[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：定義

0.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，

(1) 固有値を求めよ．

(2) 単位固有ベクトルを求めよ．

(3) $\exp(X) = E + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ と定義されている時，$\exp(tA)$ を求めよ．ただし，t : 定数

(北海道大 1997)　(m19970102)

0.2 円柱座標 (r, θ, z) が直交座標 (x, y, z) によって定義されるとき (1) から (3) の問いに答えよ．

円柱座標 (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) の関係は以下の通りである．

$$x = r\cos\theta\,,\quad y = r\sin\theta\,,\quad z = z \qquad (r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

(1) 円柱座標 (r, θ, z) が直交曲線座標であることを示せ．

(2) 円柱座標 (r, θ, z) の基本ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ を求めよ．

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と $z = 18 - (x^2 + y^2)$ で囲まれた領域を V とするとき，
積分 $\displaystyle\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$ の値を求めよ．

(北海道大 2003)　(m20030101)

0.3 関数 f が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，$\mathrm{grad}(f)$ という演算を以下のように定義します．

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の単位ベクトルです．以下の問に答えなさい．

(1) f, h が (x, y, z) のスカラー関数であるとき，h が 0 ではない領域で，
$\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{h}\right) = \dfrac{h \cdot \mathrm{grad}(f) - f \cdot \mathrm{grad}(h)}{h^2}$ であることを証明しなさい．

(2) (1) の結果を用いて，点 $(1, 1, 1)$ における $\mathrm{grad}\left(\dfrac{-x^2 + y^2 + z - 2}{x + y^2 - z + 1}\right)$ の値を計算しなさい．

(北海道大 2006)　(m20060104)

0.4 $u = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表される関数がある．次の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{grad}\, u$ を求めよ．また，求めたベクトルが $u(x, y, z) = c$ (c : 定数) で定義される曲面に対し，幾何学的にどのようなベクトルかを述べよ．ここで $\mathrm{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ を表し，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルである．

(2) $\mathrm{grad}\, u \cdot \boldsymbol{v} = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{grad}\, u$ とどのような関係にあるかを文章で説明せよ．ただし，“$\cdot$”は内積を表している．

(3) 次のベクトル $\boldsymbol{\ell}$ と $u(x, y, z) = c$ (c : 定数) で定義される曲面との幾何学的関係を図示して述べよ．ただし，$\boldsymbol{v}$ は (2) で定義されるベクトルである．

$$\boldsymbol{\ell} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}$$

(北海道大 2007)　(m20070102)

0.5 (1) 放物線を表す次の式

$$y = ax^2 + 1 \quad (a \neq 0) \qquad ①$$

を一般解とする，階数の最も低い微分方程式を求めなさい．

(2) 式①で表されるどの放物線とも直交する曲線の方程式を求めなさい．ここで，二つの曲線 C と C' が交点 (x, y) で直交するとは，(x, y) における C の接線と C' の接線とが直交することと定義する．

(3) (2) で求めた曲線のうち，原点を通るものを求め，それがどんな曲線であるかを述べなさい．

(北海道大 2008) (m20080103)

0.6 区間 $[-\pi,\ \pi]$ で定義される関数を $f(x) = x^2$ とする. このとき, 以下の設問 (1)，(2) に答えよ.

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ.

(2) (1) の結果を利用して，

$$\pi^2 = 6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots\cdots\right)$$

を導出せよ.

(北海道大 2010) (m20100103)

0.7 以下のように定義されるベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に関する設問に答えよ.

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix},$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は 1 次従属であることを示せ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ すべてに直交するベクトルを求めよ.

(3) ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ を列ベクトルとした行列に関する連立方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$$

が解を持つように，実数 s を定めよ．またそのときの解を求めよ．

(北海道大 2015) (m20150102)

0.8 平面の直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の間には $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ の関係がある．ただし，$r > 0$ とする．$z = f(x, y)$ を平面上で定義された 1 回連続微分可能関数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ および $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等を用いて表せ.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ を示せ.

(北見工業大 2009) (m20090203)

0.9 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の大きさを，それぞれ $|\boldsymbol{u}|, |\boldsymbol{v}|, |\boldsymbol{w}|$ で表す．ベクトルの内積を

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\phi \qquad (a)$$

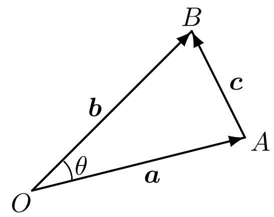
で定義する．ただし，ϕ はベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角である．この定義より，次の内積の基本性質が得られる．

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (b)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (c)$$

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \qquad (d)$$

$$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (e)$$



さらに，右の図のような三角形 OAB を考え，

３つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AB}$$

で定義する．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする．次の式を証明せよ．

$$|\boldsymbol{c}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

なお，内積の定義 (a) および基本的性質 (b)〜(e) を利用した場所を明示せよ．

(岩手大 1996)　　(m19960303)

0.10　次のような行列 A 考える．

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

ここで，a は実定数とする．次の問に答えよ．

(1) A^2, A^3 を求めよ．

(2) 一般の正の整数 n に対する A^n を求めよ．A^n の形を正しく推定し，数学的帰納法により証明すればよい．

(3) 行列 A に対し，A^0，指数関数 $\exp A$ を次のように定義する．

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

$\exp A$ を求めよ．なお，行列の無限級数の和を求めるためには，各成分ごとに無限級数の和を求めればよい．

(岩手大 1998)　　(m19980311)

0.11　球の体積を積分を用いて求めるとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の文中の $\boxed{\text{（ア）}}$〜$\boxed{\text{（カ）}}$ に正しい式を入れなさい．

　直交座標 (x, y, z) で原点 O を中心とする半径 a の球の方程式は，$\boxed{\text{（ア）}}$ であり，球の上半分は関数 $z = \boxed{\text{（イ）}}$ で表される．

　その定義域 D は $\boxed{\text{（ウ）}}$ であり，球の体積 V は次の重積分で与えられる．

$$V = 2\iint_D \boxed{\text{（イ）}}\, dxdy \cdots\cdots\cdots ①$$

　極座標 (r, θ) を用いると，D は $\boxed{\text{（エ）}}$, $\boxed{\text{（オ）}}$ と表され，関数 z は $z = \boxed{\text{（カ）}}$ で表される．

(2) ① 式を極座標に変換して表しなさい．

(3) (2) の結果を用いて，球の体積 V を求めなさい．

(岩手大 2012)　　(m20120303)

0.12　曲面 $\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 = b^2 \ (a > b > 0)$ で囲まれる立体について，次の問いに答えなさい．

(1) 次の文中の $\boxed{\quad（ア）\quad}$ から $\boxed{\quad（エ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体の xy 平面上の断面は．立体を囲む曲面の方程式に $z=0$ を代入した際に，解として得られる 2 つの円 $\boxed{\quad（ア）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（イ）\quad}$ で囲まれる領域 D_1 である．

この立体の xz 平面上の断面である領域 D_2 は 2 つの円 C_1 及び円 C_2 によって構成される．

円 C_1 及び円 C_2 は方程式 $\boxed{\quad（ウ）\quad}$ 及び $\boxed{\quad（エ）\quad}$ で与えられる．

(2) 領域 D_1 及び領域 D_2 を図示しなさい．

(3) 次の文中の $\boxed{\quad（オ）\quad}$ から $\boxed{\quad（キ）\quad}$ に正しい式を入れなさい．

この立体は円 C_1 または円 C_2 を z 軸まわりに回転して得られる回転体である．

この立体の体積 V は式 ① で与えられる．

$$V=\pi\int_{-b}^{b}\boxed{\quad（オ）\quad}\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

① 式より，この立体の体積は $V=\boxed{\quad（カ）\quad}$ と求まる．

また，この立体を囲む曲面のうち，$z \geqq 0$ の部分は関数 $z=\boxed{\quad（キ）\quad}$ で表される．

この立体の体積 V は定義域 D_1 に関する積分として次式で与えられる．

$$V=2\iint_{D_1}\boxed{\quad（キ）\quad}\,dxdy \quad \cdots\cdots ②$$

(4) xy 平面上の極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて ② 式を極座標系の式に変換しなさい．

(岩手大 2015)　　(m20150303)

0.13 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ と実数 γ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a}=\gamma(\boldsymbol{a_1}+\boldsymbol{a_2})$$

と定義し，ベクトル $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ を

$$\boldsymbol{b_1}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_1}\ , \quad \boldsymbol{b_2}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_2}$$

と定義する．また，行列 A,B を $A=(\boldsymbol{a_1} \quad \boldsymbol{a_2})$ ， $B=(\boldsymbol{b_1} \quad \boldsymbol{b_2})$ と定義する．このとき以下の設問 (1),(2),(3) に答えなさい．なお，解答はいずれも設問 (3) の下の空白部分に記入しなさい．

(1) $B=AC$ を満たす 2 次正方行列 C を求めなさい．

(2) A,B の行列式を $|A|$, $|B|$ で表す．$|B|$ を $|A|$ と γ を用いて表しなさい．

(3) $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ が互いに 1 次独立であるとする．このとき，$\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2}$ も互いに 1 次独立であるための必要十分条件を γ を使って表しなさい．

(秋田大 2014)　　(m20140404)

0.14 xy 平面上に 2 点 $P(a,b)$, $Q(c,d)$ がある．原点 O と点 P,Q は同一直線上にはなく，また $d\neq 0$ とする．点 R をベクトル $\overrightarrow{OR}$ がベクトル $\overrightarrow{OP}$ とベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の和に等しくなるようにとる．次の問いに答えよ．

(1) 点 P,R を通る直線と x 軸との交点 $S(e,0)$ の x 座標 e を a,b,c,d で表わせ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を２辺とする平行四辺形の面積を求めよ．

(3) 点 P を点 S に移し，点 Q を点 $T(0,d)$ に移す一次変換を K とする．K による点 R の像を求めよ．

(4) (3) で定義した一次変換 K を表す行列を求めよ．

(東北大 1994)　　(m19940504)

0.15 ３つの１次変換を f,g,h とし，これらを表す行列をそれぞれ A,B,C とおく，また，任意の点 $P(x,y)$ の２つの合成変換 $f\circ h$, $h\circ g$ を $f\circ h(P)=f(h(P)), h\circ g(P)=h(g(P))$ と定義し，$f\circ h=h\circ g$ が成立するとする．$A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ，$C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．ただし，a は $a\neq 0$ の実定数とする．

(1) 点 P の変換 h により移される点を P' とする．P' の原点からの距離は，P の原点からの距離に等しいことを示せ．

(2) g を表す行列 B を求めよ．

(3) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 Q の変換 $f\circ h$ により移される点を Q' とする．Q' の原点からの距離の最大値と最小値を求めよ．

(東北大 1996)　　(m19960503)

0.16 関数　$F(x)=x\log x-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$　の導関数を $F'(x)$ と表し，
関数 $f(x)$ を　$f(x)=F'(x)$　と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．　(2) 関数 $f(x)$ の増加・減少を調べよ．

(2) 等式　$f(c)=0 \quad (1<c<3)$　を満たす c が少なくとも１つ存在することを示せ．

(東北大 2001)　　(m20010501)

0.17 関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を　$f_1(x)=\dfrac{1}{10}e^{2x},\quad f_2(x)=x^2\log(x+1)$　と定義する．

(1) 定積分 $S_1=\displaystyle\int_0^a f_1(x)dx,\quad S_2=\int_0^b f_2(x)dx$ を求めよ．

(2) $a+b=1$ という関係があるとき，$S=S_1+S_2$ を b の関数として表せ．

(3) 変数 a と b は

$$a+b=1,\quad 0<a<1,\quad 0<b<1$$

を満たすと仮定する．$S=S_1+S_2$ が極値をとる条件を a と b により表せ．

(東北大 2001)　　(m20010502)

0.18 点 $X(x,y)$ を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる点を $X'(x',y')$ とする．

(1) OX の長さは r であり，OX の方向は x 軸の正のむきを原点 O のまわりに α だけ回転した方向にあるとする．このとき，x,y,x',y' を r,α,θ により表わせ．ただし，角 θ と角 α の回転の方向は同一であるとする．

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表わすとき，2×2 行列 T は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(3) 点 $A(x_1,y_1)$，点 $B(x_2,y_2)$ と原点 O からなる三角形 OAB を考える．三角形 OAB を原点 O のまわりに角 θ だけ回転して得られる三角形を $OA'B'$ とする．三角形 OAB の面積 S と三角形 $OA'B'$ の面積 S' を与える公式

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,\quad S'=\frac{1}{2}|x_1'y_2'-x_2'y_1'|$$

を用いて，$S=S'$ であることを示せ．

(4) 上記 (3) で定義した三角形 $OA'B'$ の辺 $A'B'$ が直線 $y'=1$ 上に位置し，$S'=\dfrac{1}{2}$ であるとする．この場合に，x_1, y_1, x_2, y_2 が満たすべき条件を示せ．

(5) 上記 (4) において，さらに，$x_1'=0,\ x_2'>0,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$ とする．三角形 OAB を図示せよ．

(東北大 2001)　　(m20010503)

0.19　関数 $f(x)$ は，微分方程式

$$x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+2f(x)=0 \qquad (x \geqq 1) \tag{a}$$

および，初期条件

$$x=1 \text{ のとき } \quad f=1\,,\ \frac{df}{dx}=0 \tag{b}$$

を満たす．このとき，以下の問 (1)〜(5) に答えよ．

(1) 方程式 (a) は，変数変換 $t=\log x$ によって，以下の微分方程式に帰着することを示せ．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=0 \tag{c}$$

また，初期条件 (b) は，

$$t=0 \text{ のとき } \quad y=1\,,\ \frac{dy}{dt}=0 \tag{d}$$

となることを示せ．

(2) 方程式 (c) の一般解は

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \tag{e}$$

で与えられる．方程式 (c) および初期条件 (d) を満たす実数 $\lambda_1, \lambda_2, C_1, C_2$ を求めよ．

(3) 初期条件 (b) のもとで方程式 (a) の解を求めよ．

(4) $z(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$ と定義する．いま，適切な $2\times\ 2$ 行列 A を定義すれば，方程式 (c) は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

と表される．行列 A を求めよ．

(5) 行列 A の固有値を求め，問 (2) で求めた λ_1, λ_2 と比較せよ．

(東北大 2003)　　(m20030502)

0.20　行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ で定義する．

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 A によって表される xy 平面上の線形変換を f とする．直線 $y=ax$ 上の任意の点の f による像が同じ直線 $y=ax$ 上にあるような a の値を求めよ．

(3) 行列 U を $U=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$U^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，n は自然数，α は 0 でない実数とする．

(4) 行列 P を $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で定義する．このとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．また，その結果と問 (3) で証明した式を用いて A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(東北大 2003)　　(m20030503)

0.21　実数 y の関数:

$$f(y)=\frac{1}{1+e^{-\beta y}}\ , \qquad (-\infty<y<\infty)$$

を定義する. ここで, β は非負の実数値のみをとる定数である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) β の値が以下の 3 つの場合:

a) $\beta \longrightarrow +\infty$, b) $\beta = 0$, c) その他の場合.

の各々について, $x = f(y)$ のグラフを描け.

(2) 関数 $x = f(y)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ.

(3) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \log(1-x)dx$$

ただし, log は自然対数を表す.

(4) 以下の定積分を求めよ.

$$g(x) \equiv \int_0^x f^{-1}(z)dz$$

ただし, x の定義域は $0 \le x \le 1$ であり, $\lim_{x \to 0} x \log x = 0$ の意味で $0 \log 0 = 0$ とする.

(5) 関数 $g(x) - \alpha x$ を最小化する x を求めよ. ただし x の定義域は $0 \le x \le 1$, α は正の実数値のみをとる定数とする.

（東北大 2004） (m20040501)

0.22 関数 $f(x)$ の $x = a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x) \sim f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1 < x < 1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty < x < \infty$ に対する関数 e^x の $x = 0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x) = e^{x^2} \quad , \quad h(x) = \frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1) $g(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2) 問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3) $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4) $y = h(x)$ の $-\infty < x < \infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004） (m20040502)

0.23 x を実数として, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 e^{ax}$ と定義する. ただし, a は負の定数である.

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $x \to +\infty$ のとき, $f(x)$ の極限 $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ の増減 , 極値 , グラフの凹凸 , 変曲点を調べ, 増減表を書き, $y = f(x)$ の概形を描け.

(東北大 2005) (m20050502)

0.24 x を実数として, 関数 $f(x)$ は微分方程式

$$f''(x) - f(x) = 0$$

の解であり, 初期条件「$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$」を満たすものとする. さらに, この微分方程式の解 $f(x)$ から関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_0^x tf(t)dt$$

により定義する.

(1) 与えられた微分方程式の解 $f(x)$ を求めよ.

(2) $g(1)$ および $g(-1)$ を求めよ.

(3) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{d}{dx}\int_{-x}^{x^2} g(t)dt$$

により定義する. このとき, $h(1)$ を求めよ.

(東北大 2005) (m20050503)

0.25 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{x} \neq 0$ において関数 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}$$

で定義する. このとき, 次の問に答えよ.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)$, および $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}$ を求めよ.

(2) $\varepsilon > 0$ に対して, $S_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ とする. S_ε に沿う表面積分

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S_ε 上の単位外向き法線ベクトルであり, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ は f の $\boldsymbol{n}$ 方向への微分を表す.

(3) S を原点 O を内部に含む $\mathbb{R}^3$ 内の滑らかな閉曲面とするとき, S に沿う表面積分

$$\int_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} dS$$

の値を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S 上の単位外向き法線ベクトルである.

(東北大 2005) (m20050505)

0.26 x を実数とし, 関数 $f(x)$ を $f(x) = x - \sin x$ と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(2) $f'(x) = 0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x) = 0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ.

(3) 関数 $y = f(x)$ の区間 $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ における増減, 極値, グラフの凹凸, 変曲点を調べ, 増減表を書き, グラフの概形を描け.

(4) 任意の実数 x について不等式 $|x| \geqq \sin|x|$ が成り立つことを証明せよ.

(東北大 2006) (m20060502)

0.27 対称行列 $\boldsymbol{A}$ およびベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ で定義する.

(1) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{A}^n$ の逆行列を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2006)　　(m20060503)

0.28　4次元数ベクトル空間の部分空間 V と W を

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0\,,\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 + 5x_4 = 0\,,\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0\}$$

と定義する. 以下の設問に答えよ.

(1) V と W の次元を求めよ.

(2) $V \cap W$ の次元を求めよ.

(3) $V + W = \{v + w \mid v \in V\,,\ w \in W\}$ の次元を求めよ.

(東北大 2006)　　(m20060505)

0.29 (1) 関数の積の微分に関するライプニッツの公式を述べよ（証明はしなくてよい）.

$\{f(x)g(x)\}^{(n)} =$

(2) $x > 0$ で定義された関数 $h(x) = x^4 \log x$ を考える. $\displaystyle\lim_{x \to +0} h(x)$ を求めよ.

(3) $0 < m < 4$ であるような自然数 m に対し, (2) で定義した $h(x)$ の m 階導関数 $h^{(m)}(x)$ を求めよ. また, $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(m)}(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x \to +0} h^{(4)}(x)$ は存在するか.

(東北大 2006)　　(m20060507)

0.30　行列　$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　で　$f(v) = Bv$　と定義される線形写像（1次写像）$f\ :\ \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^3$ について, 像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070502)

0.31　x, y を実数とし, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$ の表す領域において, 関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$$

と定義する. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を満足するすべての点 (x, y) を求めよ.

(3) $f(x, y)$ の極大値, 極小値を求めよ.

(4) 曲面 $z = f(x, y)$ 上の $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(東北大 2007)　　(m20070505)

0.32　x と y を実数とし, 関数 $f(x, y)$ を　$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$　と定義する.
不等式 $(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq f(x, y)$ で表される領域を R として, 以下の問に答えよ.

(1) 領域 R の概形を描け.　　(2) 領域 R の体積を求めよ.

(3) $xy-$ 平面上で不等式 $(x-1)^2+y^2 \leqq 1$ によって表される領域を D とする．曲面 $z=f(x,y)$ の D に対応する部分の面積を求めよ．

(東北大 2007)　　(m20070507)

0.33 x を実数とし，関数 $f(x)$ を　$f(x)=e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$　と定義する．

(1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x および $f''(x)=0$ を満たすすべての実数 x をそれぞれ求めよ．

(3) 関数 $y=f(x)$ の区間 $-5 \leqq x \leqq 5$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(4) 関数 $g(x)$ を　$g(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x+2}^{x}(t-1)(t-3)f(t)dt$　により定義する．このとき，$g(2)$ を求めよ．

(東北大 2008)　　(m20080501)

0.34 行列 $\boldsymbol{A}$ および直交座標系の位置ベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\quad \mathbf{q}=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の固有値および固有ベクトルを求めよ．その際，固有ベクトルの大きさは 1 となるように求めよ．

(3) (2) で求めた固有値を α，β，γ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ とする．2 次形式 $3x^2+2xy+3y^2+10z^2$ を標準形 $\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2$ に変換する線形変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ を与える直交行列 $\boldsymbol{U}$ を求めよ．

(4) 線形変換 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{p}$ により，平面 $x+y+z=1$ はどのような図形に変換されるか．変換前後の図形の概形を描け．

(東北大 2008)　　(m20080503)

0.35 x を実数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\sin(a\cos x)$$

と定義する．ただし，a は実数の定数である．$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a=1$ のとき $f(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(2) $a=1$ のとき $f'(x)=0$ を満たすすべての実数 x を求めよ．

(3) $a=\pi$ のとき $y=f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減,極値を調べ，増減表を書き，グラフの概形を描け．ただし，グラフには $y=0$ となる点の x の値も記すこと．

(東北大 2009)　　(m20090502)

0.36 変数 x に関する n 次以下の実数係数多項式の全体を $P_n[x]$ とおくと，$P_n[x]$ は $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$ を基底とする実ベクトル空間である．このとき，次に答えよ．

(1) $W=\{p(x)\in P_4[x]\ :\ p(0)=p(1)=0\}$ の基底を求めよ．

(2) $D(a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)=3a_3x^2+2a_2x+a_1$ によって定義される関数 $D\ :\ P_3[x]\to P_2[x]$ が線形写像であることを示せ．

(3) (2) の関数 D が全射であるか否かについて述べよ.

(4) (2) の関数 D が単射であるか否かについて述べよ.

(東北大 2009) (m20090504)

0.37 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを証明し, 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(東北大 2009) (m20090506)

0.38 x を非負の実数, r を $0 < r < 1$ を満たす実数とし, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = xr^x$$

と定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の増減表を書き, 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(3) n を正の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = f(n-1)$ により定義する. このとき, 初項から第 n 項までの和を求めよ.

(東北大 2010) (m20100501)

0.39 行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値および固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルの大きさは任意でよい.

(2) $A^5 - 13A^3$ を計算せよ.

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を 1 つ求めよ. また, その逆行列 P^{-1} を求めよ.

(4) A^n を求めよ. ただし, n は自然数とする.

(東北大 2010) (m20100503)

0.40 実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

と定義する. ここで, s は $\mathrm{Re}(s) > 0$ を満たす複素数である.

