軸と共に描け．ただし，$c = -12$ とする.

(大阪大 2014) (m20143502)

0.73 行列の対角化に関する以下の設問に答えよ.

(1) 次の対称行列 A を直交行列によって対角化せよ．ただし，a は実定数である．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 B が正則行列によって対角化できるための実定数 $b,\ c$ の必要十分条件を求めよ．また，対角化出来る場合は対角化せよ．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(大阪大 2015)　　(m20153506)

0.74 (1) 実数を成分とする 2 次の正方行列 $A,\ B$ は対称行列とし，A は相異なる固有値を持つとする．このとき，$AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ．

(大阪大 2016)　　(m20163502)

0.75 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A が対角化する直交行列 P の中で対称行列を求めよ．

(3) A の逆行列を，問い (1)，(2) で求めた A の固有値と P を用いて表せ．

(4) 問い (3) の結果を用いて，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解を求めよ．

(5) 問い (3) の結果および直交行列の性質 $P^TP = I$ を用いて，正の整数 n に対する連立方程式 $A^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の解 $\boldsymbol{x}_{(n)}$ を $P,\ n$ および A の固有値を用いて表せ．，$n \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{x}_{(n)}$ の極限を示せ．ただし，P^T は P の転置行列を，I は単位行列を表す．

(大阪大 2016)　　(m20163510)

0.76 次式で表される xyz 座標系の 2 次曲面について以下の問いに答えよ．

$$8x^2 + 2\sqrt{3}yz + 7y^2 + 5z^2 = 8$$

(1) 与式の左辺の対称行列 A を用いて $(x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の形式で表せ．

(2) A のすべての固有値を重複する場合も含めて求め，それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは互いに直交するものを示すこと．

(3) A を対角化する直交行列を一つ示し，その直交行列で対角化せよ．

(4) xyz 座標系の原点から小問 (2) で求めた各固有ベクトルの方向に X 軸，Y 軸，Z 軸をとるとき，与えられた 2 次曲面の $X-Y,\ Y-Z,\ Z-X$ の各平面による切断面をそれぞれ図示せよ．その際，切断面の輪郭線と各軸との交点の座標を記入すること．

(大阪大 2019)　　(m20193503)

0.77 (1) 実数を成分に持つ対称行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ．

(a) A の固有値をすべて求めよ．

(b) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) 実数を成分に持つ 3 次の対称行列 B が，3 つの相異なる固有値を持つとする．B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

(大阪大 2021) (m20213507)

0.78 次の実二次形式について，以下の問いに答えよ． $2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 + 3{x_3}^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

(1) この二次形式の係数を要素とする対称行列を A とするとき，行列 A の固有値を求めよ．

(2) 直交行列 T を選んで，$T'AT$ が対角行列となるような T を定めよ．ただし，T' は T の転置行列である．

(3) この二次形式を直交変換により標準形にせよ．

(大阪府立大 2007) (m20073603)

0.79 次の問いに答えよ．

(1) ある実対称行列は異なる固有値をもつとする．このとき，異なる固有値に対する固有ベクトルは互いに直交することを示せ．

(2) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A の固有値，固有ベクトルを求め，A を対角化せよ．

(大阪府立大 2011) (m20113606)

0.80 次の 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$ を直交行列 P を用いて対角化せよ．

(神戸大 2006) (m20063806)

0.81 実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を求めよ. なお ${}^tPP = E$（単位行列）をみたす実正方行列を直交行列という．

(神戸大 2010) (m20103801)

0.82 正方行列 X の固有値 λ に対する固有空間を $V_X(\lambda)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) X, Y を $XY = YX$ となる正方行列とする．$x \in V_X(\lambda)$ のとき，$Yx \in V_X(\lambda)$ を示せ．

(2) X を対称行列とし，λ, μ を X の異なる固有値とする．$V_X(\lambda)$ の要素と $V_X(\mu)$ の要素は直交することを示せ．

(3) 行列

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

に対し，X, Y の固有値と固有空間をすべて求めよ．

(4) (3) の行列 X, Y に対し，$P^{-1}XP$ と $P^{-1}YP$ がともに対角行列になるような正則行列 P を 1 つ求めよ．

(神戸大 2020)　　(m20203802)

0.83 S を 2×2 実対称行列とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 S が正定値（すべての固有値が正）のとき，S の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分は 0 でないことを示せ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty \exp(-x_1^2 - x_2^2)\, dx_1\, dx_2$ を極座標に変換することにより求めよ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}x^T Sx\right) dx_2$ を x_1 の関数として求めよ．ただし，$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ であり，S は正定値とする．

(神戸大 2021)　　(m20213803)

0.84 n 次の対称行列 A，B に対して, AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB = BA$ であることを示せ.