関数 $f(t)$ に関する次の微分方程式を, 初期条件 $f(0) = f'(0) = 0$ のもとで, ラプラス変換を用いて解きたい. 以下の問に答えよ.

$$tf''(t) + (3t-1)f'(t) + (2t-3)f(t) = 0$$

(1) $f'(t)$, $f''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(2) $tf(t)$, $tf'(t)$, $tf''(t)$ のラプラス変換を, それぞれ $F(s)$ を用いて表せ.

(3) $F(s)$ に関する次の微分方程式が次のように与えられることを示せ.

$$(s+1)\frac{dF(s)}{ds} + 3F(s) = 0$$

(4) $F(s)$ に関する次の微分方程式を解いて, $f(t)$ を求めよ.

(東北大 2010)　　(m20100504)

0.41　x を実数とし，　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ とするとき，

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \left(-\sqrt{2}\right)^n e^{-x}\cos\left(x - \frac{n\pi}{4}\right)$$

であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2)　関数 $y = f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減，極値，グラフの凹凸，変曲点を調べ，増減表を書き，グラフの概略を描け．

(3)　曲線 $y = f(x)$ $\left(\text{区間 } 0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(東北大 2011)　　(m20110502)

0.42　実数 t の関数 $f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

と定義する．ここで，s は $\mathrm{Re}(s) > 1$ を満たす複素数である．

以下の問いに答えよ．ただし，関数 $f(t)$ は $f(0) = 0$ を満たすとする．

(1)　$f'(t)$, $e^{-t}f'(t)$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ．

(2)　$\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau$, $e^t\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau$ のラプラス変換を，それぞれ s, $F(s)$ を用いて表せ．

(3)　次の微分積分方程式

$$f'(t) + e^t\int_0^t e^{-\tau}f'(\tau)\,d\tau = e^t$$

をラプラス変換により，s と $F(s)$ を用いて表せ．

(4)　(3) の微分積分方程式の解 $f(t)$ を求めよ．

(東北大 2012)　　(m20120504)

0.43　x を正の実数とし，関数 $f(x)$ を次のように自然対数を用いて定義する．

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ の増減表を書き，関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3)　$y = f(x)$, $y = 0$, $x = b$ のそれぞれによって囲まれた図形の面積 S を求めよ．ただし，b は $b > 1$ を満たす実数とする．

(東北大 2013)　　(m20130501)

0.44 行列 A と行列 B を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) AB を求めよ．

(2) 行列式 $|A|$ を求めよ．

(3) 逆行列 A^{-1} を求めよ．

(4) A の固有値を求めよ．

(東北大 2013) (m20130503)

0.45 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．

$$f(x) = \frac{-ax^2-(a-1)}{x^2+1} \qquad (a \neq 0)$$

以下の問いに答えよ．ただし，$y=f(x)$ は x 軸と 2 つの交点 A および B をもつものとする．

(1) $y=f(x)$ が x 軸と 2 つの交点をもつ a の条件を示し，交点 A，B の x 座標 x_A，x_B (ただし $x_A > x_B$) 求めよ．

(2) $y=f(x)$ の増減表を示し，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) 交点 A, B における接線の方程式を求め，その接線 2 本の交点の座標を求めよ．

(4) $y=f(x)$ と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_1 と，(3) で求めた 2 本の接線と x 軸上の線分 AB により囲まれる領域の面積 S_2 を求め，S_1 と S_2 の大小関係を示せ．

(東北大 2014) (m20140501)

0.46 3 次の対称行列 A および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，次のように定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ．

(2) $f(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}$ と定める (ここで，左上付き添字 ^{t} は転置を表す)．$f(x,y,z)$ を x, y および z の多項式で表せ．

(3) 原点を通り A の固有ベクトルに平行な直線と，2 次曲面 $f(x,y,z)=18$ との交点をすべて求めよ．

(東北大 2014) (m20140502)

0.47 (1) 実正方行列が直交行列であることの定義を述べよ．

(2) 2 次の直交行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta : \text{実数})$$

の形であることを示せ．

(3) A を n 次直交行列とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して， $A\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{w}$ の間の距離は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の距離に等しいことを示せ． ただし，距離はユークリット空間における標準的な距離とする．

(東北大 2016)　　(m20160506)

0.48 実数 x を含む次の行列 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & -x-1 & 0 \\ x-1 & -x & 0 \\ 1-x & x+1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{A}^2$ と逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 $\boldsymbol{B}$ を次式で定義する．n が 3 以上の整数であるとき，$\boldsymbol{B}$ を n と x を用いて表せ．

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^n + n\boldsymbol{A}^{n-1} - \boldsymbol{A}^{n-2} \qquad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2017)　　(m20170501)

0.49 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ で連続であることを示せ．

(2) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^2+y^2 \leq 3 \text{ かつ } y \geq 0\right\}$ とするとき，積分 $\displaystyle\int_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ．

(東北大 2017)　　(m20170506)

0.50 関数 $f(x)$ を，以下のように定義する．次の問いに答えよ．

$$f(x) = e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x) \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，この関数の増減表を示せ．

(3) k を実数とする．$f(x) = k$ の実数解の個数を求めよ．

(東北大 2018)　　(m20180502)

0.51 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において連続であることを示せ．

(2) $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ において全微分可能であるか，理由とともに答えよ．
なお，$\mathbb{R}^2$ 内の点 (a,b) の近傍で定義された実数値関数 $g(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において全微分可能であるとは，ある定数 α, β が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(a+h,\ b+k)-g(a,b)-(\alpha h+\beta k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

が成り立つことをいう．

(東北大 2018)　　(m20180510)

0.52 t を実数とする．3× 4 行列 A を次で定義する． $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & t \\ -2 & 5 & 6 & -5 \\ 2 & -3 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

(1) A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ．

(2) 4 次元実縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \ \middle| \ a,b,c,d \text{ は実数で } A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

の次元を求めよ．また，W の基底を一組求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190505)

0.53 実数列 $\{a_n\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}\in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\}+\{b_n\}\in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\}\in V$ を

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}, \qquad s\{a_n\}=\{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4}=4a_{n+3}+3a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5, a_6 を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて書き表せ．

(3) $i=1,2,3,4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\}=\{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$e_n^{(i)}=\begin{cases} 1 & (n=i \text{ のとき}), \\ 0 & (n=1,2,3,4,\ n\neq i \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$, $\{e_n^{(2)}\}$, $\{e_n^{(3)}\}$, $\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $T:W\to W$ を，

$$T(\{a_n\})=\{b_n\} \quad \text{ただし} \quad b_n=a_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.54 次の正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値それぞれに対して，その固有空間の基底を求めよ．

(3) 実 3 変数 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次で定義する．

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4zx$$

このとき $f(x, y, z)$ の，条件

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = x + y + z = 0$$

のもとでの最大値と最小値を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190507)

0.55 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n \to \infty} \frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.56 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ を 3 次正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．さらに，求めた固有値それぞれに対して固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．A^n を求めよ．

(4) 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の一般項 a_n を求めよ．

$$a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

(東北大 2021)　　(m20210508)

0.57 実 n 次元ベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ で表す．$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線形写像 f，$\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線形写像 g は，それぞれ次の行列 A, B で表されるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) f と g の合成写像 $g \circ f$ によって $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がうつされる $\mathbf{R}^4$ のベクトルを求めよ．

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたす $x \in \mathbf{R}^3$ を求めよ．

(3) g による像空間 $\mathrm{Im}\ g$ の次元を求めよ．ここで $\mathrm{Im}\ g$ は

$$\mathrm{Im}\ g = \{g(x) \in \mathbf{R}^4 \ \mid \ x \in \mathbf{R}^3\}$$

で定義される．

(お茶の水女子大 1997)　　(m19970611)

0.58 n 次元における半径 r の "球" の "体積" を考えましょう．３次元においては半径 r の球の体積は，原点から距離 r 以内の長さにある部分の体積です．３次元以外でも同様に考えてみましょう．例えば，１次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の長さと考えるのが自然であり，２次元における半径 r の "球" の "体積" は，原点から距離 r 以内の部分の面積と考えるのが自然ですね．

(1) では４次元において，「半径 r の "球" の "体積"」を自分で定義して，それを具体的に求めてください．答えが一意的に決まるとは限りません．自由に発想して下さい．また，計算が最後まで終了しなくても，自分で考えた事・アイディアなど，自由に述べてください．

(2) さらに一般に，任意の正整数次元 n でも同様に考えてください．

(お茶の水女子大 1998）　　(m19980601)

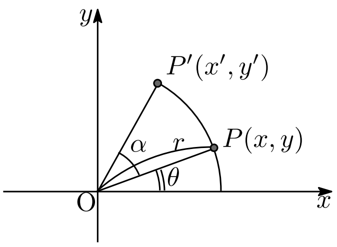
0.59 図の様に，x, y 平面上の座標が (x, y) で表される点 P を原点 O のまわりに角度 α だけ回転すると，座標が (x', y') の点 P' に移った．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の原点 O からの距離を r，O から P に到るベクトルが x 軸の正の方向となす角度を θ とすると，x と y は
$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$
と表される．この時 x' と y' を r，θ，α で表わせ．

(2) x' と y' を x と y と α で表す関係式をもとめよ．
但し，必要があれば，以下の三角関数に関する公式を用いてもよい．
$\sin(\theta+\alpha) = \sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$
$\cos(\theta-\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha, \quad \cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha$

(3) 複素数 z は，2 乗すると-1 となる i と称する虚数を導入して，実数 x と y を用いて $z = x + iy$ と定義される．この時，x と y は複素数 z の実部と虚部と呼ばれる．今，上記の点 P の座標 x と y とを実部と虚部に持つ複素数を z，点 P' の座標 x' と y' とを実部と虚部に持つ複素数を z' としよう．この時 z' を z で表すとどうなるか，議論せよ．但し，必要ならばオイラーの有名な公式：$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ を用いてもよい．

(4) 上記のオイラーの有名な公式を知っていると，上記の三角関数の公式は導出できるだろうか.「YES , NO , あるいは分からない」で答えよ．



(お茶の水女子大 1999)　(m19990610)

0.60 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を次の積分で定義する．但し，$s>0$ とする．

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)dx$$

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ．

(2) 次の関係式を示せ．

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

（お茶の水女子大 2000）　(m20000605)

0.61 関数 $f(x)$ は実数の開区間 $I=(a,b)$ で連続，関数 $g_1(t),g_2(t)$ は実数の開区間 $J=(c,d)$ で微分可能であり，その値が開区間 I に属するとし，次のような関数を考える．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

このような形で定義された関数について以下の問に答えよ．

(1) 次の関数の導関数を具体的に計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} x\log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数を表す.})$$

(2) 次の関数の導関数を計算できるまで計算せよ．

$$\int_{t^2}^{t^3} e^x\log x dx \qquad (\log \text{ は自然対数関数，} e \text{ は自然対数の底を表す.})$$

(3) 次の関数の導関数を f,g_1,g_2 およびその導関数を用いて表せ．

$$h(t)=\int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x)dx$$

（お茶の水女子大 2001）　(m20010602)

0.62 $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，次のような複素 n 次正方行列 $N,\ J_\lambda(n)$ を考える．

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad J_\lambda(n)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(1) 自然数 k に対して N の k 乗 N^k を求めよ．

(2) 自然数 k に対して $J_\lambda(n)^k$ を求めよ．

(3) 複素正方行列 A が対角化可能であることの定義を述べよ．

(4) 複素正方行列 A がある自然数 k に対して $A^k=E$ を満たすならば A は対角化可能であることを示せ．ただし E は単位行列である．必要ならば次の定理を用いてもよい．

定理 任意の複素 l 次正方行列 A に対して l 次正則行列 P，m 個の複素数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ および m 個の自然数 $n_1,\ldots,n_m$ で $\sum_{i=1}^m n_i=l$ を満たすものが存在して

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(n_1) & & & \\ & J_{\lambda_2}(n_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\lambda_m}(n_m) \end{pmatrix} \text{ と書ける.}$$

(お茶の水女子大 2003)　(m20030615)

0.63 (1) 線形写像の定義を書きなさい．

(2) 次の写像 f が線形写像でないならば線形写像でないことを証明し，線形写像ならば f を表す行列と，f の核 (Ker$f$) と像 (Imf) を求め，それぞれの次元を調べなさい．

(a) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x-3y \end{pmatrix}$,　　(b) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3 \\ 2y+z-4 \end{pmatrix}$

（注）ただし，線形空間 V から W への線形写像 $F : V \to W$ の核とは，$\mathrm{Ker}F = \{\boldsymbol{v} \in V | F(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$ のことで，像とは $\mathrm{Im}F = \{F(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\}$ のことである．また，$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す．

(お茶の水女子大 2007)　　(m20070603)

0.64 (1) $(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする．

(a) $f'(x)$ を求めよ．

(b) $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を示せ．

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2級関数とする．g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) + g(2h) + g(-3h) - 3g(0)}{h^2} = 7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）．

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1級関数とする．$h(0) = 0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ．

(お茶の水女子大 2009)　　(m20090601)

0.65 $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ とするとき，D 上の連続関数 f の積分値

$$I(f) = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

がどのように定義されるか述べよ．また，f が任意の $(x,y) \in D$ に対して $f(x,y) = -f(-x,-y)$ を満たすとき，$I(f) = 0$ であることを定義に従って示せ．

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110601)

0.66 任意の実 $2 \times\ 2$ 行列を無限回作用させることにより，平面上の点はどこに行き着くかについて考察せよ．以下の (1) から (5) の手順に従ってもよいし，または別の手順で解答してもよい．

(1) 上三角行列

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の固有値を求める．

(2) 行列 T の n 乗を計算する．

(3) 行列 T のすべての固有値の絶対値が 1 より小さい場合，実平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は行列 T を無限回作用するとどのような点に近づくか考える．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ はすべて実数であるとする．

(4) $2\times\ 2$ 行列 M に対し

$$Me = \lambda e$$

を満たす単位固有ベクトルを

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とし．この成分 a, b を用いて正則行列

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

を定義する．行列 $P^{-1}MP$ の (2,1) 成分（左下の要素）がゼロになることを確かめ，任意の $2\times\ 2$ 行列が上三角行列に変換されることを示す．　さらに．$T_0 = P^{-1}MP$ とするとき n を自然数として

$$M^n = P(T_0)^n P^{-1}$$

が成立することを示す.

(5) 行列 B の要素がすべて実数で，固有値の絶対値が 1 より小さいとする．　このとき行列 B を無限回作用すると，実平面上の点はどのような点に近づくか考えてみる.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110604)

0.67 $\mathbb{R}^2$ 上の関数が点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で（全）微分可能であることの定義を述べよ．また，$f(x, y) = |x||y|$ の微分可能性を $\mathbb{R}^2$ の各点について調べ，微分可能ならばその点での偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(お茶の水女子大 2011)　　(m20110609)

0.68 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ を次式で定義する.

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)\ , \quad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$$

ここで e^x は指数関数を表す.

(1) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の微分を求めよ.

(2) 関数 $\sinh x$ と $\cosh x$ の無限級数展開の最初の 3 項目までを求めよ.

(3) 次の関係式（加法定理）を示せ.

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$$

(4) 上の関係式（加法定理）から，正弦関数 $(\sin\theta)$ の加法定理を導け．ただし，次のオイラーの関係式は仮定して良い.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

(お茶の水女子大 2012)　　(m20120603)

0.69 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する.

$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ．また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.70 (1) S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．S の階数（ランク）rank$S$ の定義を述べよ．

(2) S, T を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．このとき，不等式

$$\mathrm{rank}(S+T) \leqq \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(3) 上記問題 (2) で $\mathrm{rank}(S+T) = \mathrm{rank}S + \mathrm{rank}T$ が成立するような線形写像 S, T の例をあげよ．

(4) T を $\mathbb{R}^l$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像とし，S を $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像とする．　このとき，

$$\mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}S\,, \quad \mathrm{rank}S \circ T \leqq \mathrm{rank}T$$

が成立することを示せ.

(5) 次の行列で定められる線形写像 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の階数を求めよ．ただし，a は実数である．

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \end{pmatrix}$$

(6) 上記 (5) で与えられた線形写像 F の核（核空間）$F^{-1}(\mathbf{0})$ の次元が最も大きくなるときの a を求めよ．またそのときの核の基底を 1 組求めよ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130604)

0.71 行列に関する次の問に答えよ.

(1) 次の 2 行 2 列の実対称行列 A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有値 λ_1 λ_2 と規格化された固有ベクトル v_1, v_2 を求めなさい.

(2) 前問で求めた固有ベクトルを並べて作った行列と，その転置行列を用いて A を対角化しなさい.

一般に，n 行 n 列の実対称行列 B は，ある直交行列 O およびその転置行列 O^T を用いて
$O^T BO$ とすれば対角化されることが知られている.

(3) 直交行列 O の定義を書きなさい.

(4) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の行列式がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の積に等しいこと

$$\det C = c_1 c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(5) 一般の 2 行 2 列の実対称行列 C の対角和がその 2 つの固有値 c_1, c_2 の和に等しいこと

$$\mathrm{T_r}\, C = c_1 + c_2$$

を証明し，C が $(*)$ で与えられるとき（すなわち $C = A$）にそれが成り立っていることを示しなさい.

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130605)

0.72 関数 $f(x)$ を $x = a$ のまわりで定義された関数とし，その定義域を D とする．D のなかに a を含むある開区間 $I \subset D$ があり，$x \in I$, $x \neq a$ ならば $f(x) > f(a)$ となるとき f は $x = a$ で極小値をとるといい，同様に, $x \in I$, $x \neq a$ ならば $f(x) < f(a)$ となるとき f は $x = a$ で極大値をとるという．極小値をとるとき，または極大値をとるとき，　極値をとるという.

以下の各問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の $x=a$ での微分係数の定義を述べよ.

(2) 関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとする. f が $x=a$ で微分可能であるとき, $f'(a)=0$ となることを示せ.

(3) g は $(-\infty,\ \infty)$ で定義され C^2- 級関数であるとする. g が $x=0$ と $x=1$ で極値をとるとき, ある $0<c<1$ で $g''(c)=0$ となることを示せ.

(4) 上問 (3) において g が $x=0$ と $x=1$ で共に極大値をとるとき, $g''(x)=0$ となるような x は開区間 $(0,1)$ の中に少なくとも 2 つ存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2014)　　(m20140601)

0.73 以下の問いに答えよ.

(1) (a) 線形空間 $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 f が線形写像であることの定義を述べよ.

(b) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(c) $\mathbb{R}^4$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f で, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に, それぞれ移す線形写像が存在するかどうか答え, 存在するならば, この条件を満たした像（像空間）の次元が最大, 最小となる線形写像の例をそれぞれあげ, それらの核（核空間）の次元と基底を求めよ.

(2) 次の行列 A の固有値と, 各固有値に対する固有ベクトル空間の基底と次元を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(お茶の水女子大 2015)　　(m20150602)

0.74 $a\neq 0$ とし, $f(x)$ を $x=0$ のまわりで定義された関数とする.

$$(*) \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$

が存在するために $f(x)$ が満たすべき条件を求めよ. また $(*)$ が存在するための条件を $f(x)$ が満たす時, $(*)$ の値を求めよ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170601)

0.75 $-\infty<a<b<\infty$ とし, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で定義された連続関数で, かつ　$f(x)\geq 0$ を満たすものとする. もし　$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$ であるならば, $[a,b]$ 上の各点 c で $f(c)=0$ であることを示せ.

(お茶の水女子大 2017)　　(m20170602)

0.76 (1) $m\times n$ 型実行列 $A=(a_{ij})$ の階数 (rank) の定義を述べよ.

(2) t を実数とする．次の行列の階数を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2t-2 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \\ t & t-1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) t を実数とする．4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-2 \\ 0 \\ t-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を $V(t)$ で表す． t が実数全体を動くとき， $V(t)$ の次元の最小値をとるような t の値を求めよ．また，そのときの $V(t)$ の基底を求めよ．

(4) t を実数とする．未知数 x, y, z に関する次の連立 1 次方程式が解をもつような t をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + (2t-2)y + tz = 1 \\ x + z = t \\ tx + (t-1)y + z = 1 \end{cases}$$

(お茶の水女子大 2017) (m20170604)

0.77 整数 n に対して，$x \neq 0$ のとき $f_n(x) = x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f_n(0) = 0$ として $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 f_n を定める．

(1) f_n の $x \neq 0$ における微分係数 $f_n'(x)$ を求めよ．また f_1 は $x = 0$ で微分可能でないことを確かめよ．

(2) 自然数 m に対して $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上定義された f_n の m 階導関数 $f_n^{(m)}$ が存在する．適当な多項式 P_m，Q_m に対して，$x \neq 0$ で

$$f_n^{(m)}(x) = x^{n-2m}\left(P_m(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_m(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

が成り立ち，$P_m(0)$，$Q_m(0)$ のうち一方だけが 0 でないことを示せ．また $n > 1$ のとき，$f_n^{(m)}$ が $\mathbb{R}$ 全体で定義されるための m の条件を求めよ．

(3) $n \leq 0$ のとき，広義積分

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

の収束，発散を調べよ．

(お茶の水女子大 2018) (m20180601)

0.78 3 次元の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と定数ベクトル $\boldsymbol{B}$ を用いて，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{r}/2$ で定義する．このとき，$\bigtriangledown \times \boldsymbol{A}$ を計算せよ．

(お茶の水女子大 2019) (m20190608)

0.79 次の式で定義される実対称行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(2) 任意の 3 次元ベクトルが行列 A の固有ベクトルの線形結合で表されることを示せ.

(3) 行列 $\sin\left(\frac{1}{2}\pi A\right)$ とその固有値を求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200605)

0.80 関数 $\delta_y(x)$ と $g(y)$ を次の式で定義する.

$$\delta_y(x) = \begin{cases} y^{-1} & (|x| < \frac{1}{2}y) \\ 0 & (|x| \geq \frac{1}{2}y) \end{cases} \qquad g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_y(x)dx$$

ここで, $f(x)$ は何回でも微分可能であるとする. このとき, $g(y)$ を y の 2 次の項まで求めよ.

(お茶の水女子大 2020)　　(m20200609)

0.81 区間 $-a \leq x \leq a$ で定義される微分方程式 $d^2f(x)/dx^2 + k^2 f(x) = 0 \quad (k > 0)$ を考える. ただし, $a > 0$ である.

(1) 微分方程式の一般解 $f(x)$ を求めよ.