(鳥取大 2005)　　(m20053910)

0.85 正方行列 A が ${}^tA = -A$ を満たすとき A は交代行列であるという．A が対称行列であり交代行列でもあるとき, $A = O$（零行列）であることを示せ．

(鳥取大 2006)　　(m20063908)

0.86 次の行列 A に対して $A = X + Y$ となる対称行列 X と交代行列 Y を求めなさい．

（行列 M の転置行列を M' で表すとき, 対称行列とは $M = M'$ となる行列で, 交代行列は $-M = M'$ となる行列である．交代行列の対角成分は 0 である．交代行列は歪対称行列とも呼ばれる）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(鳥取大 2006)　　(m20063912)

0.87 次を証明せよ．

(1) 対称行列 A の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ．ただし，A が対称行列とは A が実正方行列であって $A^T = A$ が成立することをいう．

(2) 直交行列 A を係数行列としてもつ 1 次変換（直交変換）$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ はベクトルの内積を不変に保つことを証明せよ．ただし，A が直交行列とは A が実正方行列であって $A^T = A^{-1}$ が成立することをいう．

(鳥取大 2009)　　(m20093905)

0.88 3 次正方行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad B = {}^tAA$$

により与えられる．ここで，${}^tA$ は A の転置行列である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) A および B の行列式を計算せよ.

(2) $P^{-1}BP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) $B = C^2$ となる対称行列 C を求めよ.

(4) C は正則行列であり，AC^{-1} は直交行列であることを示せ.

(岡山大 2015)　　(m20154004)

0.89 行列 P の転置を ${}^tP$ と表す．n 次正方行列 P が ${}^tP = P$ を満たすとき対称行列といい，${}^tP = -P$ を満たすとき交代行列という．次の問いに答えよ．

(1) n 次正方行列 A に対して，次を示せ．

$$B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \quad C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$

とおくとき，B は対称行列，C は交代行列である．

(2) 次の正方行列 A を対称行列と交代行列の和で表せ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(広島大 2001)　　(m20014109)

0.90 (1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times n$ 実行列とする. $Q = I - P$ とおくと, 次を満たすことを示せ.

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{P\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$, $W = \{Q\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ とおく. このとき, $\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \qquad \boldsymbol{v} \in V\,, \quad \boldsymbol{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ.

(3) (2) における V と W の任意の元は $\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする. このとき, P は対称行列であることを示せ.

(広島大 2005)　　(m20054106)

0.91 A は実 $n \times k$ 行列でその階数は $\mathrm{rank}\, A = k < n$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ.

(2) ${}^tAA$ が正定数かつ正則であることを示せ.

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元列ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

を定める．このとき,

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big)({}^tAA)\big(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}\big) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(広島大 2016)　　(m20164103)

0.92 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい．

(1) α_n を行列 M_n の $(1, 1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ．

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ．

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1\right\}$ に対し，

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ．

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ．

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.93 次の対称行列について以下の問に答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) (1) で求めた各固有値に対する A の正規化された固有ベクトルを求めよ．

(3) ${}^tPAP$ が対角行列となる直交行列 P を求め対角化せよ．(${}^tP$ は P の転置行列を表す)

(広島市立大 2005)　　(m20054203)

0.94 A を正方行列とし，${}^tA$ で A の転置行列を表すものとする．

(1) $A + {}^tA$ は対称行列，$A - {}^tA$ は交代行列であることを示せ．

(2) 任意の正方行列は対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ．

ただし，$A = {}^tA$ をみたす正方行列を対称行列，$A = -{}^tA$ をみたすものを交代行列という．

(愛媛大 2004)　　(m20044608)

0.95 a, b, c を実数とし，行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a-2b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ で定める．

(1) $AB + C$ を求めよ．　　(2) $AB + C$ が対称行列となるとき，a, b, c の値を求めよ．

(3) $({}^tB)C = ({}^tC)B$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ．ただし，${}^tB$ は B の転置行列を表し，${}^tC$ は C の転置行列を表す．

(愛媛大 2008)　　(m20084601)

0.96　a , b , c を実定数とするとき

$$Q = Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 \ , \quad -\infty < x, y < +\infty$$

について，次の問に答えよ．

(1) $Q = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる実対称行列 A を求めよ．

(2) $(x,y) \neq (0,0)$ ならば $Q < 0$ となる a , b , c の条件を求めよ．

(3) (2) で求めた条件のもとで A の固有値がすべて負になることを示せ．

(九州大 1997)　　(m19974704)

0.97　3 変数 x, y, z の 2 次形式 $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$ は，適当な直交行列 P で変換変数

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

すれば,$f(x,y,z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$ (a, b, c は実数) になるという，ただし ${}^tP$ は行列 P の転置行列である. 次の問に答えよ.

(1) 等式 $f(x,y,z) = (x,y,z)A\,{}^t(x,y,z)$ を満たす実対称行列 A を求めよ．

(2) 上の直交行列 P と実数 a, b, c を求めよ.

（九州大 2004）　　(m20044705)

0.98　n_1, n_2 を自然数, $n = n_1 + n_2$ とする． $n\times\ n$ 実対称行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^T \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & O_{12} \\ L_{21} & I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & O_{12} \\ O_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & L_{21}^T \\ O_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$$

と表されているとする．ただし，一般に，C_{ij} は $n_i\times\ n_j$ 行列，O_{ij} は零行列，I_{ii} は単位行列で，添え字の T は転置をとることを意味する.

A_{11} は正則行列であるとして，次の問いに答えよ.

(1) 行列 L_{21} と行列 B_{22} を A の小行列 A_{ij} を用いて表せ.

(2) A が正定値なら A_{11}, B_{22} も正定値であることを示せ.

(九州大 2008)　　(m20084714)

0.99　A, B を 3 次実対称行列とする. 一般に, ${}^tP$ は行列 P の転置行列を表わすものとする.

(1) ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在するなら, $BA = AB$ であることを示せ.

(2) A の固有値がすべて等しいなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(3) $BA = AB$ であるなら, ${}^tPAP$ と ${}^tPBP$ とが共に対角行列となるような直交行列 P が存在することを示せ.

(九州大 2010)　　(m20104706)

0.100　A, B, Q を n 次実正方行列とし，A は正則行列で，Q は対称行列であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，必要ならば，実対称行列は実直交行列により対角化可能であることを証明なしで用いてよい.

(1) BA を AB, A, A^{-1} の積で表せ.

(2) BA がある正則行列により対角行列 D に対角化可能ならば, AB も D に対角化可能であることを示せ.

(3) $A = Q^2$ かつ B が対称行列であるとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(4) A は固有値がすべて正である対称行列で, B は対称行列であるとする. このとき, AB は対角化可能で, かつその固有値はすべて実数であることを示せ.

(九州大 2021)　　(m20214711)

0.101 次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ のすべての固有値と，各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(2) 複素数 λ が実正方行列（すなわち実数を成分とする正方行列）A の固有値ならば，λ の共役複素数 $\overline{\lambda}$ も A の固有値になることを証明せよ.

(3) 実対称行列のすべての固有値は実数になることを証明せよ.

(4) n を偶数とするとき，すべての固有値が 0 でない純虚数になるような n 次実正方行列の例を与えよ．また n が奇数ならばそのような例が存在しないことを証明せよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034931)

0.102 次の対称行列の階数および行列式を求め, この行列が正則であるかどうか判断せよ. 正則な場合は, 逆行列を求めよ. さらに, 固有値と対応する固有ベクトルを求めて, この行列を対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2004)　　(m20044932)

0.103 次の対称行列を対角化せよ. 対角化するための直交行列も求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(佐賀大 2011)　　(m20114916)

0.104 (1) 2 次式 $5x^2 + 4xy + 5y^2$ を対称行列 A を用いて, 以下のように表す. 行列 A を求めなさい.

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(2) 行列 A の固有値を求めなさい.