(2) 解 $f(x)$ が境界条件 $f(-a) = f(a) = 0$ を満足するとき, k の最小値を求めよ

(お茶の水女子大 2022)　　(m20220609)

0.82 指数関数 e^x のテイラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

を拡張して，行列 A の指数関数 e^A を，

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．いま，行列 e^A が

$$e^A = \begin{bmatrix} 2 - e^{-1} & -1 + e^{-1} \\ 2 - 2e^{-1} & -1 + 2e^{-1} \end{bmatrix}$$

と与えられたとき，以下の問に答えよ．

(1) 行列 e^A を対角化せよ．

(2) 正則行列 P に対して，$P^{-1}e^A P = e^{(P^{-1}AP)}$ が成り立つことを示せ．

(3) 行列 A を求めよ．

(東京大 2004)　　(m20040704)

0.83 関数 $y(x)$ は, $x = 1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x = 1$ で極値をとり, $y^3 + 3xy^2 + x^3 y = 1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ の $x = 1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x = 1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005)　　(m20050702)

0.84 $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$, $g(x) = x^2 e^{-x}$ として下記の問いに答えよ．ただし，$a > 0$ で，$f(x)$ は区間 $-a \leqq x \leqq a$ で定義される関数である．

(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ．　　(2) $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を求め，結果を a を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^\infty g(x)dx$ のとき，a の値を求めよ．

(東京大 2006)　　(m20060701)

0.85 (1) (a) X を値が自然数 $1, 2, \cdots, a$ のみをとる確率変数とする．X の平均 $E(X)$ は，

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} kP(X = k)$$

で定義される．ここで，$P(X = k)$ は，$X = k$ となる確率である．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，$P(X \geq k)$ は，$X \geq k$ となる確率である．

$$E(X) = \sum_{k=1}^{a} P(X \geq k) \tag{1}$$

(b) X の 2 乗の平均は，

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} k^2 P(X = k)$$

で定義される．このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{a} (2k-1)P(X \geq k) \tag{2}$$

(2) 袋の中に白い玉が 1 個，赤い玉が $a-1$ 個入っている．袋から，玉を一つずつ無作為に取り出し，袋の中に返さないものとする．このとき，以下の設問に答えよ．

(a) 白い玉が出るのが k 回目以降である確率を求めよ．ただし，この確率は，「最初の $k-1$ 回は，常に赤い玉が出てくる確率」と等しいことを利用してよい．

(b) (a) の回答と式 (1) を用いて，白い玉が出るのに要する平均の回数を求めよ．

(c) (a) の回答と式 (2) を用いて，白い玉が出るのに要する回数の分散を求めよ．
ただし，確率変数 X の分散 $V(X)$ は，$E(X^2) - (E(X))^2$ で与えられる．

(東京大 2009)　　(m20090702)

0.86 $f(x)$ を $-l \leqq x \leqq l$ で定義された関数とする．このとき，

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)dx \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

とすると，$f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x + b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right) \quad \cdots \quad ①$$

と展開できる．以下の問に答えよ．

(1) 次式で定義された関数 $f(x)$ の a_m，b_m を求め，① 式で $l = 1$ とした式に従い $f(x)$ を展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1-x & (0 < x \leqq 1) \end{cases}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義される関数 $f(x) = \cos x$ を ① 式で $l = \dfrac{\pi}{2}$ とした式に従い展開し，その展開式を利用し，以下の無限級数

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \frac{1}{63} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} + \cdots$$

の値を求めよ．

(東京大 2013)　　(m20130701)

0.87 実数をとる変数 $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を用いて，行列 X を

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．X の行列式を $|X|$ で表し，X の逆行列を X^{-1} で表す．また，正の実数 s の自然対数を $\log s$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) $|X|$ の x_{11} に関する偏導関数 $\dfrac{\partial |X|}{\partial x_{11}}$ を，$x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(2) X が $|X|>0$ を満たすとき，$y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を

$$y_{ij} = \frac{\partial(\log|X^{-1}|)}{\partial x_{ij}}$$

で定義する．このとき，y_{11} を，$|X|$ と $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ のうちの必要なものを用いて表せ．

(3) (2) で定義した $y_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ を用いて，行列 Y を

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix}$$

で定義する．このとき，X^{-1} を用いて Y を表せ．

(東京大 2014)　　(m20140705)

0.88 以下の問いに答えよ．

(1) 次の微分方程式において $y(0)=1$ を満たす解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2+1}y = e^{-\tan^{-1}x}$$

(2) $-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ で定義された関数 y についての微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \frac{1}{\cos 2x} \qquad (*)$$

の一般解を以下の設問の手順にしたがって求めることを考える．

(a) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$$

の 2 つの一次独立解 $y_1,\ y_2$ を実関数の形で求め，そのロンスキ行列式 $W(y_1,\ y_2)$ を計算せよ．ここでロンスキ行列式とは

$$W(y_1,\ y_2) = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx}$$

のことである．

(b) 式 $(*)$ の特殊解が，

$$\frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2 = 0$$

を満たす $u(x),\ v(x)$ を用いて

$$y = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

という形に書けると仮定したとき，$u(x),\ v(x)$ それぞれが満たす 1 階の微分方程式を導け．

(c) 式 $(*)$ の一般解を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150701)

0.89 3 個の一次独立な実数ベクトル $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_3}$ に対して，3 次の正方行列 A の (i,j) 成分を $\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{a_j}$ で定義する．ここで $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は，ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表すものとする．ただし，$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_3}=0$ であるする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の行列式を求めよ．さらに，その値が正であることを示せ．

(2) 実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & x\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$$

で定義する．$f(x)$ を定めよ．

(3) $f(x)$ を最小にする x を求めよ．さらに，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(4) 設問 (3) で求めた x に対して，ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+x\overrightarrow{a_3}$ とおく．このとき，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a_3}$ は直交することを示せ．

(5) 任意の実数 x_1, x_2, x_3 に対して，

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\geq 0$$

であることを証明せよ．さらに，等号が成立するための必要十分条件を示せ．

(東京大 2015)　　(m20150705)

0.90 微分方程式に関する以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=e^x$$

を境界条件 $y(0)=2$, $y'(0)=0$ のもとで解け．ただし，$y'=\dfrac{dy}{dx}$ とする．

(2) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=(1-y)y$$

を解け．ただし，$y(0)=\dfrac{1}{2}$ とする．

(3) $x>0$ の範囲で定義された関数 $u(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{A}{x}\frac{du}{dx}-u=0\cdots(*)$$

に関して，以下の問いに答えよ．ただし，A は定数で $A\leq 1$ とする．

(a) 以下の微分方程式

$$\frac{d^2f_\alpha}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\,f_\alpha}{dx}-\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2}\right)f_\alpha=0$$

を満たす関数 $f_\alpha(x)\neq 0$ があるとする．ただし，α は非負の定数とする．ここで，式 $(*)$ の解が，関数 $g(x)$ を用いて $u(x)=f_\alpha(x)g(x)$ と表せると仮定すると，

$$\Big[\quad (\text{ア})\quad \Big]\frac{d\,f_\alpha}{dx}+\Big[\quad (\text{イ})\quad \Big]f_\alpha=0$$

が成り立つ．空欄 (ア), (イ) に入る数式を，$g(x)$, A, α を用いて表せ．

(b) (a) の空欄 (ア), (イ) に入る数式が常にゼロとなるよう，$g(x)$ および定数 α を A を用いて表せ．また，必要であれば，積分定数の記号としては C を用いよ．

(東京大 2018)　　(m20180701)

0.91 3 つのベクトル場 $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ を考える．各ベクトル場は次のように定義する．

$$\overrightarrow{A} = rf(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$$

$$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\nabla}\{zf(r,z)\}$$

ただし，$f(r,z)$ は

$$f(r,z) = (r^2+z^2)^{-3/2}$$

とする．円柱座標系 (r,θ,z) における基底ベクトルを $(\overrightarrow{e}_r,\ \overrightarrow{e}_\theta,\ \overrightarrow{e}_z)$ とし，以下の問いに答えよ．必要であればスカラー場 ϕ およびベクトル場 $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r V_r + \overrightarrow{e}_\theta V_\theta + \overrightarrow{e}_z V_z$ に対する以下の勾配，発散，回転の式を用いてよい．

$$\overrightarrow{\nabla}\phi = \overrightarrow{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \overrightarrow{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{V} = \overrightarrow{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) + \overrightarrow{e}_\theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \overrightarrow{e}_z \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

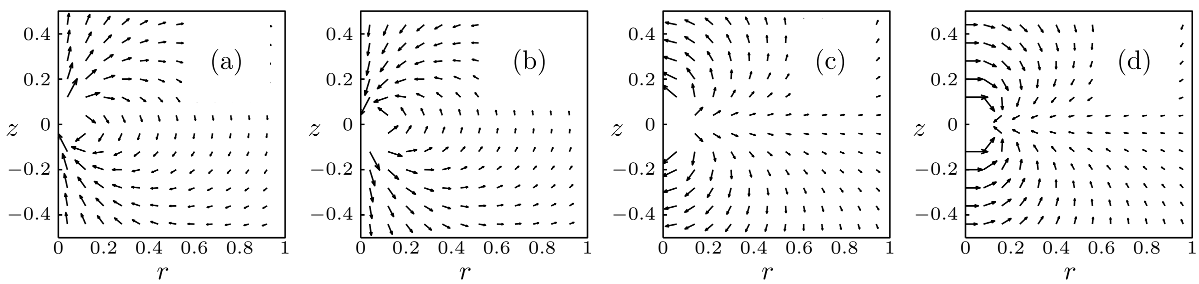
(1) $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B}$ を求めよ．

(2) $r \leq r_0$ および $z = z_0$ により定義される円板面 S_0 を考える $(z_0 > 0)$．面の法線方向を $\overrightarrow{e}_z$ とするとき，この円板面における次の面積分 Φ を，必要があれば r_0, z_0 用いて，表わせ．

$$\Phi = \int_{S_0} \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(3) $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ を求めよ．

(4) ベクトル場 $\overrightarrow{B}$ および $\overrightarrow{C}$ の分布の概略として正しい図を下の (a)-(d) からそれぞれ選べ．



(5) $r \leq r_0$ および $z_1 \leq z \leq z_2$ により定義される円柱 $(z_1 > 0)$ に対し，側面と両底面からなる閉曲面 S_1 を考える．面の法線方向を円柱外向きとする．この閉曲面における次の面積分 Q を，必要であれば r_0, z_1, z_2 を用いて，表わせ．

$$Q = \int_{S_1} \overrightarrow{C} \cdot d\overrightarrow{S}$$

(東京大 2018)　　(m20180703)

0.92 2 つの正方行列 A, B を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}}+1 & 1 \\ -1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とし，行列 C を $C = BAB^{-1}$ とする．以下の問いに答えよ．なお，以下では任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対し $\overrightarrow{x}^T$ はその転置を表すものとする． また，行列 I を単位行列とし， ある正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots$$

と定義する．

(1) 行列 A の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(2) 行列 C の固有値を複素数の範囲で求めよ．

(3) あるスカラー変数 t に対して $\exp(At)$ を求めよ．

(4) 3 次元ベクトル $\overrightarrow{x}$ に対してスカラー関数 $f(\overrightarrow{x})$ を

$$f(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}\right\}^T \left\{\exp\left(C\frac{2\pi k}{n}\right)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{x}\right\}$$

とおく．ただし，n は $n > 1$ を満たす整数，$\overrightarrow{a}$ は以下のような 3 次元ベクトルである．

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

関数 $f(\overrightarrow{x})$ を最小にする $\overrightarrow{x}$ は，ある単位ベクトル $\overrightarrow{b}$ を用いて以下のような形式で表せる．

$$\overrightarrow{x} = \boxed{\text{（ア）}}\left(\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{（イ）}}\right)\overrightarrow{b}$$

(a) (ア) と (イ) に入る数式を書け．必要であれば a_1, a_2, a_3, n, k を用いてよい．なお，行列を含まない形式で解答すること．

(b) $\overrightarrow{b}$ を求めよ．

(5) (4) で求めた $\overrightarrow{x}$ に対して，$n \to \infty$ としたときの $\overrightarrow{x}$ を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ．

(東京大 2018) (m20180705)

0.93 数列 x_n, y_n, z_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 x_0, y_0, z_0 は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0 > 0,\ y_0 > 0,\ z_0 > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2} < C$ となる定数 $C\ (C>0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.94 以下の問いに答えよ．ただし，x は実変数，y は x に関する実関数であり，
$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$，$y' = \dfrac{dy}{dx}$ とする．また，e は自然対数の底とする．

(1) 次の微分方程式について考える．ただし，y は，任意の x に対し $y>0$ を満たすものとする．

$$y' - 2y\sin^2(x) = \frac{e^{2x}\cos(2x)}{y}$$

(a) 関数 $f(x)$ を次式により定義する．定積分を計算し，$f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = \int_0^x [-2\sin^2(t)]\,dt$$

(b) $z = ye^{f(x)}$ とするとき，$\dfrac{dz}{dx}$ を x と z の関数として表せ．

(c) y の一般解を求めよ．

(2) 次の微分方程式について考える．ただし，α および n は実定数であり，α は $-1 \le \alpha \le 1$ を満たすものとする．

$$y'' - 2\alpha y' + y = 2e^x$$

(a) y の特解を求めよ．

(b) y の一般解を求めよ．

(c) $\alpha = 1$ とする．$y(0)=1$ および $y'(0)=2$ を満たす y に関して，次の極限の収束・発散を調べよ．収束する場合にはその極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to+0} y^{x^{-n}}$$

(東京大 2022)　　(m20220701)

0.95 i を虚数単位とし，w と z は複素数とする．また，e を自然対数の底とする．以下の問いに答えよ．

(1) 次の式を満たす複素数 A を考える．

$$A^6 = i$$

(a) A を全て求めて $x+iy\quad(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．x, y の表式は三角関数を用いて書き下せ．

(b) A を全て求めて $x+iy\quad(x, y$ は実数$)$ の形で求めよ．ただし，x, y の表式は三角関数や指数関数を含んではならない．

(c) A を全ての点を複素平面上に図示せよ．

(2) a と t を実数として，以下の積分値を求めたい．

$$F(a) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{dt}\log_e(1+ae^{it})\right]dt$$

(a) $z = e^{it}$ と変数変換を行う事により，複素積分に変形せよ．また，被積分関数に対して全ての極と対応する次数，および留数を求めよ．

(b) a で場合分けして，$F(a)$ を求めよ．ただし，極が積分路上にある場合は考えなくて良い．

(c) 複素平面上で $1+ae^{it}$ を t の関数として考え，$F(a)$ が a に対して変化する事を文章で説明せよ．

(3) 以下の関数で定義される w に関して，$z=x+iy$ が上半面 $y>0$ を満たす範囲を動くとき，w が動く範囲を複素平面上に図示せよ．

$$w=\frac{i-z}{i+z}$$

(東京大 2022)　　(m20220703)

0.96 $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 行列Aの固有値および固有ベクトルを求めよ．

(2) $M_3(\mathbf{R})$ を 3 次正方実行列全体のなすベクトル空間とする．
$M_3(\mathbf{R})$ から $M_3(\mathbf{R})$ への線形写像 φ_A を

$$\varphi_A(X)=AX$$

と定義する．φ_A の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(東京工業大 1996）　　(m19960804)

0.97 $f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y)=(x+y)\,e^{-(x^2+y^2)}$ で定義する．

(1) f は $\mathbf{R}^2$ において最大値，最小値をもつことを示せ．

(2) f の最大値，最小値とそれらを与える点を求めよ．

(東京工業大 2000）　　(m20000801)

0.98 $G(x,y,t)$ は次のように定義される関数である．

$$G(x,y,t)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad (t>0)$$

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial G}{\partial x}$，$\dfrac{\partial G}{\partial t}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 各 $t>0$ に対して，次の積分 $I(t)$ を計算せよ．

$$I(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,y,t)\,dx\,dy$$

(東京工業大 2001)　　(m20010803)

0.99 極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を考える．$(x,y)=(0,0)$ 以外で定義された C^2 級関数 $f(x,y)$ について　$\Delta f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$　を r,θ に関する偏微分を用いて表わせ．

(東京工業大 2002)　　(m20020803)

0.100 (x,y) 平面の領域 $\{x>0,\ y>0\}$ で定義された関数　$f(x,y)=x^{\log y}$　について次の問いに答えよ．

(1) f の二階までの偏導関数をすべて求めよ．　　(2) f は狭義の極値を持たないことを示せ．

(東京工業大 2007)　　(m20070801)

0.101 3 次の正方行列 M を次で定義する:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -a^2+2a+3 & 2 & a^2-6a+7 \\ a^2-3a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき $P^{-1}MP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ．

(2) $a=2$ のとき $Q^{-1}MQ$ が対角行列となるような正則行列 Q が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような Q が存在する場合は $Q^{-1}MQ$ を求めよ．

(3) $a=3$ のとき $R^{-1}MR$ が対角行列となるような正則行列 R が存在するか否かを理由をつけて述べよ．またそのような R が存在する場合は $R^{-1}MR$ を求めよ．

(東京工業大 2014)　　(m20140803)

0.102 a,b を実数とし，xy 平面上で定義された実数値関数

$$f(x,y)=x^4-2x^2y+ay^2-by$$

を考える． (x_0,y_0) が関数 $f(x,y)$ の極小点であるとは，正の実数 δ が存在して，$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ を満たす任意の点 (x,y) について

$$f(x,y)\geqq f(x_0,y_0)$$

が成り立つこととする．以下の問に答えよ．

(1) $b>0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(2) $b=0$ のとき，$f(x,y)$ の極小点の個数を求めよ．(a の値によって場合分けして解答せよ)．

(東京工業大 2022)　　(m20220801)

0.103 図 1 に示すような関数 $f(x)$ が単調関数である場合，x の区間 $[a,b]$ における最小値 $f(x_m)$ を与える x_m を求めなさい．関数 $f(x)$ は，$a<x<x_m$ で単調減少し，$x_m<x<b$ では単調増加するので，$[a,b]$ 間に，$a<x_1<x_2<b$ なる x_1,x_2 をある方法で選び，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ の値を比較する．次に同様な方法で x_3 を選び，$[x_1,b]$ 間を分割する．同様の手順で $[x_1,x_3]$ 間に x_4 を選んでいく．これを繰り返すことにより，区間を狭めて x_m の範囲を絞り込む．

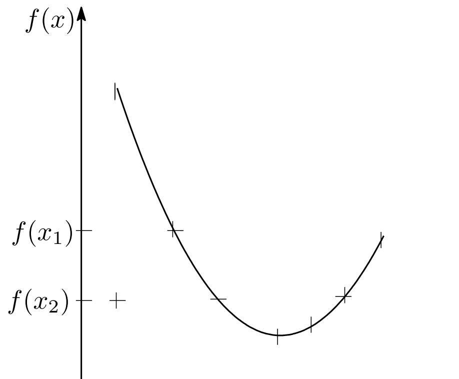


図 1．区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $f(x)$

(1) ある方法とは，図 2 に示すように，$[a,b]$ 間に x_1,x_2 を，$u:v=v:w$ になるように選ぶ方法である．このような線分の分割を黄金分割と呼ぶ．このときの v/u の値を示せ．

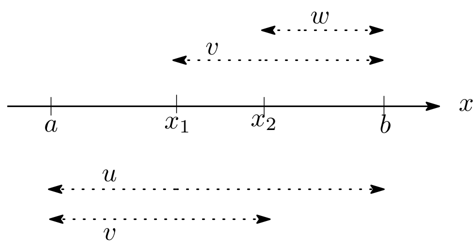


図２．区間 $[a, b]$ の分割

関数 $f(x)$ が単調関数であることから，以下のようにして区間を狭めていく．まず，$f(x_1)$ と $f(x_2)$ を比較する．図 1 のように，$f(x_1) > f(x_2)$ なら $x_1 < x_m < b$ のはずであるから，$x_2 < x_3 < b$ を満たす x_3 を選び，$f(x_3)$ と $f(x_2)$ を比べる．このとき $f(x_2) < f(x_3)$ なら $x_1 < x_m < x_3$ であるはずであるので $x_1 < x_4 < x_2$ なる x_4 を，$f(x_2) > f(x_3)$ なら $x_3 < x_m < b$ であるはずであるので $x_3 < x_4 < b$ なる x_4 を選び，区間を狭める．区間が十分小さくなるまで狭めていくことで，最小値を与える x_m が得られる．

(2) これを利用したプログラムを C 言語で記述した．$\boxed{\text{2-1}}$〜$\boxed{\text{2-3}}$ に入るコードを示せ．ただし，$\boxed{1}$ には，問 (1) で求めた v/u の値が入る．

```
double f(double x);/* f(x) の値を返す関数 */
double searchmin(double a,double b)    /* 関数 f(x) の区間 [a,b] での最小値をとる xm を返す関数 */
{       double x1, x2, fx1, fx2, t, s, upper, lower;
        double tolerance = 1.0e-5; /* 区間の最小幅 */
        upper=b; lower=a;
        t=[2-1]*(1-[1]);
        x1=[2-2]+t; x2=[2-3]-t; fx1=f(x1); fx2=f(x2);
        while(1){
                if(fx1>fx2){ /* f(x1)>f(x2) の場合 */
                        lower=x1; x1=x2; fx1=fx2; t=[2-1]*(1-[1]);
                        x2=[2-2]-t;
                        if(x2-x1<=tolerance)return x1;
                        fx2=f(x2);
                }eles{          /* f(x1)<f(x2) の場合 */
                        upper=x2; x2=x1; fx2=fx1; t=[2-1]*(1-[1]);
                        x1=[2-3]+t;
                        if(x2-x1<=tolerance)return x2;
                        fx1=f(x1);
                }
        }
}
```

(東京農工大 2006)　　(m20060908)

0.104 実数を要素とする集合の間の演算★を下のように定義する．

$$A \bigstar B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

(1) 次の集合の要素をすべて示せ．　$\{-1, 0, 1\} \bigstar \{1, 4, 7\} \bigstar \{0, 10\}$

(2) 次の式を証明せよ．ただし，$\cup$ は和集合を作る演算である．　$A \bigstar (B \cup C) = (A \bigstar B) \cup (A \bigstar C)$

(3) どんな A に対しても，　$X \bigstar A = A \bigstar X = A$　となるような X を求めよ．

(4) どんな A に対しても，　$Y \bigstar A = A \bigstar Y = Y$　となるような Y を求めよ．

(5) いま，一円玉，五円玉，十円玉，五十円玉, 百円玉, 五百円玉, 千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ一枚ずつ持っているとする．このとき，釣り銭なしで，一度に払える金額の集合を★を用いて示せ．集合に 0 を含んでいてよい．

(東京農工大 2006)　　(m20060909)

0.105 今 $\mathbf{R}^4$ の要素を $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ と書くことにする．その二つの部分空間 W_1 , W_2 を次のように定義する．

$W_1 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; x + 2y + 3z + 4w = 0\ ,\ \ 5x + 5z + 2w = 0 \right\}$

$W_2 = \left\{ X \in \mathbf{R}^4 \;\middle|\; 2x - y + z - w = 0\ ,\ \ 3x + y + 4z + 3w = 0 \right\}$

(1) $\dim\,(W_1 \cap W_2)$ を求めよ．また， $W_1 \cap W_2$ の一組の基底を求めよ．

(2) (1) で求めた基底を含む $\mathbf{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(電気通信大 1994)　　(m19941004)

0.106 関数 $f(x)$　$(-\pi < x < \pi)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1-\cos x}} & (-\pi < x < \pi,\ x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は連続関数であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0+} f'(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to 0-} f'(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(電気通信大 1999)　　(m19991001)

0.107 方程式 $y + e^{1-xy} = 0$ を満たし，$y(0) = -e$ であるような微分可能な関数 $y = y(x)$ について，次の問に答えよ．

(1) 導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ および，2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を x, y の有理式で表し，それらの $x = 0$ における値を求めよ．

(2) $y(x)$ が定義される最大区間を $(-\infty, a)$ とするとき，a の値を求め，極限値 $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} y(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to a-0} y(x)$ を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011003)

0.108 定義域を $0 \leqq\ u \leqq\ 2\pi,\ 0 \leqq\ v \leqq\ 1$ とするベクトル関数

$$\overrightarrow{r}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, v\right)$$

が表す曲面を S とする．曲面 S 上の (u,v) に対応する点における法線単位ベクトルを求めよ．また，曲面 S の面積を求めよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011005)

0.109 $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とし，線形写像 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ を，$f(x) = 6x - < v, x > v$　$(x \in \mathbf{R}^3)$ で定義するとき，次の問に答えよ．ただし，$<, >$ は，$\mathbf{R}^3$ の通常のユークリッド内積とする．

(1) $< f(x), v >= 0$ を示せ．

(2) $f(x) = Ax$ と表すとき，行列 A を求めよ．

(3) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求めよ．

(4) $\mathrm{Im}\, f \ni x \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たし，$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と直交するベクトル $x \in \mathbf{R}^3$ が存在するならば，それを 1 つ求めよ．もしそのようなベクトルが存在しないならば，それを証明せよ．

(電気通信大 2001)　　(m20011008)

0.110 $z = x + iy$（z は複素数，x, y は実数，i は虚数単位）に対して，指数関数 e^z と対数関数 $\log_e z$ を

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$\log_e z := \mathrm{Log}_e|z| + i \arg z,$$

と定義する．ただし，e は自然対数の底，Log_e は，実数に対して，既に定義されている対数関数，$\arg z$ は z の偏角を表すものとする．

(1) この指数関数を用いて，三角関数 $\sin z, \cos z$ を定義せよ．また，これらの指数関数と対数関数を用いて，一般の巾乗関数 α^β（α, β は，２つの複素数）を定義せよ．

(2) $\cos z = -2$ を満たす複素数 z を，すべて求めよ．

(3) $i^{(-i)}, (-i)^{\frac{1}{3}}$ の 2 つの値を計算せよ.（答えは，複素数 $a + ib$ の形になるまで計算すること）

(電気通信大 2001)　　(m20011010)

0.111 下表のように, ロット 1 には合計 100 個の製品の中, 不良品が 3 個あり, ロット 2 には合計 150 個の製品の中, 不良品が 6 個あるとする. このとき, 以下の質問に答えよ.

	良品	不良品	合計
ロット 1	97	3	100
ロット 2	144	6	150
合計	241	9	250

(1) ２つのロットの中から 1 つのロットを選び, さらにその箱の中から 1 個の製品を選び出すものとする. ただし, 各ロットは等確率で選ばれる. このとき

(a) 不良品が選ばれる確率を求めよ.

(b) 不良品が選ばれたとき, それがロット 1 の製品である確率を求めよ.

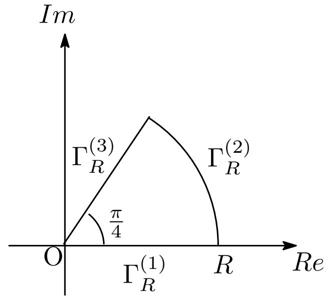
(2) ロット 2 の製品を 30 個調べるとき, その中に r 個の不良品が含まれる確率を $P(r)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots, 6)$ とする. このとき, $P(r)$ の式を r と 2 項係数を使って表せ. ただし, 2 項係数は

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

で定義される.

(電気通信大 2005)　　(m20051009)

0.112 右図に示すように，複素平面上にある中心角 $\pi/4$，半径 $R(> 0)$ の領域の周囲を反時計回りに 1 周する経路 Γ_R を考える．また，図にあるように経路 Γ_R の各部分を $\Gamma_R^{(1)}, \Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(3)}$, と名付ける．



以下の 3 つの問いに順に答えよ．

(1) 経路 Γ_R では式 ① が成立する．

$$\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0 \qquad ①$$

次式のように G_R, P_R, C_R, S_R を定義するとき，式 ① をこれらを用いて表せ．

$$G_R = \int_0^R e^{-x^2} dx\ , \qquad P_R = \int_{\Gamma_R^{(2)}} e^{-z^2} dz\ ,$$

$$C_R = \int_0^R \cos r^2 dr\ , \qquad S_R = \int_0^R \sin r^2 dr\ ,$$

(2) P_R について次の不等式 ② が成立することを示すとともに，

$$|P_R| \leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \qquad ②$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ では $0 \leq 1 - \dfrac{4}{\pi}\theta \leq \cos 2\theta$ となることを使って，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} P_R = 0$ を示せ．

(3) 小問 (1), (2) で求めた結果を使って，定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2 dx$ を計算せよ．ただし、$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明なしに用いてよい．

(電気通信大 2006)　　(m20061008)

0.113 微分の定義に基づいて，次の各関数を x について微分せよ．

(1) $\cos x$　　　(2) $\sqrt[3]{x}$

(電気通信大 2006)　　(m20061009)

0.114 行列 $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ で定義される xy 平面の 1 次変換について，以下の問いに答えよ．

(1) 直線 $y = 3x$ の像を求めよ．

(2) 原点を通る直線のうち，その像が原点だけになるものを求めよ．

(3) 原点を通る直線のうち，その像がその直線自身になるものを求めよ．

(4) この 1 次変換による xy 平面の像を図示せよ．

(電気通信大 2009)　　(m20091001)

0.115 A を下に定める $2\times\ 2$ 行列とし，M は A などを用いて下のように定義される $4\times\ 4$ 行列とする（I は単位行列，O は零行列）．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} -I & 2A^{-1} \\ A & O \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) M の行列式 $\det M$，および M の逆行列 M^{-1} を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4$ について $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ の解を求めよ．

(電気通信大 2010)　　(m20101001)

0.116 つぎで定義される関数 $f(x, y)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x, y) = x^3 + 3axy + y^3 \qquad (a \text{ は定数})$$

(1) $a \neq 0$ のとき，$f(x, y)$ の極値を求めよ．

(2) $a = -1$ のとき，方程式 $f(x, y) = 0$ で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ．

(電気通信大 2011)　　(m20111003)

0.117 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不適切な設問により解答を導き出せないという出題ミスがあったため，掲載を差し控えさせていただきます．

(2) f を部分空間 V に制限して得られる線形写像を

$$g : V \to V\ , \qquad g(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

とするとき，g の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2\}$ に関する表現行列 B を求めよ．

(3) B の固有ベクトルをすべて求め，その各固有値に対する B の固有ベクトルを求めよ．

(4) V の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ に関する g の表現行列が対角行列になるような基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2\}$ を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141001)

0.118 4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^4$ を以下で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 11 & -9 & 13 & -11 \\ 18 & -16 & 10 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに，$\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を V とし，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$ および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker}\, f$ を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker}\, f \subset V$ を示せ．

(3) V と $\mathrm{Im}\, f$ の共通部分 $V \cap \mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2014)　　(m20141002)

0.119 a を実数とし，4 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^4$ を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 2 \\ -1 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & -3 & -16 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

さらに, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4)$ で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}\, f)$ を，a の値に応じて場合分けして求めよ．

(2) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$ のとき，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\, f$ となることを示し，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解を求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151001)

0.120 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$，$p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，$q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$，を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \quad p\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad q\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, p \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ を示せ．
ここで，$\mathrm{Ker}\, p$ は，p の核，$\mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ は合成写像 $g \circ f$ の核である．

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，を条件 $g \circ p = q \circ f$ を満たす線形写像とする．$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2015)　　(m20151002)

0.121 3 次正方行列 A と $\mathbb{R}^3$ 内の平面 P を次式で定義する．

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -18 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \\ 4 & -14 & 3 \end{bmatrix}, \qquad P = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2y + z = 4 \right\}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定義する．
このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\ f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Im}\ f$ と P の共通部分 $l = (\mathrm{Im}\ f) \cap P$ は，$\mathbb{R}^3$ 内の直線とみなすことができる．
$\mathbb{R}^3$ 内の原点 O から直線 l へ垂線 OH を下ろすとき，点 H の座標を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x} \in P$ かつ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を求めよ．

(電気通信大 2016)　　(m20161001)

0.122 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を次式で定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

ただし，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の $\mathbb{R}^3$ における標準内積とする $(i = 1, 2)$．

さらに，W を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^3$ の部分空間とし，線形写像 $g : W \to W$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad (f(\boldsymbol{x}) \in W)$$

で定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ．

(2) W の基底 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ に関する g の表現行列 A を求めよ．

(3) A の固有値をすべて求めよ．

(電気通信大 2016) (m20161002)

0.123 p, q を実数とし，3 次正方行列 A，B を次の通りとする．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} p & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 7 & 0 & q \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ をそれぞれ

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, f$ に含まれるための x, y, z の条件を求めよ．

(3) $g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Im}\, f$ となるような p, q の値を求めよ．ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(x) \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\, f\}$ とする,.

(電気通信大 2017) (m20171002)

0.124 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合として表せ．

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

で定義する．線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) (2) で定義した線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，その基底を 1 組求めよ．

(電気通信大 2018) (m20181001)

0.125 次の 3 次正方行列 A とベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 3 \\ -6 & -7 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の最大の固有値に対応する固有ベクトルをひとつ求めよ．

(3) $\boldsymbol{a}_n = A^n \boldsymbol{a}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義するとき，$\boldsymbol{a}_n$ を求めよ．

(電気通信大 2019)　　(m20191001)

0.126 a, p, q を実数の定数として，行列 A, B を次で定義する，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ p & q & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

さらに，線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,　$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ をそれぞれ

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)\ , \qquad g(v) = Bv \quad (v \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元が最大となる a の値 a_0 を求めよ．さらに，そのときの $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(2) $a = a_0$ のとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(3) $a = a_0$ のとき，$g(\mathrm{Im}\, f) \subset \mathrm{Ker}\, f$ が成り立つような定数 p, q の値を求めよ．
ただし，$g(\mathrm{Im}\, f) = \{g(v) \mid v \in \mathrm{Im}\, f\}$ である．

(電気通信大 2019)　　(m20191002)

0.127 a を実数とし，行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 & 8 & -3 \\ 3 & 3 & -3 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & a \end{bmatrix}$ とする．

線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^5)$ で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) f の像 $\mathrm{Im} f$ ついて，$\mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4$ となるための a の値を求めよ．

(2) a が (1) で求めた値のとき，f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元 $\dim \mathrm{Ker} f$ を求め，その基底を 1 組求めよ．

(3) a が (1) で求めた値のとき，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \\ 7 \\ b \end{bmatrix} \in \mathrm{Im} f$ となる b の条件を求めよ．

(電気通信大 2020)　　(m20201001)

0.128 領域 $D : -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3} < y < \dfrac{2}{3}\pi$ で定義される関数

$$f(x, y) = 2\sin^2 x - 2\sin x \sin y - \sin^2 y$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ.

(2) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 $(a,b) \in D$ をすべて求めよ.

(3) $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ.

(電気通信大 2021) (m20211003)

0.129 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を以下で定義する.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 3y + 6z + 4w \\ -3x + 3y - 8z - 4w \\ 2x + 3y - 3z - 4w \\ -5x + 6y - 15z - 8w \end{bmatrix}$$

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と基底を求めよ.

次に，4 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}$ を用いて，線形写像 $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$g(x) = Ax \quad (x \in \mathbb{R}^4)$ で定義する.

(2) g の像 $\mathrm{Im}\, g$ の次元と基底を求めよ.

(3) 共通部分 $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, g$ の基底を求めよ.

(電気通信大 2022) (m20221001)

0.130 a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x) = \frac{1}{a}$$

$$x < -\frac{a}{2} \text{ および } x > \frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad f(x) = 0$$

と定義する．微分方程式

$$x \neq \pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - y = f(x)$$

$$x = \pm\frac{a}{2} \quad \text{のとき，} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{は連続}$$

$$x \to \pm\infty \quad \text{のとき，} \quad y = 0$$

について，次の問に答えよ.

(1) 微分方程式の解を $y(x)$ とするとき，$y(-x) = y(x)$ を示せ.

(2) 上記の微分方程式の解を求めよ.

(3) a を 0 に近づけると，解はどのような関数に近づくか？

(横浜国立大 2001) (m20011101)

0.131 次の行列 A に対して，多項式 $f(x)$ を $f(x) = \det(xE - A)$ で定義する．ただし，E は 3×3 の単位行列とする.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値を求めよ. (2) $f(A)$ を求めよ. (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ を求めよ.

(横浜国立大 2016)　　(m20161101)

0.132　次の関数をフーリエ級数 $y = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ に展開せよ．

(1) 区間 $x = [-\pi,\ \pi]$ で定義される関数 $y = \begin{cases} a\ :\ x \geq 0\ , & a \text{ は実定数} \\ 0\ :\ x < 0 & \end{cases}$

(2) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される三角関数 $y = a\sin(nx)\cos(nx)$　ここで n は整数

(3) 区間 $x = [0,\ \pi]$ で定義される一次関数 $y = x$

(横浜国立大 2017)　　(m20171102)

0.133　複素数 α に対する複素関数 $f(\alpha)$ を次のように定義する．

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{z-\alpha}dz$$

ただし，C は複素平面上の単位円：$|z| = 1$ である．このとき，$f(2)$ と $f(0.5+0.5i)$ を求めよ．

(千葉大 1997)　　(m19971204)

0.134　微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 1\ \ ,\ \ y(x)\big|_{x=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0 \qquad \text{(i)}$$

に関する以下の設問に答えなさい．

(1) 変数変換 $x = e^t$ を考える．変数 x の定義域が $[1, \infty]$ であるとき，変数 t の定義域を求めなさい．

(2) 合成関数 $y(x(t))$ の微分公式は $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$ で与えられる．合成関数 $y(x(t))$ の 2 階微分 $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ を $\dfrac{d^2y}{dx^2}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dx}{dt}$ を用いて表しなさい．

(3) 変数変換 $x = e^t$ を用いることによって，式 (i) の微分方程式が

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1\ \ ,\ \ y(t)\big|_{t=0} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

に変換できることを示しなさい．

(4) 式 (ii) の微分方程式を解きなさい．

(5) 設問 (4) で求めた微分方程式 (ii) の解から微分方程式 (i) の解 $y(x)$ を求めなさい．

(千葉大 2001)　　(m20011202)

0.135　次の行列 A について答えなさい．

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A の行列式を，A の成分を用いて表しなさい．

(2) 行列 A の成分を用いて，原点を始点とする 3 つの位置ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$,$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ を定義する．ここに，^{T} は行列の転置を示す．これらのベクトルを用いて，$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times\ \mathbf{c})$ が (1) で表した行列式に等しくなることを示しなさい．ここで，$\bullet$ は内積，$\times$ は外積を意味する．

(3) 行列式の絶対値が，これら 3 つのベクトルを 3 辺とする平行 6 面体の体積と等しいことを示しなさい．

(千葉大 2003)　　(m20031205)

0.136 $a > 0$ として，次の重積分に関して各問いに答えなさい．

$$I(a) = \iint_D e^{-(x+y)} dxdy$$

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \leq a\}$$

(1) 領域 D を図示しなさい．

(2) 重積分 $I(a)$ を求めなさい．

(3) $I(a)$ を a の関数と考え，定義域 $0 < a < +\infty$ に対して，極値，変曲点，極限を考慮して，そのグラフを書きなさい．

(千葉大 2009)　　(m20091203)

0.137 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) 行列 A の固有値 λ_1, λ_2 とそれぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ を求めなさい．

(2) 固有ベクトルを縦ベクトルとして，横に並べた行列 $P = [\,\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2\,]$ の逆行列 P^{-1} を求めなさい．

(3) $P^{-1}AP$ を求めなさい．

(4) $(P^{-1})^T = [\,\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\,]$ で定義されるベクトル $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が A^T の固有ベクトルであることを示しなさい．ここで A^T は A の転置行列を表す．

(千葉大 2014)　　(m20141202)

0.138 次の微分方程式の解を求めなさい．

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0\,,\quad x(0) = 1\,,\quad x'(0) = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0\,,\quad t \geq 0$

(2) 上で得られた $x(t)$ を用いて $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$ として，$O-xy$ 直交座標系上で点 $P\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を定義する．$t \geq 0$ に対して点 $P(x, y)$ の描く曲線をグラフで示しなさい．（ヒント：点 P の座標の減衰項を除いた場合の曲線を先に求める.）

(千葉大 2014)　　(m20141204)

0.139 三次元ユークリッド空間の中でデカルト直交座標系 $O-XYZ$ が定義され，次の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が与えられている．このとき，以下の問に答えなさい．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトルを求めなさい．

(2) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を列ベクトルとする行列を $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ として，行列 A^TA を求めなさい．ここで，A^T は A の転置行列である．

(3) 行列 A^TA の逆行列 $\bigl(A^TA\bigr)^{-1}$ を求めなさい．

(4) ベクトル $\boldsymbol{c}$ に行列 $\bigl(A^TA\bigr)^{-1}A^T$ を乗じたベクトル $\boldsymbol{x}_0 = \bigl(A^TA\bigr)^{-1}A^T\boldsymbol{c}$ を求めなさい．

(5) $A\boldsymbol{x}_0$ を求め，このベクトルを位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$，及び，ベクトル $\boldsymbol{c}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{OC}$ と見なしたとき，点 P がベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の定める平面上にあり，かつ $\overrightarrow{PC}$ と $\overrightarrow{OP}$ が直交することを示し，行列 $A\bigl(A^TA\bigr)^{-1}A^T$ の持つ幾何学的な意味を述べなさい．

(千葉大 2015)　　(m20151202)

0.140　三次元空間の中にデカルト直交座標系 $O-XYZ$ 座標系が定義されている．

$y=0$ 平面（$z-x$ 平面）上の点 $A=(x_0,0,z_0)$ を始点とし，一定方向で $y=0$ 平面から遠ざかる点 B がある．線分 AB の長さは λ で，線分 AB の方向ベクトルは，球座標系にならって，水平角（緯度）θ，方位角（経度）φ とする．ただし，$-90^\circ < \theta < 90^\circ$，$0^\circ < \varphi < 180^\circ$．点 B の座標は，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ から，

$$B=(\lambda\cos\theta\cos\varphi+x_0\ ,\ \lambda\cos\theta\sin\varphi\ ,\ \lambda\sin\theta+z_0)$$

で与えられる．定点 E を $E=(0,-a,h)$，$a>0$ として，点 E と点 B を結ぶ直線が $y=0$ 平面（$z-x$ 平面）と交わる点を P とする．$\lambda\to\infty$ の時の P の座標を求めなさい．

（ヒント ： $\lambda\to\infty$ の時の点 P を透視画法では消点 (Vanishing Point) と呼んでいる）

(千葉大 2015)　　(m20151205)

0.141　実数 $t\geq 0$，実数 $a>0$ について定義された関数 $f(t)=\sinh at$ に対して，以下の式で定義される関数 $F(s)$ を求めなさい．

$$F(s)=\int_o^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$$

(千葉大 2016)　　(m20161206)

0.142　実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(t)$ が以下のように定義されているとする．

$$f(t)=\begin{cases} t^2, & 0\leq t\leq 1, \\ 1, & 1\leq t\leq 5, \\ (t-6)^2, & 5\leq t\leq 6. \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1)　区間 $[0,6]$ 上の f のグラフを描け．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^6 f(t)dt$ を求めよ．

(3)　$F(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)ds$ とおくとき，すべての t に対して $F(t)$ を求め，区間 $[0,6]$ 上の F のグラフを描け．

(4)　区間 $(0,6)$ 内の t に対して一階の導関数 $F'(t)$ を求めよ．

(5)　関数 $F_1(t)$ と $F_2(t)$ を以下のように定義する．

$$F_1(t)=\int_2^t f(s)ds\ ,\ F_2(t)=\int_3^t f(s)ds\ .$$

このとき，$F_1(t)-F_2(t)$ を求めよ．

(筑波大 2000)　　(m20001301)

0.143　(1)　次の積分の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \exp\{-a(x^2+y^2\}dxdy$$

(2)　関数 $f(a)$ を $f(a)=\displaystyle\int_0^\infty \exp(-ax^2)dx$ と定義する．$f(a)$ を微分することにより，次の積分の値を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$$\int_0^\infty x^2\exp(-x^2)dx \qquad\qquad \int_0^\infty x^{2n}\exp(-x^2)dx$$

(筑波大 2001)　　(m20011306)

0.144 次の問いに答えなさい.

(1) 三角関数 $y = \sin(x)$ を，単位円を用いて定義しなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の微分（導関数）は $\quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ で定義される.
この定義に基づいて $y = \sin(x)$ の微分を，(1) の定義を用いて導きなさい.

(筑波大 2003) (m20031302)

0.145 $2 \leq x \leq 2$ で定義された関数

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) & \left(\dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right) \\ \\ 0 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

を y 軸の回りに 1 回転してできる曲面によって定義される容器がある. この容器に毎秒 π の割合で水を注入する. 注入開始から 5 秒経過した時点での状態について, 次の各問に答えなさい.

(1) 容器の底面から測った水面の位置 (h) を求めなさい.

(2) 水面の上昇速度 (v) を求めなさい.

(3) 水面の面積の増加速度 (w) を求めなさい.

（筑波大 2004） (m20041306)

0.146 $f(x) = x \ln x$ なる関数を考える. ただし, $\ln x$ は x の自然対数を表す.

(1) $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \ln x$ を求めよ.

(2) $x \geq 0$ で $f(x)$ が連続となるように $f(0)$ を定義し, 曲線 $y = f(x)$ の概形をグラフに描け.

(3) x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

（筑波大 2004） (m20041308)

0.147 $f(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2 \cdot 1}x^2 + \dfrac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots \qquad$ (式 1)
について, 次の問に答えなさい.

(1) 項別微分を行ない導関数 $f'(x)$ を求めなさい.

(2) 微分方程式 $f(x) = f'(x)$ 満たす関数を $f(x) = \exp(x)$ と定義するとき (式 1) はこの定義を満足することを説明しなさい.

(3) 新しい関数 $ch(x)$, $sh(x)$ を

$$ch(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$
$$sh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

で定義するとき, $ch(x)$ および $sh(x)$ の間には

$$sh'(x) = ch(x)$$
$$ch'(x) = sh(x)$$
$$(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$$

なる関係があることを示しなさい.

（筑波大 2004） (m20041312)

0.148 任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の組に実数（スカラー）値を対応させる演算 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が以下を満たすものとする.

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$

(2) 任意の実数 λ に対して $(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ であり, 等号は $\boldsymbol{x} = 0$ の場合に限る.

さらに $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ と定義するとき, 以下の問に答えよ.

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 - |\boldsymbol{y}|^2$ を示せ.

(2) この演算について $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$ が成り立つ. このことを証明済みとして, $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$ を示せ.