(3) 固有値に対する大きさ 1 の固有ベクトルを求めなさい.

(4) 固有値の小さい順に, その固有ベクトルを第 1 列, 第 2 列とする正方行列を P とおく. 変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

により, 方程式 $5x^2 + 4xy + 5y^2 - 1 = 0$ を X, Y を用いて表すとともに, この図形がどんな図形を表すか答えなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184906)

0.105 (1) 次の行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{b}$ について，問いに答えよ．

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(a) 行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ．

(b) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(c) 方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(d) 行列 A は固有値 1 をもつ．1 以外の A の固有値をすべて求めよ．また，A の固有値を 1 つ選び，その固有値に対応する固有ベクトルを 1 つ求めよ．

(e) 行列 A が対角化可能か否かを示し，もし対角化可能であれば $P\Lambda=AP$ となる正則行列 P と対角行列 Λ の組を 1 つ求めよ．

(2) A を $n\times n$ 実対称行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次実ベクトルとする．$\boldsymbol{x}^t$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表すとする．A が相異なる n 個の固有値を持ち，全ての固有値が非負であるとき，$\boldsymbol{x}^tA\boldsymbol{x}\geq 0$ を示せ．

(佐賀大 2022) (m20224918)

0.106 行列 A,T を $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とし, ベクトル $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. また, t を $t\geq 0$ の実数とし, 指数関数 e^{-3x} , e^{-t} を用いて行列 $E(t)$ を $E(t)=\begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ とする. これらの行列やベクトルに関して以下の問いに答えなさい.

(1) $\boldsymbol{x}(t)=TE(t)T^{-1}\boldsymbol{s}$ とする. この $\boldsymbol{x}(t)$ を求めなさい.

(2) $y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ とする. このとき

$$J=\int_0^\infty y(t)^2dt$$

を求めなさい.

(3) 行列 $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ とする. また, 未知数 p,q,r を用いて未知の対称行列を $P=\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ とする. この P を

$$PA+A^TP=-Q$$

を満足するように決定し, $W=\boldsymbol{s}^TP\boldsymbol{s}$ を求めなさい. ただし, A^T は行列 A の転置行列を表し, $\boldsymbol{s}^T$ はベクトル $\boldsymbol{s}$ を転置したものを表す. （長崎大 2004） (m20045011)

0.107 a,b を任意の実数とする次の対称行列 A について，以下の問いに答えよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 2 \\ a & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A が逆行列を持たないとき，$b>0$ であるような a の範囲を示せ．

(2) 行列 A の固有値の一つが 1 であるとき b の値を求めよ．また，1 以外の固有値を a を用いて表せ．ただし，$a\neq 0$ とする．

(長崎大 2007) (m20075001)

0.108 対称行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ に関して, 次の問いに答えなさい.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(2) それぞれの固有ベクトルからなる空間を V とし，V の正規直交基底を求めなさい.

(3) 設問 (2) の結果を用いて，行列 A を R^TAR により対角化する直交行列 R を求めなさい．ただし，R^T は R の転置行列である.

(熊本大 2011)　　(m20115201)

0.109 以下に表す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について，次の各問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて，行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2015)　　(m20155702)

0.110 以下に示す対称行列 $\boldsymbol{A}$ について各設問に答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値を求めよ.

(2) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有ベクトルを求めよ.

(3) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を求めよ.

(4) 直交行列 $\boldsymbol{P}$ を用いて行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ.

(香川大 2017)　　(m20175705)

0.111 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x}$ を満たす対称行列 Q を求めなさい．ただし，$\boldsymbol{x}^T$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である.

(2) A の行列式 $|A|$ を求めなさい.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(首都大 2014)　　(m20145902)

0.112 2 次実対称行列について，以下の問いに答えよ.

(1) 2 次実対称行列 $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 2 次実対称行列 S が正定値であるとは，すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}S\boldsymbol{x} > 0$ が成立することをいう．ここで ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である．(1) の行列 B が正定値であることを示せ.

(3) 2 次実対称行列 $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ の固有値をそれぞれ λ_1, λ_2 とする．行列 C が正定値となるための λ_1, λ_2 の条件を求めよ.

(はこだて未来大 2012)　　(m20126302)