（筑波大 2004） (m20041318)

0.149 $f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な単調増加関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 任意の正整数 n に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_0^n f(x+1)dx$$

(2) 実数 s に対して, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n^s} \sum_{i=1}^{n} f(i), \quad n = 1, 2, \cdots$$

と定義する. $f(x) = x^\alpha$（$\alpha > 0$ は定数）のとき, 数列 $\{a_n\}$ が収束する s の範囲を定めよ.

(筑波大 2005) (m20051309)

0.150 単位行列とは異なる n 次の正方行列 A に対し，A^k $(k = 1, 2, \cdots)$ を k 個の A の積 $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$ と定義する．次の 2 つの問いに答えよ．

(1) $A^2 = A$ ならば，A は正則ではないことを証明しなさい．

(2) A が正則ならば，任意の自然数 $k(= 1, 2, \cdots)$ に対して A^k も正則となり，A^k の逆行列 $(A^k)^{-1}$ は A の逆行列 A^{-1} を使って $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ と表せることを証明しなさい．ただし，$(A^{-1})^k$ は A^k の定義と同様に k 個の A^{-1} の積を表すものとする．

(筑波大 2006) (m20061311)

0.151 集合 $P = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \quad a, b, c, d \text{ は実数} \right\}$ および $f(p(x)) = p(x-1)$ で定義される写像 $f : P \to P$ について，以下の設問に答えよ

(1) P は 3 次以下の実係数多項式の集合を表す．上記の $p(x)$ を，行列式を展開して x の多項式の形に表せ．

(2) f が線形写像であることを示せ．

(3) 基底 $\{x^3, x^2, x, 1\}$ に関する f の表現行列を求めよ．

(筑波大 2006) (m20061315)

0.152 V を複素数体 C 上の n 次元ベクトル空間とする．V 上の線形変換 $f\ :\ V \to V$ が $f \circ f = f$ を満たすとき，

$$V = \mathrm{Im}\, f\ \oplus\ \mathrm{Ker}\, f$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ は，それぞれ

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(v) \mid v \in V\}\,, \quad \mathrm{Ker}\, f = \{v \mid\ \in V\,,\ f(v) = 0\}$$

で定義される V の部分空間である．

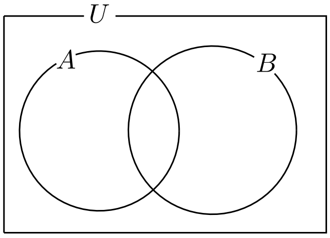
(筑波大 2007)　　(m20071306)

0.153 集合 A, B に対して演算 $\oplus$ を：

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \cap \overline{B}\ \text{または}\ x \in \overline{A} \cap B\}$$

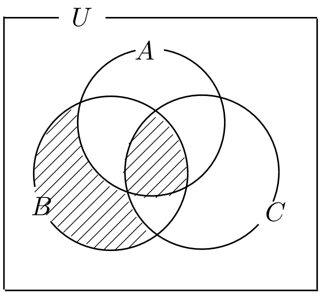
と定義する．$\cap$ は積集合，$\cup$ は和集合，$\overline{A}$ は A の補集合を表す．

(1) $A \oplus B$ に含まれる領域を，下のような図に斜線を入れて示せ．ただし，U は全体集合である．



(2) $\overline{A \oplus B}$ を，A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cup$, $\cap$ 及びカッコだけを使った式で表せ．

(3) 下図の斜線の領域を A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\oplus$ 及びカッコだけを使った式で表せ．



《注》斜線の領域は，原稿では灰色の領域となっていましたが，図の灰色の部分が不明でしたので，

仮に，上記の斜線の部分のように改ざん致しましたので，ご承知下さい．

(筑波大 2007)　　(m20071313)

0.154 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ と定義される．対数関数 $f(x) = \log x$ の x に関する微分が $1/x$ となることを微分の定義 $\displaystyle\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x) - \log x}{\Delta x}$ に基づき示しなさい．

(筑波大 2008)　　(m20081303)

0.155 指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい.

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}' = e^x$ を示しなさい.

(4) $f(x) = e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x = 0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい.

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!} = 0$ を示し，これを用いて $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.156 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい.

$$I_n = \frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.157 $-1 < x < 1$，$-1 < y < 1$ で定義された関数 $f(x,y) = \sin^{-1}(xy)$ の 1 次偏導関数 f_x，f_y と 2 次偏導関数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求め，この関数が極値をもたないことを証明しなさい.

(筑波大 2009)　　(m20091317)

0.158 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された次の二重積分 I_n を求めなさい.

$$I_n = \iint_K xy^n\,dxdy\,, \quad K = \{(x,y)\,|\,y \geqq x^2\,,\ x \geqq y^2\}$$

(筑波大 2010)　　(m20101320)

0.159 n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立とは,

$$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + t_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

が成り立つのが, 係数 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$ の場合に限られることをいう. この定義に従って, 実数 a, b, c, d, e, f を要素とするベクトルについて, 以下に設問に答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が線形独立である必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ は線形独立とならないことを示せ.

(3) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ が, 線形独立となる必要十分条件を求めよ.

(筑波大 2010)　　(m20101321)

0.160 複素数 $z=x+iy$ (i は虚数単位) に対して定義される複素関数 $f(z)$ は正則であり，その実部 $u=u(x,y)$，虚部 $v=v(x,y)$ は $u(x,y)=x^3-3xy^2+x,\ v(0,0)=0$ を満たすという. 以下の問いに答えよ.

(1) $v(x,y)$ を求めよ. 必要があれば，$f(z)$ が Cauchy − Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを用いてよい.

(2) $f(z)$ を求めよ.

(3) C を複素平面上の単位円周，C の向きを反時計回りとするとき，複素積分

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

の値を計算せよ.

(筑波大 2011)　　(m20111303)

0.161 正弦関数 $\sin x$ の逆関数 $\mathrm{Sin}^{-1}x$ を用いた関数の導関数について以下の問いに答えよ．ただし，$\mathrm{Sin}^{-1}x$ は値域を閉区間 $[-\pi/2,\pi/2]$ に制限した主値を表す関数である.

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示せ.

(2) 定義域 $-1<x<0$ および $0<x<1$ において $\dfrac{d}{dx}\left(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\right)$ を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111316)

0.162 次数が 2 以下の実係数多項式全体で構成される実線形空間 $P_2(R)$ において

内積　$(f,g)=\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$　$(f,g\in P_2(R))$

ノルム　$||f||=\sqrt{(f,f)}$

を定義する．以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)=1$ のとき，ノルム $||f||$ を求めよ.

(2) $f(x)=1,\ g(x)=x$ のとき，内積 (f,g) を求めよ.

(3) 基底 $\{1,x,x^2\}$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を求めよ.

(筑波大 2011)　　(m20111318)

0.163 (1) 関数 $y=\sin^2 x$ のグラフを (x,y) 平面上に描きなさい.

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ とは何か．定義を述べなさい.

(3) ある畑の面積は $0.5ha$ である．この面積を km^2 の単位で表しなさい.

(筑波大 2012)　　(m20121313)

0.164 (1) 2 つの複素数 $z_1=a+bi$ および $z_2=c+di$ を考える（a,b,c,d は実数であり, i は虚数単位である）．いま, 新たな複素数 z を $z=z_1z_2$ で定義する．このとき，$|z|=|z_1||z_2|$ であることを示しなさい.

(2) 前小問 (1) で述べた状況で，z の偏角が，z_1 の偏角と z_2 の偏角の和に等しいことを示しなさい. ただし，$a,c,ac-bd$ がいずれも 0 でないとする.

(筑波大 2012)　　(m20121315)

0.165 V を複素ベクトル空間，ϕ を V の線形変換とし，$a \in \mathbb{C}$ に対して，

$$V_a = \left\{ v \in V \,\middle|\, \phi(v) = av \right\}$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) V_a が部分空間であることを示せ．

(2) a, b, c がすべて互いに異なるなら，

$$(V_a + V_b) \cap V_c = \{0\}$$

となることを示せ．ここで，$V_a + V_b$ は $\left\{ v + u \,\middle|\, v \in V_a\,,\ u \in V_b \right\}$ を表す．

(筑波大 2013)　　(m20131302)

0.166 2 変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ （ただし，$(x,y) \neq (0,0)$) と定義する．ここで，log は自然対数である．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の全微分を求めよ．

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ について，点 $(a, b, f(a,b))$ における法線および接平面の方程式を求めよ．

(3) $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ を $D = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 < x^2+y^2 \leqq 1 \right\}$ として求めたい．$f(x,y)$ は $(x,y) = (0,0)$ において定義されていないので，
$D_\varepsilon = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \varepsilon^2 < x^2+y^2 \leqq 1\,,\ \varepsilon \in \boldsymbol{R} \right\}$ として，$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy$ を計算せよ．

(筑波大 2013)　　(m20131308)

0.167 $\boldsymbol{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \boldsymbol{R} \right\}$ とし，線形変換 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ は，$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$，
$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$，$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ を満たすとする．

(1) この線形変換 f の標準的な基底に関する行列表現を示せ．

(2) ある実数 $\lambda(\neq 0)$ が存在して，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ のうち，$||\boldsymbol{x}|| = 1$ を満たすベクトルをすべて求めよ．

(3) 整数 $n(>0)$ に対し，線形変換 f^n を，$f^1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$，$f^n(\boldsymbol{x}) = f\big(f^{n-1}(\boldsymbol{x})\big)$ で帰納的に定義する．f^n の標準的な基底に関する行列表現を，直交行列と対角行列を用いて表せ．

(筑波大 2014)　　(m20141302)

0.168 複素関数 $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ （z の実部）の微分可能性を定義に基づいて調べよ．

(筑波大 2014)　　(m20141307)

0.169 半径 a の球体の領域 $D = \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq a^2 \right\}$ を積分領域とする定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\sqrt{x^+y^2}dxdydz$ の値を以下の問いに従って求めよ．

(1) x, y, z を極座標 r, θ, φ の関数として表せ．r, θ, φ の定義を図示すること．

(2) x, y, z の r, θ, φ の関するヤコビアンを計算せよ．

(3) 極座標を用いて定積分の値を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141310)

0.170 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x-[x] & 0\leq x-[x]<\frac{1}{2} \\ 1-(x-[x]) & \frac{1}{2}\leq x-[x]<1 \end{cases}$$

で定義する．ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す．$x\in\mathbb{R}$ に対して

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(2^k x)}{2^k}$$

とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の，$-1\leq x\leq 1$ におけるグラフを描け．

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して，$g(x)\leq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $g(x)$ は連続であることを示せ．

(4) 自然数 n に対して，$g\left(\dfrac{1}{2^n}\right)=\dfrac{n}{2^n}$ を示せ．

(5) 関数 $g(x)$ は $x=0$ において微分不可能であることを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141315)

0.171 $f:X\to X$ を集合 X 上の写像とし，写像 $f^n:X\to X$ を，$n\geq 1$ のとき $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ 個}}$，$f^0=\mathrm{id}_X$（=X 上の恒等写像）で定義する．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)\right)\subseteq\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(2) f が単射ならば，$f\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)\right)=\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty}f^n(X)$ が成り立つことを示せ．

(筑波大 2014)　　(m20141316)

0.172 n 次元実数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，内積を標準内積（自然な内積）で定義する．A を n 次直交行列，F を $F(x)=A\boldsymbol{x}$ で定められる $\boldsymbol{R}^n$ の線形変換とするとき，以下の問いに答えよ．なお，$\boldsymbol{R}^n$ のベクトルはすべて列ベクトルとする;

(1) $\boldsymbol{R}^n$ のある正規直交基底を $c_1,\ \cdots,\ c_n$ とする．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ で表すとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{c_i\}$ に関する座標ベクトルは
$\begin{bmatrix}(\boldsymbol{x},\ c_1)\\ \vdots \\ (\boldsymbol{x},\ c_n)\end{bmatrix}$ で与えられることを示せ．

(2) 直交変換の定義を正確に述べよ（同値な定義のどれでもよい）．また，F が直交変換である（直交変換の定義を満たす）ことを示せ．

(3) A の固有値 λ（実数に限らない）の絶対値は 1 であること $(|\lambda|=1)$ を示せ．

(筑波大 2015)　　(m20151311)

0.173 実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ と $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ に対して実数列 $\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots\}$ をその和と定義し，実数 α に対して $\{\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \cdots\}$ を実数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ の α 倍と定義すると実数列の全体は実ベクトル空間を成す．このとき (1)〜(4) がこのベクトル空間の部分空間であるかどうかを，理由を示して答えなさい．

(1) ゼロに収束する実数列の全体

(2) 1 に収束する実数列の全体

(3) 有界な実数列の全体

(4) 非有界な実数列の全体

(筑波大 2015)　　(m20151312)

0.174 確率変数 X と Y の同時確率分布 $P[X=x,\ Y=y]$ $(x=0,1,2;\ y=0,1,2,3)$ が下の表のように与えられている．ただし，c は実数である．

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	c	$\frac{30}{120}$	$\frac{15}{120}$	$\frac{1}{120}$
1	$\frac{20}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{6}{120}$	0
2	$\frac{5}{120}$	$\frac{3}{120}$	0	0

このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 定数 c の値を示しなさい．

(2) $X > y$ となる確率 $P[X > Y]$ を求めなさい．

(3) 確率変数 X と Y が独立であることの定義を記述し，表に与えられた X と Y が独立であるかどうかを判定しなさい．

(筑波大 2015)　　(m20151316)

0.175 n 次正方行列 A と B の交換子 $[A,B]$ を $AB-BA$ と定義する．次を示せ．

ただし O は零行列を表すものとする．

(1) $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$

(2) A と B が交代行列ならば，$[A,B]$ も交代行列である．

(3) A と $[A,B]$ が可換ならば，任意の正整数 n に対して $[A^n,B]=n[A,B]A^{n-1}$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161301)

0.176 V は実係数の 4 次以下の多項式の全体

$$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}\right\}$$

とする．V は $1,x,x^2,x^3$ を基底とする実ベクトル空間になることが知られている．

さて，線形変換 $T\ :\ V \to V$ を

$$\left(T_p\right)(x)=(1-x^2)\frac{d^2p}{dx^2}(x)-2x\frac{dp}{dx}(x)+12p(x)\ , \quad p \in V$$

によって定義する．次の問いに答えよ．

(1) V の基底 $1,x,x^2,x^3$ に対する T の表現行列を求めよ．

(2) $\operatorname{rank} T$ を求めよ．

(3) $\ker T$ を求めよ．

(筑波大 2016)　　(m20161302)

0.177　f を実数全体で定義された実数値関数とする．

(1)　「f は至るところ連続ある」という定義を述べよ．

(2)　「f は一様連続ある」という定義を述べよ．

(3)　関数 $f(x) = \sin x$ は一様連続であることを証明せよ．

(4)　関数 $f(x) = x^2$ は一様連続でないことを証明せよ．

(筑波大 2016)　　(m20161305)

0.178　関数 $f(x)$ と f の定義域に含まれる区間 $[0, 1]$ を考える．

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

で与えられる区間 $[0, 1]$ の分割に対して，

$$I_k = (x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

とし，次の和を定義する．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sup_{x \in I_k} f(x)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \inf_{x \in I_k} f(x)$$

この S_n, s_n がそれぞれ $n \to \infty$ において極限を持つとき，

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

とする．$S = s$ ならば関数 f が区間 $[0, 1]$ で積分可能であるといい，

$$S = s = \int_0^1 f(x) dx$$

と書く．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$f(x) = x$ とするとき，(a) S_n, s_n を求め，(b) f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

(2)　以下の関数 f が $[0, 1]$ 上で積分可能かどうかを示せ．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \text{ が無理数}) \\ x & (x \text{ が有理数}) \end{cases}$$

ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ である．

(筑波大 2016)　　(m20161312)

0.179　確率 p で成功し，確率 $1 - p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す．X_i は i 回目の実験が成功したときに $X_i = 1$，失敗したときに $X_i = 0$ となる確率変数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　「確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立である」ことの定義を述べよ．

(2)　確率変数 Y が確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ で値 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をとるとき，その期待値を μ，分散を σ^2 とする．このとき任意の実数 λ に対して，「$|Y - \mu| > \lambda\sigma$ となる」確率 $P(|Y - \mu| > \lambda\sigma)$ は以下の不等式を満たすことを，分散 σ^2 の定義を変形することにより示せ．

$$P(|Y - \mu| > \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

(3) (2) で得られた不等式を用いて，成功確率が 0.5 の独立な試行を n 回行った時，「成功割合が 40% 以上で，かつ 60% 以下となる」確率が 0.99 以上となるような n の下限（すなわち最低限必要な実験回数）を示せ.

(筑波大 2016)　　(m20161313)

0.180 確率変数 Z が x 以上になる確率を $P(Z \geq x)$ と書くとき，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して Z の $100(1-\alpha)$ パーセント点 z_α は

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義される．特に Z が標準正規分布に従うとき，z_α の具体的な値は次表で与えられる.

α	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

また，期待値 μ，分散 σ^2 が正規分布を $N(\mu, \sigma)$ で表すとする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 期待値 μ，分散 σ^2 が未知の $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団からとった n 個の標本に対して，標本平均と標本分散をそれぞれ $\overline{x}$ と s^2 とする．このとき，$\sqrt{n}\dfrac{(\overline{x}-\mu)}{s}$ は t 分布に従う．t 分布の $100(1-\alpha)$ パーセント点を $t_{n-1;\alpha}$ とするとき，μ の $100(1-\alpha)$ パーセント信頼区間を示せ.

(2) $N(\mu, \sigma)$ に従う母集団から大きさ 4 の標本を選んだところ，観測値は 12.7, 13.0, 13.3, 13.0 であったとする．以下の (a),(b) の場合に μ の 95% 信頼区間を求めよ.

(a) $\sigma^2 = 0.16$ であることがわかっている場合

(b) σ^2 が未知である場合（ただし，$t_{n-1;\alpha}$ は z_α に等しいと仮定する）

(筑波大 2016)　　(m20161314)

0.181 高々2 次の実係数多項式全体が成す線形空間を $V = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R\}$ とする．ただし，R は実数全体の集合であり，x は実数値をとる変数とする．また，多項式 $f(x)$, $g(x)$ の和とスカラー倍は，$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ と定義する．以下の設問に答えよ.

(1) $\{1, 1+x, x+x^2\}$ は線形空間 V の基底となることを示せ.

(2) 任意の f, $g \in V$ に対して $(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$ なる演算を定義する．この演算 (f, g) は以下の内積の性質それぞれを満たすことを示せ.

① 任意の $f, g \in V$ に対して $(f, g) = (g, f)$

② 任意の $f, g, h \in V$ に対して $(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$

③ 任意の $f, g \in V$ と任意の実数 λ に対して $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$

④ 任意の $f \in V$ に対して $(f, f) \geq 0$ で，等号成立は $f(x) = 0$ のときに限る.

(3) (2) で定義した内積 (f, g) のもとで $1, x, 3x^2 - 2$ は直交することを示せ．さらに，$1, x, 3x^2 - 2$ を正規化して V の正規直交基底を 1 組定めよ.

(4) (3) で求めた V の正規直交基底を $\{L_1, L_2, L_3\}$ とする．線形空間 V から 3 次元の数ベクトル空間 R^3 への線形写像 φ を

$$\varphi(1) = c_1,\ \varphi(1+x) = c_2,\ \varphi(x+x^2) = c_3$$

で定めるとき，$\{L_1, L_2, L_3\}$ と $\{c_1, c_2, c_3\}$ に関する φ の表現行列 A_φ を求めよ．ただし，c_1, c_2, c_3 は R^3 の線形独立な数ベクトルとする.

(5) A_φ の行列式，逆行列を求めよ.

(筑波大 2016)　　(m20161319)

0.182 複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = \sinh 2z$ について，以下の問いに答えよ．ただし，x, y は実数とする． なお，$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ と定義し，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いてよい．

(1) $f(z) = u + iv$ とするとき，u, v を x, y を用いて表せ． ただし，u, v は x, y の実関数とする．

(2) $f(z) = 0$ となる z を求めよ．

(3) $w = f(z)$ により z 平面上の直線 $x = \dfrac{1}{2}$ を w 平面上に移したとき，w 平面上の図形は楕円になる．w 平面上にその楕円を図示せよ．

(筑波大 2017) (m20171302)

0.183 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 を求めよ．ただし，$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ とする．

(2) A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底となるように選ぶことができる．そのように選んだ $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ を 1 組求めよ．

(3) A を $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 R，および，その逆行列 R^{-1} を答えよ．

(4) x, y, z をそれぞれ任意の実数とし，ベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で定義する．

また，$\boldsymbol{u}^T = (x \quad y \quad z)$ とする．このとき，x, y, z を変数とする関数 $f(x, y, z) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u}$ について考える．

(a) (3) で求めた R を用いて新たな変数 X, Y, Z を $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R^{-1}\boldsymbol{u}$ で定義し，

$f(x, y, z)$ を X, Y, Z の関数 $f(x, y, z) = F(X, Y, Z)$ と表す．このとき，関数 $F(X, Y, Z)$ を X, Y, Z の式で表せ．

(b) 任意の x, y, z に対して，$f(x, y, z) \geq 0$ であることを示せ．また，$f(x, y, z) = 0$ を満たす x, y, z を求めよ．

(筑波大 2017) (m20171303)

0.184 $f(x, y) = xy$ について，以下の設問に答えよ．

(1) $f(x, y)$ の全微分 df を求めよ．

(2) x-y 平面において，c をパラメータとする曲線群 $f(x, y) = c$ と直交し，点 $(p, 0)$ を通る曲線 C_p を求めよ．ただし，$p > 0$ とする．

(3) C_p 上にあり $x > 0$ を満たす点の集合を D_p と表す．領域 D を

$$D = \bigcup_{1 \leq p \leq 2} D_p$$

によって定義するとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{x^2} dxdy$$

の値を求めよ．

(筑波大 2017)　　(m20171304)

0.185 $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を次のように定義された線形写像とする.

$$F(x,y,z,w) = (x-y+z+w,\ 2x-2y+3z+4w,\ 3x-3y+4z+5w)$$

すべての $(x,y,x,w) \in \mathbb{R}^4$ に対して．3 次元ベクトル $F(x,y,z,w)$ の集合は $\mathbb{R}^3$ の部分区間となる．それを Im (F) と表す．また，$F(x,y,z,w) = (0,0,0)$ となる 4 次元ベクトル (x,y,z,w) の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間となる．それを Ker (F) と表す．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) Im (F) の次元と基底ベクトルを求めよ.

(2) Ker (F) の次元と基底ベクトルを求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171307)

0.186 $E = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれの正整数 m に対して，

$$R_m(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{2i}{m},\ \frac{j}{m}\right)\frac{2}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y) = x + y$ であるとき，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和 $R_m(f)$ を求めよ．　ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ である.

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での二重積分を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ.

(筑波大 2017)　　(m20171309)

0.187 X を非負値離散型確率変数とする．$a > 0$ に対して，以下の問いに答えよ.

(1) 確率変数 I を次のよう定義する，

$$I = \begin{cases} 1 & (X \geq a) \\ 0 & (0 \leq X < a) \end{cases}$$

$Pr(A)$ を事象 A が真である確率を表すことにすると，I の期待値 $E(I)$ と「 $X \geq a$ となる」確率 $Pr(X \geq a)$ は以下の等式 (i) を満たすことを示せ，

$$E(I) = Pr(X \geq a) \tag{i}$$

(2) 等式 (i) を用いて，$E(X)$ と $Pr(X \geq a)$ は以下の不等式 (ii) を満たすことを示せ.

$$Pr(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \tag{ii}$$

(3) 不等式 (ii) を用いて，$Pr(\,|X - E(X)|\, \geq a)$ と X の分散 $V(X)$ は以下の不等式 (iii) を満たすことを示せ.

$$Pr(\,|X - E(X)|\, \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2} \tag{iii}$$

(筑波大 2017)　　(m20171310)

0.188 関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) f は原点 $x=0$ で連続である．その理由を答えよ．

(2) f の原点 $x=0$ 以外の導関数を求めよ．

(3) f の原点 $x=0$ での微分係数を定義に従って求めよ．

(4) f の導関数 f' が原点 $x=0$ で連続かどうかを，その理由とともに答えよ．

(筑波大 2018)　　(m20181310)

0.189 $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられている．

(1) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に各点収束する 」の定義を述べよ．

(2) 「$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束する 」の定義を述べよ．

(3) 次の関数列が $\mathbb{R}$ 上で定数関数 0 に一様収束するかを判定せよ．

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

(4) $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上で関数 $f(x)$ に一様収束しているとする． すべての $n=1,2,\cdots$ について $f_n(x)$ が連続関数ならば，$f(x)$ も連続関数であることを示せ．

(筑波大 2018)　　(m20181321)

0.190 テレビ番組 A の第 1 週の世帯視聴率 p および第 2 週の世帯視聴率 q を考える．第 1 週および第 2 週において，各世帯は独立にテレビ番組 A をそれぞれ確率 p,q で視聴すると仮定する．また，各世帯は十分に大きな母集団から無作為に抽出されるものとする．なお，$0 \leq a \leq 1$ を満たす a に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-a)\%$ 点 z_a は

$$P_r(Z \geq z_a) = a$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$P_r(Z \geq z_a)$ は Z が z_a 以上になる確率である．

a	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_a	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

(1) 900 世帯の視聴データから，第 1 週の世帯視聴率 p の推定値 $\hat{p}=0.1$ を得た． このとき，p の 95% 信頼区間を求めよ．

(2) 900 世帯の視聴データから，第 2 週の世帯視聴率 q の推定値 $\hat{q}=0.08$ を得た．第 2 週の世帯視聴は第 1 週より低いと言えるか．有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2019)　　(m20191313)

0.191 (1) $f(x)$ は $x \geqq 0$ において定義された実数値連続関数であって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して広義積分 $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ が収束すると仮定する．このとき，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

(2) $f(x)$ は (1) の仮定を満たすとする．(1) の等式を用いて，任意の正の実数 a,b $(a<b)$ に対して，

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0) \log \frac{b}{a}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 次の広義積分の値を求めよ． $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^2} dx$

(筑波大 2019)　　(m20191317)

0.192 (1) 関数 $f(x,y)$ を次のように定義する．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

この関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,0)$ を求めよ．

② $k \neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,k)$ を求めよ．

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け．

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する．

$$g(x,y) = \frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① 導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$，$g_{xx}(x,y)$，$g_{xy}(x,y)$，$g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ．

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ．なお，3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い．

(筑波大 2020)　　(m20201304)

0.193 $y=\tan x$ の逆関数を $y=\arctan x$ と書く．ある y の値に対して $y=\tan x$ を満たす x は多数存在するが，定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に限る場合，$y=\tan x$ は単射となり一意に逆関数を定義することができる．この定義域における $y=\tan x$ の逆関数を $y=\mathrm{Arctan}\,x$ と書くこととする．

上記の定義域において，次の問に答えよ

① $y=\mathrm{Arctan}\,x$ について，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ を証明せよ．

② 次の無限級数 S の値を求めよ．ただし，その導出過程を示すこと．

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

(筑波大 2020)　　(m20201305)

0.194 次の説明を読んで，各設問に答えよ．ただし，計算や解答の際には，小数第 4 位を四捨五入した値を用いよ．

ある地方自治体の首長選挙では，現職と新人 1 人の 2 人だけが立候補した．地方報道機関が出口調査（投票を済ませた人に直接投票先をたずねる調査）を行ったところ，以下の結果を得た．なお，各標本は無作為に抽出され，全てが有効投票であり，出口調査の無回答者もいなかったものとする．

投票先	現職	新人
人数	441	400

また，$0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす α に対して標準正規分布に従う確率変数 Z の $100(1-\alpha)\%$ 点 z_α は

$$Pr(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

で定義され，その具体的な値は次表で与えられる．ここで，$Pr(Z \geq z_\alpha)$ は Z が z_α 以上になる確率である．

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
z_α	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

(1) 現職の投票率 p の 95% 信頼区間を求めよ．得票率とは，有効投票数に占めるその候補者が獲得した票数の割合である．

(2) 現職が当選するといえるか，適当な帰無仮説と対立仮説を立て，有意水準 0.05 で検定せよ．

(筑波大 2020)　　(m20201308)

0.195 (1) $z = f(x, y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 u, v に対して，$x = u + v$, $y = uv$ のとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 - 4y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x,\ y) = x^4 + y^4 - 2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211303)

0.196 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y) = (2x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ を考える．

(a) 点 $(1, -1)$ において，$f(x, y)$ の変化率（方向微分）が最大となる方向，およびその最大値を求めよ．

(b) $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(c) $x^2 + y^2 \geq 1$ において，不等式 $0 < f(x, y) \leq \dfrac{2}{e}$ が成り立つことを示せ．

(d) $\mathbb{R}^2$ における $f(x, y)$ の最大値，最小値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211316)

0.197 3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える．なお，以下で I は 3 次の単位行列とする．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ．なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること．

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ．
（設問 (2) で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および，A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい．）

(4) 係数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 $\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある．3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ．

(筑波大 2021)　　(m20211318)

0.198 (1) $x > 0$ に対して，次の関数を定義する．

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数 n に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ が成り立つことを示せ．

(2) 次の定積分を $u = -(n+1)\log x$ $\left(\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}}\right)$ とする置換積分により計算せよ．ただし，n は任意の正の整数を表す．

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

(3) 以下の恒等式を証明せよ．

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-n} \quad \left\{= \lim_{n\to\infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \cdots + n^{-n})\right\}$$

ただし，(2) の結果，および，次のマクローリン展開の結果を用いること．

$$x^{-x} = e^{(-x\log x)} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x\log x)^n}{n!}$$

また，積分 $\int$ と和 $\sum$ の順序は交換してもよいとする．

(筑波大 2022)　　(m20221307)

0.199 $F(x, y) = xy\tan y + \pi \tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$ $(x \to 0)$ を満たす実数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$ を求めよ．ただし，$o(\cdot)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n - \dfrac{1}{2}\right)\pi,\ \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \qquad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\dfrac{1}{n},\ d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x,\ \varphi(x)) = 0 \quad (x \in I), \qquad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (n\to\infty)$$

と表示したときの実数 $b_1,\ b_2,\ b_3$ を求めよ.

(筑波大 2022)　　(m20221316)

0.200 (1) n 次正方行列 A について，A の固有値，固有ベクトルの定義を述べよ．

(2) B は 3 行 3 列の行列で，次の (a)(b)(c) を満たしている．

(a) B の固有値は 1 と 2 である．

(b) B の 1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる．

(c) B の 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ がとれる．

上の条件 (a)(b)(c) を満たす行列 B を求めよ．

(埼玉大 1998)　　(m19981402)

0.201 a を正の実数とし，次の不等式で定義された領域を D であらわす．

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{a}\,, \qquad x \geq 0\,,\ y \geq 0$$

このとき，次の値を求めよ．

$$\iint_D dxdy\ , \qquad \iint_D x\,dxdy$$

(埼玉大 1999)　　(m19991403)

0.202 $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して内積 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を次のように定義する．

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

さらに，$\boldsymbol{x}$ の長さを $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する．

次の (1),(2),(3) に答えよ．

(1) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leq ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式　$||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$　が成り立つことを証明せよ．

(3) 上の (1),(2) において等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(埼玉大 2002)　　(m20021403)

0.203 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ とし, Ω で定義された実数値関数 f を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

とする．ただし，$\tan^{-1}$ は正接関数 tan の定義域を $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に制限したものの逆関数である.

また, $D = \{(x,y) \in \Omega \mid 2 \leqq\ x^2+y^2 \leqq\ 3\,,\ 0 \leqq\ y \leqq\ x\}$ とおく. 次の問に答えよ.

(1) f の 1 階の偏導関数をすべて求めよ.

(2) f の 2 階の偏導関数をすべて求めよ.

(3) D を図示せよ.

(4) 重積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(埼玉大 2005)　　(m20051406)

0.204 (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は次を満たすとする.

$$\text{すべての自然数 } n \text{ に対して } a_n \geqq 0 \text{ であり}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ である.}$$

このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成立するか. 成立するならば証明し, 成立しないならば反例をあげよ.

(2) 次の条件をすべて満たす関数 f の例を挙げよ.

- f は区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数である.
- すべての $x \in [0,\infty)$ に対し $f(x) \geqq 0$ である.
- $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx < \infty$ である.
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ が成立しない.

(埼玉大 2005)　　(m20051407)

0.205 写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+4y+3z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$ により定義する.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ と

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ について，次の問に答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $(T(\boldsymbol{a}_1),\ T(\boldsymbol{a}_2),\ T(\boldsymbol{a}_3)) = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2)A$ を満たす 2 行 3 列の行列 A を求めよ.

(埼玉大 2006)　　(m20061406)

0.206 (1) 区間 $(0,1]$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ で

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(2) 区間 $[1,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $g(x)$ で

$$\int_1^{\infty} |g(x)|\,dx < \infty \quad \text{かつ} \quad \sup_{1\leq x<\infty} |g(x)| = \infty$$

を満たす例を一つ挙げよ.

(埼玉大 2010)　　(m20101404)

0.207 xy 平面上で定義された関数 $f = f(x,y)$ は，正値で 2 階微分可能であり,

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすものとする．また，$g(x,y) = \log f(x,y)$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ が満たす式を，f を用いずに表せ.

(2) $\phi(x)\psi(y)$ の形の関数を変数分離型関数とよぶ，ϕ と ψ が正値で 2 階微分可能な関数であるならば，$f(x,y) = \phi(x)\psi(y)$ は，上の条件 $(*)$ を満たすことを示せ.

(3) 上の条件 $(*)$ を満たす関数 f は，変数分離型の関数であることを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111409)

0.208 $\alpha > 0$ とする．$x \geqq 1$ で定義された関数 $f_\alpha(x)$ は，

$$x \in [n, n+1) \text{ において}\quad f_\alpha(x) = \frac{1}{n^\alpha}$$

となるものとする．ただし，n は自然数とする．このとき

$$\int_1^{N+1} f_\alpha(x)dx = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$$

となることを利用して次の問いに答えよ.

(1) $\alpha > 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束することを示せ.

(2) $\alpha \leqq 1$ のとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が発散することを示せ.

(埼玉大 2011)　　(m20111410)

0.209 k を 2 以上の自然数とし，$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\right\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = x^x + xy^k$ を考える.

(1) $f_x = f_y = 0$ を満たす点を求めよ.

(2) $k = 2$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ.

(3) $k = 3$ のとき，(1) で求めた点で関数 f は極値をとるかどうかを判定せよ.

(埼玉大 2014)　　(m20141407)

0.210 定数 $b > a > 1$ があり，$f(x) = 2\log_e(x-a) - \log_e(x-b)$ とする．以下の 4 問に答えよ.

(1) $f(x)$ が定義される x の範囲を示せ.

(2) $f(x)$ を微分せよ.

(3) $f(x)$ が最小となるときの x を a と b で示せ.

(4) $x = 6$ で最小となり, そのときに $f(x) = 2\log_e 2$ であった．a と b を求めよ.

（群馬大 2004）　　(m20041503)

0.211 $3\times\ 3$ の行列に関する積は, 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と表すとき, ベクトル $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し,

$\boldsymbol{Ad} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$ と定義し, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対して,

$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ を $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ と定義する.

このとき以下の 2 問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{19}{7} & 1 & b \\ \frac{41}{14} & c & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ となるときの a, b, c の値を求めよ.

(2) $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ とし, $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき, $\boldsymbol{Cd}=-2\boldsymbol{d}$ となるときの x と z を, y を用いて示すと $x=py$, $z=qy$ になる. p, q の値を求めよ.

(群馬大 2005)　　(m20051505)

0.212 以下の (1)-(5) の行列の積が定義されるかどうか判断し，定義されない場合には×を，定義される場合には積の計算結果を，解答欄に記入せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(図書館情報大 2002)　　(m20021609)

0.213 (1) A, B, C を２次の正方行列とするとき，$(A+B)C=AC+BC$ が成り立つことを示せ.

(2) ２次の行列の行列式，３次の行列の行列式，４次の行列の行列式のそれぞれの定義を記せ.

(3) 行列について，上記の (1), (2) 以外に知っていることを記せ.

（茨城大 1999)　　(m19991706)

0.214 集合 S を　$S=\left\{a \mid a=\dfrac{p}{10^k},\ k \text{ は 1 以上の整数},\ p \text{ は } 1 \leq p < 10^k \text{である整数}\right\}$ と定義するとき，次の各問に答えよ.

(1) $a \in S$ の小数表示を，a に対応する k と p を用いて説明せよ.

(2) S は無限集合であることを示せ.

(3) 任意の $a \in S$ に対して，$x_n \notin S$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ となる数列 $\{x_n\}$ が構成できることを示せ.

(茨城大 2001)　　(m20011703)

0.215 関数 $y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限すると, その逆関数 $y=\mathrm{Arctan}\, x$ を考えることができる. 次の各問に答えよ.

(1) $y=\mathrm{Arctan}\, x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ は $\dfrac{1}{1+x^2}$ となることを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \mathrm{Arctan}\, x\, dx$ を求めよ.

(茨城大 2005)　　(m20051702)

0.216 数列 $\{a_n\}$ を　$a_1=1$　$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}$　$(n=1, 2, \cdots)$　で定義する．次の各問に答えよ.

(1) ${a_n}^2<2$　$(n=1, 2, \cdots)$ を示せ.　(2) 数列 $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ.

(3) 数列 $\{{a_n}^2\}$ は収束することを示せ．また，その極限値を求めよ.

(茨城大 2006)　　(m20061705)

0.217 関数 $y=\sin x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると，その逆関数 $y=\mathrm{Arcsin}\,x$ を考えることができる．次の各問に答えよ．

(1) $f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ は，どのような 2 つの関数の合成関数とみなすことができるか答えよ．

(2) 合成関数の微分公式に従い，$f(x)=(\mathrm{Arcsin}\,x)^2$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた関数 $f'(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$ を求めよ．

(茨城大 2007)　　(m20071701)

0.218 (x,y) を平面上の直交座標，(r,θ) を極座標とする．以下の各問に答えよ．

関数 $f(x,y)$ の定義域内の点 $\boldsymbol{p}$ およびベクトル $\boldsymbol{u}=(a,b)$ に対し，極限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}$ を点 $\boldsymbol{p}$ での $\boldsymbol{u}$ 方向の微分係数と呼び，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})$ で表す．

(1) 関数 $f(x,y)=r\sin 3\theta$ の原点 $\boldsymbol{o}$ での $\boldsymbol{u}=(\cos\phi,\ \sin\phi)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．また，偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{o})$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{o})$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{p}$ の近傍で偏微分可能，かつ，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が点 $\boldsymbol{p}$ で連続ならば等式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{p})=a\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+b\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p})$$

が成立することを示せ．次に (1) の関数 f は原点 $\boldsymbol{o}$ でこの等式を満たさない理由を説明せよ．

(茨城大 2007)　　(m20071706)

0.219 実数体上のベクトル空間 V 上の一次変換 f に対して，V の部分空間 $\mathrm{Ker}\ f$ を

$$\mathrm{Ker}\ f=\{x\ :\ f(x)=0\,,\ x\in V\}$$

と定義する．また，$u_1,\ u_2,\cdots,u_h$ を $\mathrm{Ker}\ f$ の基底とし，それに $v_1,\ v_2,\cdots,v_k$ を加え V の基底とする．以下の各問いに答えよ．

(1) $v_1,\ v_2,\cdots,v_k$ が $\mathrm{Ker}\ f$ を法として一次独立である，すなわち

$$c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_kv_k\in \mathrm{Ker}\ f \quad \text{ならば} \quad c_1=c_2=\cdots=c_k=0$$

となることを示せ．

(2) $f(v_1)\,,\ f(v_2)\,,\cdots,f(v_k)$ が一次独立であることを示せ．

(3) $f(V)=\{f(x)\ :\ x\in V\}$ とするとき，

$$\dim V=\dim \mathrm{Ker}\ f+\dim f(V)$$

となることを示せ．

(茨城大 2009)　　(m20091705)

0.220 $f(t)$ を $[0,\infty)$ 上で連続かつ広義積分可能な関数とする． また a,b は $a,b>0$ を満たす実数とし，$g(x,y)=f(a^2x^2+b^2y^2)$ とおく．以下の各問いに答えよ．

(1) $f(t)$ が $[0,\infty)$ 上で広義積分可能であることの定義を記述せよ．

(2) 変数変換

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{a}\cos\theta \\ y = \dfrac{r}{b}\sin\theta \end{cases}$$

によって，$r\theta$ 平面内の集合 $[0,\ 1] \times \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ は xy 平面内のどのような集合に写るか図示せよ．

(3) 等式

$$\iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} g(x,y)dxdy = \frac{\pi}{4ab}\int_0^\infty f(t)dt$$

が成り立つことを示せ．

(4)

$$I(a,b) = \iint_{[0,\infty)\ \times\ [0.\infty)} e^{-a^2(x^2+1)-b^2(y^2+1)}dxdy$$

とする．(3) の結果を用いて，条件 $a^2+b^2=1$ の下での $I(a,b)$ の最小値を求めよ．

(茨城大 2009)　　(m20091706)

0.221 座標平面内の領域 $D = \{(x,y)\,|\,x,\,y$ は実数で $x^2+y^2 \leqq 1$ をみたす $\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ について, 以下の各問いに答えよ.

(1) $x = 0.01,\ y = 0.02$ のとき, $f(x,y)$ の値を小数点以下 4 桁まで正確に求めよ.

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ における接平面を H とする.

3 つの座標平面 $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ と H とで囲まれた立体の体積を求めよ.

(3) 二重積分

$$\iint_D x^n y^n f(x,y)\,dxdy$$

の値を, $n = 1,\ 2$ についてそれぞれ求めよ.

(茨城大 2010)　　(m20101705)

0.222 空でない集合 X について考える. X の部分集合全体からなる集合を P とし, X から $\{0,1\}$ への写像全体の集合を F とする. ここで, $\{0,1\}$ は整数 0 と 1 からなる集合を表す. F の要素 f,g に対し, X の上で定義された関数 $f*g$, $f\Box g$ を

$$(f*g)(x) = f(x)g(x)\ ,\quad (f\Box g)(x) = f(x)+g(x)-f(x)g(x)\ ,\quad x \in X$$

で定める. また, $A \in P$ に対して, $I_A \in F$ を

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \text{ のとき,} \\ 0 & x \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

で定め, 写像 $\Phi : P \to F$ を $\Phi(A) = I_A$ と定義する. 以下の各問に答えよ.

(1) $f,g,h \in F$ に対し, 次の等式を示せ.

$$f*(g\Box h) = (f*g)\Box(f*h)\ ,\quad (f\Box g)\Box h = f\Box(g\Box h)$$

(2) $A,\ B \in P$ に対し、次の等式を示せ.

$$\Phi(A\cap B) = \Phi(A)*\Phi(B)\ ,\quad \Phi(A\cup B) = \Phi(A)\Box\Phi(B)$$

(3) Φ は全単射であることを示せ.

(茨城大 2010)　　(m20101707)

0.223　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ を計算せよ．ただし，関数 $y=\tan^{-1}x$ は，$y=\tan x$ の定義域を $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ に制限するときに定義される $y=\tan x$ の逆関数を表す．

(茨城大 2013)　　(m20131702)

0.224　$y=y(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{y}+\frac{y}{x}\ \cdots\cdots\ (*)$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) 新しい未知関数 $u=u(x)$ を $u=\dfrac{y}{x}$ によって定義する．このとき，微分方程式 $(*)$ を $u=u(x)$ に関する微分方程式に書き換えよ．

(2) 初期条件 $x=2,\ y=4$ のもとで，微分方程式 $(*)$ の解を求めよ．

(茨城大 2014)　　(m20141703)

0.225　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ を

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\text{ が偶数}\\[2mm] -\dfrac{n-1}{2}, & n\text{ が奇数}\end{cases}$$

と定義する．f による，偶数全体の集合の像と，奇数全体の集合の像を求めて，f が全単射であることを示し，f の逆写像 $f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ を求めよ．

(茨城大 2015)　　(m20151706)

0.226　$\boldsymbol{R}^2$ 上に定義域 D をもつ実数値関数 $f(x,y)$ を考える．

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{y^2-1}}$$

このとき，次の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の定義域 D を調べ，xy 平面上に図示せよ．

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となる点 (x,y) が，(1) で求めた定義域 D 上に何個存在するか調べよ．

(茨城大 2018)　　(m20181702)

0.227　$G(x,y)=x^2+y^2-xy-1=0$ で定義される陰関数 $y=g(x)$ の極値を調べよ．

(茨城大 2020)　　(m20201702)

0.228　ベクトル空間 V,W とその間の線形写像を $f:V\to W$ として, 次の問に答えなさい.

(1) V のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, スカラーを k,ℓ とするとき, f が線形写像である定義式を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ および k,ℓ を用いて表しなさい.

(2) V を基底 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ を持つ 2 次元実ベクトル空間, W を基底 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ を持つ 3 次元実ベクトル空間とする.

$f(\boldsymbol{a}_1)=2\boldsymbol{b}_1-4\boldsymbol{b}_2-2\boldsymbol{b}_3$,　$f(\boldsymbol{a}_2)=3\boldsymbol{b}_1-6\boldsymbol{b}_2-3\boldsymbol{b}_3$ とすると,

f の像と核は原点を通る直線（1 次元実ベクトル空間）であることを示し, この直線を求めなさい.

(山梨大 2010)　　(m20101802)

0.229 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

で定義される. この定義を用いて, $f(x) = x^3$ の導関数は $f'(x) = 3x^2$ となることを示しなさい.

(山梨大 2010) (m20101803)

0.230 N 行 N 列の単位行列を E と表し, N 行 N 列の行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

と定義する. N は 1 以外の自然数であるとして, 次の設問に答えよ.

(1) 行列 A^2 および $AA^\dagger$ の成分を, $(*)$ にならって示せ. ここで, $\dagger$ は転置行列を表す.

(2) $A^n = A$ を満たす 1 以外の最小の自然数 n を求めよ.

(3) e_n をその第 n 成分が 1, それ以外の成分は 0 である N 次元空間の基本ベクトルとする $(n = 1, 2, \cdots, N)$. このとき, Ae_n および $A^\dagger e_n$ を基本ベクトルを用いて表せ.

(4) 行列 A の固有値と固有ベクトルを全て求めよ.

(山梨大 2016) (m20161806)

0.231 $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3)$ を考える. $f_i(x)$ と $f_j(x)$ との内積 $(f_i,\ f_j)$ を $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) f_j(x) dx$ と定義するとき, $i,\ j$ をそれぞれ $1, 2, 3$ のいずれかとして, 次の設問に答えよ.

(1) $f_1(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} x + 1 \right)$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} x - 1 \right)$ とすると, $(f_1,\ f_1) = (f_2,\ f_2) = 1$, $(f_1,\ f_2) = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $f_3(x) = ax^2 + b$ $(a,\ b$ は定数$)$ とするとき, $(f_1,\ f_3) = (f_2,\ f_3) = 0$, $(f_3,\ f_3) = 1$ となるような $a,\ b$ を求めよ.

(3) $f_i(-x) = Mf_i(x)$ のように, x を $-x$ と変換する操作を M と書く. M によってベクトル $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ はどのように変換されるか, その行列表現を求めよ.

(4) 直交行列 A によってベクトル $\boldsymbol{f}$ が, ベクトル $\boldsymbol{g} = A\boldsymbol{f}$ に移るとする. 操作 M によって $\boldsymbol{g}$ がその定数倍になるような A と $\boldsymbol{g}$ を求めよ.

(山梨大 2017) (m20171802)

0.232 開区間 $(-\pi,\ \pi)$ において, 実関数 $f(x)$ が微分可能であり, その導関数 $f'(x)$ が連続であるとする. このような $f(x)$ を用いて, a_n (但し, n は自然数) が次式で定義されているとき, 以下の小問に答えよ.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(1) $f(x) = \sin x$ のとき, 微分の定義に従って, 導関数 $f'(x)$ を導け.

(2) $f(x) = \sin 3x$ のとき, a_n を求めよ.

(3) $f(x)=x$ のとき，a_n を求めよ．

(山梨大 2018)　　(m20181801)

0.233 a,b,c,d を互いに異なる実数として，次の小問に答えよ．

(1) 次に示す行列式の値を求めよ．

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

(2) 4 つのベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ を

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_4=\begin{bmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{bmatrix}$$

と定義する．また，x_1，x_2，x_3，x_4 を方程式

$$x_1\boldsymbol{u}_1+x_2\boldsymbol{u}_2+x_3\boldsymbol{u}_3+x_4\boldsymbol{u}_4=\boldsymbol{0}$$

を満たす未知数とする．　このとき，自明でない未知数 x_1，x_2，x_3，x_4 を求めよ．　また，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$，$\boldsymbol{u}_4$ の中で 1 次独立なベクトルの組をひとつ示せ．　ただし，$\boldsymbol{0}$ は 3 次元のゼロベクトルである．

(山梨大 2019)　　(m20191802)

0.234 10 進表記の $m(m\geq 1)$ 桁の自然数 n の各位の数字を $d_i(1\leq i\leq m,\ 0\leq d_i\leq 9)$ と表すものとし，$r(n)$ を以下と定義する．

$$r(n)=\sum_{i=1}^{m} d_i$$

このとき，$r(n+3)$ と $r(n)$ の差は 3 の倍数であることを証明せよ．

(山梨大 2021)　　(m20211801)

0.235 実数上の n 次元数ベクトル空間 V に自然な内積 $(\bigcirc,\bigcirc)$ が定義されているとする．V の n 個の数ベクトル $v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n$ が

$$(v_i,v_j)=\begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$$

を満たすならば $\{v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n\}$ は V の基底となることを証明せよ．

(信州大 1999)　　(m19991906)

0.236 次の問に答えよ．

(1) $[a,b]$ を含む開区間上で定義された 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で $f''(x)>0$ となるとする．$0<h<b-a$ となる h をとるとき $[a,b-h]$ で定義される関数 $g(x)=f(x+h)-f(x)$ は増加関数となることを平均値の定理を用いて示せ．

(2) 曲面 $z=y^2-x^2$ 上の点 $(1,2,3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(信州大 2004)　　(m20041902)

0.237 (1) 単位円周 $x^2+y^2=1$ 上で定義された関数 $f(x,y)=x^3+y^2$ の値域を求めよ．

(2) 2 変数関数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ のマクローリン展開を 2 次項まで求めよ．

(信州大 2005)　　(m20051904)

0.238 平面上の動点 P の時刻 t での位置ベクトルが $\boldsymbol{x}(t)=(f(t),g(t))$ で与えられている．但し，$f(t)$, $g(t)$ は閉区間 $[\,0,1\,]$ を含む開区間で定義された微分可能な関数であり，それらの導関数 $f'(t)$, $g'(t)$ は同じ開区間で連続である．

さて，動点 P が時刻 $t=0$ に原点 $O(0,0)$ を出発して時刻 $t=1$ に点 $A(1,1)$ に到着するとせよ．このとき，途中のある時刻で速度ベクトル $\dfrac{dx}{dt}(t)=(f'(t),\ g'(t))$ がベクトル $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になることを証明せよ．

(信州大 2007)　　(m20071904)

0.239 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を示せ．

(2) $f(x)$ を区間 $[-1,1]$ 上で定義された連続関数とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{-1/n}^{1/n}|f(x)|^n dx\right)^{1/n}=|f(0)|$$ となることを示せ．

(信州大 2008)　　(m20081904)

0.240 領域 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x<\dfrac{5}{6}\pi\ ,\ 0<y<\dfrac{5}{6}\pi\right\}$ で定義された
2 変数関数 $f(x,y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$ ，$f_{xy}(x,y)$ および $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)=0$ かつ $f_y(x,y)=0$ を満たす領域 D 内の点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の領域 D における極値を求めよ．

(信州大 2013)　　(m20131901)

0.241 xy 平面上で定義された関数 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．また，第 2 次偏導関数 $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(信州大 2014)　　(m20141901)

0.242 平面内の領域 $D=\{(x,y)\,|\,(x,y)\neq(0,0)\}$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，
$\triangle f(x,y)=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ と定める．また，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とし，$z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，領域 D で $f(x,y)$ の 2 階までのすべての偏導関数が存在して，それらはすべて連続である．

(1) z_r, z_θ を r, θ, f_x, f_y を用いて表せ．

(2) $z_{rr}+\dfrac{1}{r}z_r+\dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=\triangle f$ を示せ．

(3) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\log(x^2+y^2)$ のとき，$\triangle f(x,y)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする;

(信州大 2016)　　(m20161901)

0.243 $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し或る $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta$ なる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである．いま ε, a が与えられたとして，関数 $f(x) = \sin x$ について δ の 1 つを求めよ．

(信州大 2018)　　(m20181905)

0.244 閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(0, 1)$ で 2 回微分可能で，次の 2 つの条件

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) すべての $0 < x < 1$ に対して

$$(1-x)f'(x) = 1 - x - 2x\int_1^x \frac{f(t)}{t^3}dt - \frac{f(x)}{x}$$

を満たしているとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f''(x)$ を x の有理式で表せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(信州大 2019)　　(m20191901)

0.245 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは，次の主張が成り立つ事として定義される．

P :　任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ となる任意の x に対して $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である．

以下の問いに答えよ．

(1) 命題 P の否定を書け．

(2) $f(x)$ を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

(1) の答えにもとづいて，$f(x)$ は $x = 0$ で連続ではないことを証明せよ．

(信州大 2019)　　(m20191906)

0.246 $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ をベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．つまり，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

である．また，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ はそれぞれ長さが 1 で，かつ内積 $\langle\ \cdot, \cdot\ \rangle$ に関して互いに直交しているとする（k は 1 以上 n 以下の整数）．写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_1 \rangle \boldsymbol{v}_1 - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{v}_2 - \cdots - \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_k \rangle \boldsymbol{v}_k \\ &= \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

(1) F は線形写像であることを示せ．

(2) $F(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k$ のそれぞれと直交していることを示せ．

(3) $\{\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_k\}$ によって生成される $\mathbb{R}^n$ の部分空間を V とする．$\boldsymbol{v} \in V$ ならば，$F(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となることを示せ（ただし，ここで $\boldsymbol{0}$ は零ベクトルである）．

(4) $F^2 = F$ を満たすことを示せ.

(5) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle F(\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{w}\rangle = \langle \boldsymbol{v},\ F(\boldsymbol{w})\rangle$ が成り立つことを示せ.

(信州大 2021)　　(m20211905)

0.247 関数 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

で定義されているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ.

(2) $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で全微分可能であることを示せ.

(3) $f_x(x,y)$ を求めよ．また，$f_x(x,y)$ は点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ.

(信州大 2022)　　(m20221901)

0.248 関数 $f(x)$ は開区間 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，

$$f(x) = \log\cos x$$

で定義されているとする．このとき，次に問いに答えよ．ただし，対数は自然対数である.

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の 2 次までのマクローリン展開を求めよ．また，剰余項 $R_3(x)$ を求めよ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ を求めよ.

(信州大 2023)　　(m20231901)

0.249 $f(x)$ はすべての実数で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0) = 1, f'(0) = -1, f''(0) = 1$ かつ相異なる実数 u, v に対して等式

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(\frac{u+v}{2})$$

を満たしているものとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して，

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f'(x)y$$

が成り立つことを示せ．

(2) 任意の実数 x, y $(y \neq 0)$ に対して，

$$f''(x+y) = f''(x-y)$$

が成り立つことを示せ．さらに $f''(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)$ を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982002)

0.250 閉区間 $[a,b]$ を含むある開区間上で定義された実数値関数 $f(x)$ が 2 回連続微分可能で，任意の点 $x \in [a,b]$ において，$f''(x) \geq 0$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 任意の $c \in [a,b]$ に対して，次の不等式が成立することを証明せよ．

$$(b-c)f(a)+(c-a)f(b) \geq (b-a)f(c)$$

(2) (1) の不等式で，真に不等号 $>$ が成立するのはどんな場合か．

(3) 上の結果を用いて，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$ となることを示せ．

(新潟大 1999)　　(m19992001)

0.251 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数 f を

$$f(x,y)=\frac{(x+y)-|x-y|}{2}\ , \quad (0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1)$$

と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(\frac{1}{3},y)$ 及び $f(\frac{2}{3},y)$ の y に関するグラフを描け．

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dy\,dx$ を求めよ．

(新潟大 1999)　　(m19992003)

0.252 次の問いに答えよ．

(1) どんな無理数 p に対しても，有理数の列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = p$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(2) どんな有理数 q に対しても，無理数の列 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = q$ となるものが存在する．その理由を述べよ．

(3) 関数 f を次のように定義する．

$$f(x)=\begin{cases} x & (\ x \text{ が無理数のとき }) \\ 0 & (\ x \text{ が有理数のとき }) \end{cases}$$

このとき，f の連続性を述べよ．

(新潟大 2000)　　(m20002001)

0.253 実変数の実数値関数 $f(x)$ を　$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,\ x \neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & ,\ x=0 \text{ の場合} \end{cases}$

によって定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)=0$ となることを示せ．　　(2) $x \neq 0$ に対して，$f'(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ を求めよ．　　(4) $f'(x)$ は $x=0$ で連続でないことを示せ．

(3) $F(x,y)=f(xy)$ とおくとき，$xy \neq 0$ に対して，x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}$，および，$y$ に関する偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ を求めよ．

(新潟大 2001)　　(m20012004)

0.254 数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha\ \ (n \to \infty)$ の定義は，「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ である任意の n に対して $|a_n-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ」である．

$a_n \to \alpha\ \ (n\to\infty)$，$a_n \to \beta\ \ (n\to\infty)$ であるとき，$a_n+b_n \to \alpha+\beta\ \ (n\to\infty)$ が成り立つことを上の定義に従って証明せよ．ただし，α,β は実数とする．

(新潟大 2002)　　(m20022003)

0.255 $a > 0$ とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = a$ とし，$n \geqq 1$ に対して，　$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$
と定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $a_1 < a_3 < a_4 < a_2$ を示せ．

(2) 数列 $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$，$\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ はそれぞれ単調増加，単調減少であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ に対して，　$|a_{n+1} - a_n| < \dfrac{1}{1+a^2}|a_n - a_{n-1}|$　が成立することを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示し，その値を求めよ．

(新潟大 2003)　(m20032001)

0.256 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1) A の固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ．

(3) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を $x_0 = 1$，$y_0 = 0$ とし，$n \geqq 1$ に対して，

$$\begin{cases} x_n &= 5x_{n-1} - 2y_{n-1} \\ y_n &= -2x_{n-1} + 8y_{n-1} \end{cases}$$

と定義する．このとき，一般項 x_n と y_n を求めよ．

(新潟大 2003)　(m20032004)

0.257 n を 2 以上の自然数とする．閉区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を

$$f_n(x) = e^{-nx}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\ , \qquad g_n(x) = e^{-(n-1)x} - e^{-nx}$$

により定める．このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式　$f_n(x) \leqq g_n(x)$　が成立することを示せ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ なる任意の実数 x に対して，不等式　$g_n(x) \leqq \dfrac{1}{n}$　が成立することを示せ．

(3) 不等式　$\displaystyle\int_0^1 f_n(x^2)dx \leqq \frac{1}{n}$　が成立することを示せ．

(新潟大 2006)　(m20062005)

0.258 $\mathbb{R}^3 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ をユークリッド空間とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) A を 3 次の実正則行列とする．$\mathbb{R}^3$ の線型変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ を通り，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ に直交する平面を W とする．このとき，$T(W)$ は点 $A\boldsymbol{p}$ を通り，ベクトル ${}^t(A^{-1})\boldsymbol{v}$ に直交する平面であることを示せ．ここで，${}^t(A^{-1})$ は，A の逆行列 A^{-1} の転置行列である．

(2) a, b, c を正の実数とし，楕円面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ を C とする．C 上の点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ における C の接平面の方程式を求めよ．

(新潟大 2006)　(m20062006)

0.259 (1) 次の行列式の値を求めよ．　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2) 行列 A の行列式の定義は，例えば，

$$|A| = \sum_{\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{smallmatrix}\right] \in S_n} \mathrm{sgn} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

で与えられる．ここで，S_n は n 次の置換のすべての集合であり，sgn は置換の符号である．このとき次式を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & B \\ * & \end{vmatrix} = a|B|$$

ただし，B は $(n-1)$ 次の正方行列とする．

(新潟大 2006) (m20062011)

0.260 $0 < x$ において定義された関数 $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^n}$ が $x = p$ $(0 < p)$ において極値をとるとき，以下の問いに答えよ．ただし，C は正の実数，n は 2 以上の整数である．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(4) C の値を，p および n を用いて表せ．

(5) この関数の極値を，p および n を用いて表せ．

(6) この関数の概形をグラフで示せ．

(新潟大 2006) (m20062014)

0.261 実数を成分とする 3 × 3 行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 8 \\ 2 & 5 & b \\ c & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

に対して，M により与えられる連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & 8z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & bz & = & 0 \\ cx & + & 4y & + & 18z & = & 0 \end{array} \right.$$

がある．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 上の連立 1 次方程式の解の集合が

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2z = y + 3z = 0\right\}$$

であるとき，a, b, c の値を求めよ．

(2) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，M は正則でない．その理由を述べよ．

(3) (1) の解である a, b, c を成分にもつ M に対して，$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = M\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ によって定義する．このとき，$f(\mathbb{R}^3)$ を求めよ．

(新潟大 2012) (m20122017)

0.262 3 次元空間上のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ を x 軸のまわりで角度 θ だけ回転するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ へ変換される．この関係を 3 × 3 行列 $U(\theta)$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}' = U(\theta)\overrightarrow{\mathrm{V}}$$

と書く．ここで，$U(\theta)$ は

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $U(\theta)$ の行列式 $\det U(\theta)$ を求めよ．

(2) 行列 $U(\theta)$ の逆行列 $U(\theta)^{-1}$ を求めよ．

(3) 行列 K を

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，K^2, K^3, および K^4 を求めよ．さらに，正の整数 m に対して，K^{2m} と K^{2m-1} を求めよ．

(4) 一般に，正方行列 X の指数関数は無限級数

$$e^X = E + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}X^n$$

で定義される．ここで，E は単位行列を表し，$X^0 = E$ である．問 (3) の結果を利用して，

$$e^{\theta K} = U(\theta)$$

となることを示せ．

(新潟大 2014)　　(m20142017)

0.263 (1) $0 < a < 1$ とするとき，$x > 0$ で定義された関数 $f(x) = (1 + a^x)^{\frac{1}{x}}$ は単調（単調増加，または単調減少）であることを示せ．

(2) 前問 (1) の結果を利用して，2 つの数 $b = (2014^8 + 2015^8)^{\frac{1}{8}}$， $c = (2014^9 + 2015^9)^{\frac{1}{9}}$ の大小を判定せよ．

(新潟大 2015)　　(m20152001)

0.264 $a_1 = e$, $a_{n+1} = \dfrac{e}{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ によって定義される数列 a_n について，以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) a_n を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ．

(新潟大 2015)　　(m20152009)

0.265 以下のように行列 A, B, C を定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

また，I を 3×3 の単位行列とする．ここで，i は虚数単位で $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $A^2 + B^2 + C^2 = kI$ となることを示し，定数 k を求めよ．

(2) A の固有値を求めよ．

(3) 一般に，正方行列 M の指数関数 e^M は，無限級数 $e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$ で定義される．α を実定数としたとき，

$$e^{i\alpha C} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}$$

（問題ではこうなっていましたが，$(2,2)$ 成分は 1 になるものと思われます）

となることを示せ．

(4) ベクトル $\overrightarrow{v}(\phi)$ を $\overrightarrow{v}(\phi) = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{i\cos\phi}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定義する．

このとき，$e^{i\alpha C}\overrightarrow{v}(\phi) = \overrightarrow{v}(\phi')$ と書けることを示し，ϕ' を求めよ．ただし，ϕ と ϕ' は実定数である．

(新潟大 2017)　　(m20172017)

0.266 自然数 n に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$ を求めよ．

(2) $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ を示せ．

(3) $H_n(x)$ は n 次の多項式であることを示せ．

(4) $n \geqq 3$ のとき，任意の実数 $T > 0$ に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2}dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

なることを示せ．

(5) 広義積分 $\int_0^{\infty} xH_6(x)e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(新潟大 2018)　　(m20182011)

0.267 3 点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ を頂点とする三角形 ABC の内部を D とする．D 内の点 $P(x,y)$ と三角形 ABC の 3 つの辺 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1, d_2, d_3 とし，関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ として定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $f(x,y)$ を求めよ．

(2) 点 $P\left(x, \frac{1}{2}\right)$ が D 内を動くとき，関数 $f\left(x, \frac{1}{2}\right)$ の最小値を求めよ．

(3) 点 $p(x,y)$ が D 内を動くとき，関数 $f(x,y)$ の最小値を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222004)

0.268 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ．

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4)　(3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5)　変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6)　(5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$, $q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.269　自然数 n に対して，数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の式で表す公式を以下の手順で求める．下記の $\boxed{}$ にあてはまる数を記入せよ．

数列 a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を $a_k = k$, $b_k = k(k-1)$, $c_k = k(k-1)(k-2)$ と定義すると

$$b_{k+1} - b_k = \boxed{\text{ア}}\, a_k\,, \qquad c_{k+1} - c_k = \boxed{\text{イ}}\, b_k$$

である．これらの両辺を $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について和を取り整理すると

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{ウ}}\, b_{n+1}\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{\text{エ}}\, c_{n+1}$$

が得られる．一方，$k^2 = \boxed{\text{オ}}\, a_k + \boxed{\text{カ}}\, b_k$ と表せるので

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\text{キ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, c_{n+1} = \boxed{\text{ケ}}\, n^3 + \boxed{\text{コ}}\, n^2 + \boxed{\text{サ}}\, n$$

である．

(長岡技科大 2000)　　(m20002101)

0.270 (1) 1 周期が T である関数 $f(t)$ は, 以下のようにフーリエ級数展開される.

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ として C_n および θ_n を, a_n および b_n で表せ. 但し, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ とする.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t\Big) \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\big(n\omega_0 t - \theta_n\big) \end{aligned}$$

(2) 上式におけるフーリエ係数 a_n および b_n は, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ として,

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega_0 t\, dt \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

により計算できる. 1 周期において, 次式で定義される関数 $f(t)$ をフーリエ級数展開せよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\dfrac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t \leq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

(3) $\sin^2 t$ および $\sin^3 t$ を, それぞれフーリエ級数展開せよ.

(4) $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ となることを証明せよ.

(長岡技科大 2005) (m20052106)

0.271 x, y を実数とし, 2 変数関数 $f(x, y)$ を累次積分

$$f(x, y) = \int_y^{y+1}\int_x^{x+1}(3u^2 + 3v^2)\, dudv$$

で定義する. 下に問いに答えなさい.

(1) $f(x, y)$ を求め, x, y で表しなさい.

(2) $f(x, y)$ の x, y についての偏導関数 f_x, f_y および第 2 次偏導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を求めなさい.

(3) $f(x, y)$ の極値を求めなさい.

(長岡技科大 2019) (m20192103)

0.272 xy 平面において, 領域 S, T を

$$S \ : \ x^2 + y^2 \leqq 1$$

$$T \ : \ 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, \ 0 \leqq y \leqq x$$

と定義する. 下の問いに答えなさい.

(1) 重積分 $\displaystyle\iint_S (x^2 + y^2)dxdy$ を求めなさい.

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_T \tan^{-1}\frac{y}{x}dxdy$ を求めなさい.

(長岡技科大 2020) (m20202103)

0.273 V を実ベクトル空間とする.

(1) $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ が V の 1 つの基底であることの定義を述べよ.

(2) V を 3 次元列ベクトル空間とし,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. (1) の定義に基づき, $\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の 1 つの基底であることを示せ.

(金沢大 1999） (m19992209)

0.274 行列 L を

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義します. 行列 L の固有値と固有ベクトルを求めなさい.

(金沢大 2005) (m20052209)

0.275 4次元ユークリット空間 $\boldsymbol{R}^4$ の部分ベクトル空間 $\boldsymbol{V}$ を

$$\boldsymbol{V} = \{(x, y, z, w) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\,,\ x + 2y + 2z + 3w = 0\}$$

で定義する.

(1) $\boldsymbol{V}$ の基底を一つ求めよ. (2) $\boldsymbol{V}$ の正規直交基底を一つ求めよ.

(金沢大 2007) (m20072205)

0.276 実数を成分とする2次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F\ :\ M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\mathrm{Ker}F = \{X \in M \mid F(X) = O\}\,, \quad \mathrm{Im}F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ．ただし，O は零行列を表す.

(金沢大 2007) (m20072216)

0.277 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき，$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し，微分係数 $f'(0)$ を求めよ.

(金沢大 2011) (m20112207)

0.278 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}$ について，次の問いに答えよ.

(1) $f'(x) < 0$ となる x の範囲を求めよ.

(2) $N \geqq 3$ に対して，

$$\sum_{n=3}^{N} f(n) < \int_2^N f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．ただし必要ならば，$e < 3$ であることは証明なしで用いてよい.

(3) $f(x)$ の不定積分を求めよ.

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することを示せ.

(金沢大 2012) (m20122206)

0.279 $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が

$$0 \leqq f(x) \leqq \int_0^x f(t)dt$$

を満たすとする．次の (1)～(3) を示せ,

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{d}{dx}\log\left(\varepsilon + \displaystyle\int_0^x f(t)dt\right) < 1$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(x) < \varepsilon e^x$.

(3) 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) = 0$.

(金沢大 2013) (m20132203)

0.280 関数 $\varphi(x) = x\log x\ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ を求めよ．

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ．

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) 閉関数 $[0, 1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(金沢大 2014) (m20142202)

0.281 R^3 の部分集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 3x + 4y - z = 0 \right\}$ と線形変換

$$f : R^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) W が R^3 の部分空間であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $\boldsymbol{x} \in W$ のとき $f(\boldsymbol{x}) \in W$ となることを示せ．

(3) (2) により，f の定義域を W に制限することにより，線形変換

$$g : W \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in W$$

ができる．この変換 g の (1) で選んだ W の基底に関する表現行列を求めよ．

(金沢大 2015) (m20152204)

0.282 行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めなさい．

(2) ある行列 P を用いて，行列 $A' = P^{-1}AP$ を対角行列にすることができる．P と A' を求めなさい．

(金沢大 2015)　　(m20152211)

0.283 a, b, c は正の定数とし，x, y は次で定義される R^2 の領域 D の点とする．

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2 \right\}$$

(1) 変数 r, θ を用いて $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換を行う．この時，関数行列式（ヤコビアン）$\left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|$ を求めよ．

(2) (1) の変数変換を用いて重積分　$\displaystyle\iint_D \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$　を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162223)

0.284 実数を成分とする 2 次正方行列全体がつくるベクトル空間を M とする．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M$ に対し，線形写像 $F : M \to M$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M)$$

によって定義するとき，M の部分空間

$$\operatorname{Ker} F = \{X \in M \mid F(X) = O\}. \qquad \operatorname{Im} F = \{F(X) \mid X \in M\}$$

の次元を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162228)

0.285 (1) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を R^3 の標準的な基底とし，R^3 の線形写像 f を次で定義する．

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2,$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$$

このとき，標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に関する f の表現行列を求めよ．

(2) R^3 の部分空間 V を $V = \{\boldsymbol{v} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ で定義する．V の基底を求めよ．

(金沢大 2016)　　(m20162236)

0.286 関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を次式で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x^2}{4}\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ．

(3) $f(x)$ は $x = 0$ のとき最小値をとり，かつ $f(x)$ が最小値をとるのは $x = 0$ のときに限ることを示せ．

(金沢大 2019)　　(m20192206)

0.287 (1) $A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を座標平面上の 3 点とする．線分 AB, BC, CA 上にそれぞれ点 P, Q, R を，三角形 PQR における $\angle Q$ が直角になるようにとる．ただし，P, Q, R は A, B, C のいずれとも異なるとする．$Q(t, 0)$, $\angle CQR = \theta$ とおくとき，直角三角形 PQR の面積 S を t と θ を用いて表せ.

(2) (1) で求めた S を，集合

$$D = \left\{ (t,\ \theta) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ -1 < t < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

を定義域とする関数と考える．このとき，$\dfrac{\partial S}{\partial t} = \dfrac{\partial S}{\partial \theta} = 0$ を満たす $(t,\ \theta)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $(t,\ \theta)$ において，関数 S が極値をとるかどうか調べよ.

(金沢大 2019)　　(m20192207)

0.288 (1) 集合 $D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ |x| + |y| \leq 1 \right\}$ の概形を描け.

(2) (1) で定義した D に対して積分 $\displaystyle\iint_D (x - y + 1)\, e^{x+y}\, dx\, dy$ を求めよ.

(3) $\max\{u, v\} = \begin{cases} u & (u \geq v) \\ v & (u < v) \end{cases}$ とする．積分 $\displaystyle\int_0^3 \left(\int_0^1 e^{\max\{x^2, 9y^2\}} dy \right) dx$ を求めよ.

(金沢大 2020)　　(m20202206)

0.289 $\boldsymbol{R}^2$ の領域を次で定義する.

$$D = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \ \middle|\ |x| < \frac{\pi}{2},\ |y| < \cos^2 x \right\}$$

以下の問いに答えよ.

(1) D の概形を図示せよ.

(2) 関数 $g(x, y) = \dfrac{1}{(y-2)\cos x}$ は，D 上の連続関数であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{x^2 y^2}{\cos^6 x} dx dy$ の値を求めよ.

(金沢大 2022)　　(m20222202)

0.290 写像 $f\ :\ R^3 \longrightarrow R^3$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $V = \{\boldsymbol{x} \in R^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0\}$ とおくとき, V は R^3 の部分空間になることを示せ.

(3) V の次元と 1 つの基底を求めよ.

(富山大 2004)　　(m20042314)

0.291 $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 V を $V = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$ で定義するとき，V の次元を求めよ.

(富山大 2008)　　(m20082307)

0.292 開区間 $(-1,1)$ の上で定義された写像 $f(x)=\begin{cases} x & (-1<x\leqq 0) \\ 1-x & (0<x<1) \end{cases}$
は $(-1,1)$ から $(-1,1)$ への全単射であることを示せ.

(富山大 2008)　(m20082308)

0.293 n 次実正方行列全体の集合 $M(n,\boldsymbol{R})$ は, 行列の通常の和とスカラー倍のもとで実ベクトル空間になる. $T_r : M(n,\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ を $A=(a_{ij}) \in M(n,\boldsymbol{R})$ に対して, $T_r(A)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ と定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) T_r は線形写像であることを示せ.

(2) T_r の核 $\mathrm{Ker}(T_r)=\{A \in M(n,\boldsymbol{R}) \,|\, T_r(A)=0\}$ は $M(n,\boldsymbol{R})$ の部分空間になることを示せ.

(3) $\mathrm{Ker}(T_r)$ の次元を求めよ.

(富山大 2010)　(m20102309)

0.294 x が t の関数 $x(t)$ であり, v と a をそれぞれ $v=\dfrac{dx}{dt}$, $a=\dfrac{dv}{dt}$ と定義する. 以下の問いに答えよ. ただし, x の一般解や特殊解を表現するのに v や a を用いてはならない.

(1) $a=-9x$ のとき, x の一般解を求めよ. また, $x(0)=v(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ.

(2) $a=-4(v+x)$ のとき, x の一般解を求めよ.

(3) $a=-4(v+x)+e^{-t}$ のとき, $x(0)=0,\ v(0)=3$ を満たす特殊解を求めよ.

(4) $v=-2tx^2$ のとき, $x(0)=1$ を満たす特殊解を求めよ.

(富山大 2013)　(m20132306)

0.295 P を 2 以下の実係数多項式からなる実ベクトル空間とする. 写像 $G: P \to P$ を,
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ $(a_0,a_1,a_2 \in \mathbf{R})$ に対し $G\left(f(x)\right)=f(x+1)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2$ で定義する.

(1) G は線形写像であることを示せ.

(2) P の基底 $\{1,x,x^2\}$ に関する G の表現行列を求めよ.

(富山大 2014)　(m20142308)

0.296 $\mathbf{R}^2$ をユークリッド平面とする. すなわち, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2)\ \in \mathbf{R}^2$ に対し, その距離を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ で定義したときの距離空間とする. $f_1,\ f_2 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を連続関数とし, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を, $f(x_1,\ x_2)=(f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2))$ $\left((x_1,\ x_2) \in \mathbf{R}^2\right)$ で定義する. このとき, f が連続写像であることを示せ.

(富山大 2014)　(m20142309)

0.297 空間座標の原点 O からの距離 r で定義される関数 $\varphi(r)=\log_e r$ $(r>0)$ について次の各問いに答えよ. ただし, $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ を直交座標系 $O-xyz$ の単位ベクトルとし, $\overrightarrow{r}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}+z\overrightarrow{k}$, $r=|\overrightarrow{r}|$ であるとする.

(1) 点 $P(1,1,0)$ を含む等位面（関数の値が等しい点の集合）の点 P における単位法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の x,y,z 成分を求めよ.

(2) 点 $Q(0,0,1)$ における, ベクトル $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ の方向への $\varphi(r)$ の方向微分係数を求めよ.

(3) 勾配の発散 $\nabla^2\varphi(r)$ を r の関数として求めよ.

(4) 勾配の回転 $\nabla\times\ \nabla\varphi(r)$ が $\overrightarrow{0}$ であることを示せ.

(富山大 2015)　　(m20152307)

0.298　$\log_e y - a^x$　(a : 定数, $a > 0$) で定義される関数 y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

(富山大 2018)　　(m20182302)

0.299　2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され,

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また, $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ を, それぞれ, $f(x)$, $g(x)$ の n 次導関数とするとき, 次の各問いに答えよ.

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ.

(2)　$f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ.

(3)　$f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$, および, $f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ.

(4)　$n \geqq 2$ として, $f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ.

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.300　次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ.

$$f(x, y) = \log_y x \qquad (x > 0,\ y > 1)$$

(富山大 2020)　　(m20202302)

0.301　θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき, 次の式で定義される xy 平面上の曲線に囲まれる領域の面積を求めよ.

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta \\ y = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(富山大 2020)　　(m20202303)

0.302　次の式で定義される 2 変数関数の 2 階偏導関数を求めよ.

$$f(x, y) = e^{\frac{2}{x}+3y} \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

(富山大 2021)　　(m20212302)

0.303　次の式で定義される xy 平面上の曲線 y_1 と y_2 および $x = 0$ と $x = 2\pi$ で囲まれる面積を求めよ

$$\begin{cases} y_1 = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ y_2 = \sin(x) \end{cases}$$

(富山大 2021)　　(m20212304)

0.304　$y = (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 3$ において，x の定義域が $0.5 \leq x \leq 8$ とする．この時

(1)　$s = \log_2 x$ とするとき，s の範囲を示せ.

(2)　y を s の関数として表し，そのグラフの概形を示せ.

(3)　y の最小値と最大値と，その各々を与える x を求めよ.

(福井大 2006)　　(m20062414)

0.305 (1) 関数 $f(x) = \log(1+x)$（ただし $x > -1$）の 1〜4 階の導関数（つまり $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, および $f^{(4)}(x)$ ）をそれぞれ求めよ.

(2) (1) の結果にもとづき, 上で定義された関数 $f(x)$ の n 階の導関数を推測し，$f^{(n)}(x)$ が実際に推測された関数で表現されることを，数学的帰納法を用いて証明せよ.

(3) (2) の結果を使い，関数 $f(x)$ のマクローリン展開（$x=0$ でのテーラー展開）を，無限級数の和の形 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{の形}\right)$ で求めよ,

(4) (3) の結果を用いて，関数 $g(x) = \log\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$（ただし $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$）のマクローリン展開を，無限級数の和の形で求めよ（経過を書く必要はあるが，証明の必要はなし）.

(福井大 2008)　　(m20082401)

0.306 (1) 内径が a，外径が b である球殻の体積を，極座標系での 3 重積分を使って表し，その値を求めよ. ただし，極座標 (r, θ, ϕ) は，直角座標 (x, y, z) を使って,

$$x = r\sin\theta\cos\phi\,,\ y = r\sin\theta\sin\phi\,,\ z = r\cos\theta \quad (0 \leq r \leq \infty\,,\ 0 \leq \theta \leq \pi\,,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

で定義される.

(2) 楕円 $x^2 - xy + y^2 = 4$ の面積を求めよ.

(福井大 2009)　　(m20092402)

0.307 次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項とその極限値を求めよ.

$a_1 = 0$　　および　　$a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2}a_n$

(福井大 2014)　　(m20142422)

0.308 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を一次独立なベクトル，さらに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ とし，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ.

(福井大 2015)　　(m20152429)

0.309 (1) $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+c & a \\ a & a & a+d \end{pmatrix}$ に対して，　　$|A| = abcd\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right)$

となることを示せ．ただし，$abcd \neq 0$ とする.

(2) 行列 $A_n = \left(a_{ij}\right)$ $\left(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ n \text{ は 3 以上の整数}\right)$ を,

$$a_{ij} = a_0 + a_i\delta_{ij}\ , \qquad a_i : \text{実数}\ (1 \leq i \leq n)$$

で定義するとき,

$$|A_n| = a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n\left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right)$$

となることを示せ．ただし，$a_0a_1\cdots a_{n-1}a_n \neq 0$ である．また，δ_{ij} は，$i = j$ のときに 1，$i \neq j$ のときに 0 をとるものとする.

(福井大 2016)　　(m20162409)

0.310 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ について，以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 階の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=f_x(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f_y(x,y)$$

ならびに 2 階の偏導関数

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)=f_{xy}(x,y),\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)=f_{yy}(x,y)$$

を，すべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ について，$z=f(x,y)$ は，xyz 空間において曲面を表す．
この曲面上の点 $\big(x_0,\ y_0,\ f(x_0,y_0)\big)$ における接平面の方程式は

$$z-f(x_0,y_0)=\big(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0)\big)\bullet(x-x_0,\ y-y_0)$$

によって与えられる．ただし，上式の $\bullet$ は 2 次元ベクトルの内積を表している．このとき，点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ における接平面の方程式を $ax+by+cz=d$ の形式で求めよ．すなわち，上式が点 $\big(1,\ 2,\ f(1,2)\big)$ での曲面 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式となるような a,b,c,d を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ について，

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

を満たす (x,y) の組を，$f(x,y)$ の極値の候補と呼ぶ．関数 $f(x,y)$ の極値の候補をすべて求めよ．

(4) 2 次の偏導関数を用いて，関数 $\phi(x,y)$ を

$$\phi(x,y)=\big\{f_{xy}(x,y)\big\}^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$$

と定義すると，極値の候補である (x_1,y_1) に対して，

- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極小
- $\phi(x_1,y_1)<0$ かつ　$f_{xx}(x_1,y_1)<0$ ならば (x_1,y_1) は極大
- $\phi(x_1,y_1)>0$ ならば (x_1,y_1) は極値ではない

といえる．上の (3) で求めた極値の候補について，それぞれ極小であるか，極大であるか，あるいは極値ではないか，調べよ．

(福井大 2016)　　(m20162418)

0.311 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix}4&2\\2&4\end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1}=A\boldsymbol{q}_n\quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n=\dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\,A\,\boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\,\boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n=\dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.312　関数 $f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，$\theta(t-\alpha)$ は単位階段関数で

$$\theta(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & (t \geq \alpha) \\ 0 & (t < \alpha) \end{cases}$$

によって定義される．

(1) 単位階段関数 $\theta(t)$ および $\theta(t-1)$ のラプラス変換を求めなさい．

(2) $\mathcal{L}[e^{-(t-1)}\theta(t-1)]$ について，変数 s を用いて表しなさい．必要であれば以下の関係を用いてもよい．

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)\theta(t-\alpha)] = e^{-s\alpha}F(s)$$

(福井大 2018)　　(m20182410)

0.313　(1) 以下のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の一次独立，1 次従属を判定せよ．ただし，x は実数とする．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3+x \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 5+x \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) n を 2 以上の整数，α を 0 でない実数とする．次式で定義される n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i+j=n+1 \text{ のとき} \\ \alpha & i=j=n \quad \text{のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A の行列式を計算せよ．

(3) 次の行列の階数を求めよ．ただし，z は実数とする．

$$\begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$$

(福井大 2020)　　(m20202415)

0.314　非負の整数 n，および $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$T_n(x) = \cos nz, \quad \text{ただし，} \cos z = x \tag{1}$$

と定義する．式 (1) において，$n = 0$ とおくと

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2}$$

となり，$n = 1$ とおくと

$$T_1(x) = \cos z = x \tag{3}$$

となる．以下の問いに答えよ．

(a) 加法定理

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

を利用し，$T_2(x)$ を x の多項式として表せ.

(b) $T_n(x)$ は，$T_{n+1}(x)$ と $T_{n-1}(x)$ によって

$$T_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)}{2x} \tag{5}$$

と表される．これを次のようにして証明したい．以下の下線部 (A)〜(C) を適当に埋めよ.

【証明】式 (1) の定義と式 (4) の加法定理を用いると

$$T_{n+1}(x) = \cos(nz+z) = \cos nz\cos z - \underline{\qquad\qquad}(\mathrm{A}) \tag{6}$$

$$T_{n-1}(x) = \cos(nz-z) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}(\mathrm{B}) \tag{7}$$

と書ける．式 (6) と式 (7) の各辺を加えると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \underline{\qquad\qquad\quad}(\mathrm{C}) \tag{8}$$

が得られる．式 (8) の右辺を変形すると

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{9}$$

となり，これより式 (5) が導きられる.

(c) 式 (5) に基づいて，$T_3(x)$ を x の多項式として表せ.

(d) $T_3(x)$ を用いて，$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表せ.

(e) (d) の結果を利用して，次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \tag{10}$$

ちなみに，$T_n(x)$ は第一種チェビシェフ多項式と呼ばれ，cos の n 倍角の公式の導出やチェビシェフ展開に基づく関数の近似表現等に利用される有名な多項式である.

(福井大 2020)　　(m20202422)

0.315　3 次元ベクトル $\mathbf{x}_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に関する数列を以下のように定義する.

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n\ , \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ.

(2) $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0$ を用いて，$\mathbf{x}_n$ を求めよ.

(福井大 2022)　　(m20222417)

0.316　以下の行列 $\mathbf{S}$ に関する問いに答えよ．ただし，θ は実数である.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $\mathbf{S}$ を対角化せよ.

(2) n を自然数とし，$\mathbf{S}^n$ を求めよ.

(3) 行列 $\mathbf{S}$ 及び実数 x を用いた指数関数はそれぞれ以下の式で定義される.
exp($\mathbf{S}$) を計算せよ.

$$\exp(\mathbf{S}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^n}{n!} \qquad\qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(福井大 2022) (m20222418)

0.317 (1) ベクトルの組 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が 1 次独立であることの定義を述べよ.

(2) 次のベクトルの中から 1 次独立なベクトルの組を選び, 残りをそれらの 1 次結合で表せ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ.

(静岡大 2005) (m20052503)

0.318 写像 $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ について，次の問に答えよ．但し $\boldsymbol{R}^\ell$ は ℓ 次元実ベクトル空間を表す.

(1) f が線形写像であることの定義を述べよ.

(2) f が線形写像であるとき次を示せ.

(a) $f(0) = 0$（但し 0 はベクトル空間の原点を表す）

(b) r を任意の自然数とするとき，r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \cdots\ \boldsymbol{a}_r\ \in \boldsymbol{R}^n$ と
スカラー $k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_r\ \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$f(k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{a}_r) = k_1 f(\boldsymbol{a}_1) + k_2 f(\boldsymbol{a}_2) + \cdots + k_r f(\boldsymbol{a}_r)$$

(静岡大 2006) (m20062507)

0.319 変数 (r, θ) $(r \geq 0\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ から変数 (x, y) への変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

を考える．また領域 D を

$$D = \{(x, y) \quad ;\ -x \leq y \leq x\}$$

によって定義する.

(1) (x, y) が領域 D を動くとき (r, θ) が動く範囲を求めよ．また，その対応が 1 対 1 であることを示せ.

(2) 次の積分の値を上記の変数変換を用いて求めよ.

$$\iint_D \exp(-x^2 - y^2 - xy)dxdy$$

ここで積分の範囲は領域 D である.

(岐阜大 1997) (m19972601)

0.320 実関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの必要十分条件（定義としてもよい）を，“ 極限 ”という言葉を使わずに，$\varepsilon - \delta$ 論法を用いて書きなさい.

(岐阜大 2005) (m20052610)

0.321 実変数 x, y の関数 $f(x,y)$ が，その定義域 D において（連続な 2 階偏導関数をもち，）
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ 　を満たすとき，$f(x,y)$ を（D における）調和関数という．以下の問いに答えよ．ただし，以下では定義域 $D = R^2$ とする．

(1) $f(x,y) = x^3 - axy^2$ が調和関数であるように，定数 a を求めよ．

(2) ある関数 $f(x,y)$ が調和関数であるとき，　$g(x,y) = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 　で定義される $g(x,y)$ も調和関数であることを示せ．ただし，関数 $f(x,y)$ は何回でも微分可能であるとする．

(岐阜大 2006)　　(m20062614)

0.322 2 変数関数 $f(x,y)$ がラプラス方程式 $\Delta f = 0$ を満たすとき，$f(x,y)$ を調和関数という． 次の関数 $f(x,y)$ は調和関数か否か調べよ． ここで，2 変数 (x,y) の偏微分作用素（ラプラシアン）Δ は，$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で定義する．

(1) $f = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ 　　　　(2) $f = e^x \sin y$

(岐阜大 2008)　　(m20082602)

0.323 $X = \{x \,:\, |x| \leq \pi,\ x \in \boldsymbol{R}\}$, $Y = \{y \,:\, |y| \leq 1,\ y \in \boldsymbol{R}\}$ とする． 以下で定義する写像 f について (1),(2) に答えなさい． ただし，$\boldsymbol{R}$ は実数全体の集合を表すものとする．

$$f \,:\, X \to Y\,, \quad x \mapsto \sin x\,.$$

(1) f が単射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(2) f が全射であるか否かを理由と共に答えなさい．

(岐阜大 2008)　　(m20082609)

0.324 実平面上の x-y で表される直交座標系がある． その上で定義される関数 $f = 3x^2 + 3y$ があり，点 $OABC$ をそれぞれ，$O(0,0)$，$A(2,0)$，$B(2,2)$，$C(0,2)$ とする． $OABC$ の 4 点で囲まれた領域と，OAB の 3 点で囲まれた領域のそれぞれの領域での f の面積分の比

$$\frac{\displaystyle\int_{OAB} f\,dS}{\displaystyle\int_{OABC} f\,dS}$$

は，いくらになるか計算せよ． なお式中の dS は面要素である．

(岐阜大 2009)　　(m20092601)

0.325 以下の式でガンマ関数 $\Gamma(t)$ を定義する．

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx\,,\ t > 0.$$

次の問に答えよ． ただし， $t > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x} x^t = 0$ となることは証明しなくても使ってよい．

(1) $t > 0$ に対して $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ となることを示せ．

(2) 自然数 n に対して $\Gamma(n+1) = n!$ となることを示せ．

(3) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ，すなわち

$$\left(\int_o^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx\right)\left(\int_o^\infty e^{-y} y^{-\frac{1}{2}} dy\right)$$

を x, y の 2 変数関数の重積分で表せ．

(4) 変数 (x,y) から (r,θ) への変数変換

$$\begin{cases} \sqrt{x} = r\cos\theta, \\ \sqrt{y} = r\sin\theta \end{cases}$$

に対してヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求めよ.

(5) 前問 (4) の変数変換を用いて (3) の重積分を計算し $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142601)

0.326 (1) 次の行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 1$,

$$a_{n+3} = a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n \qquad (n \geq 1)$$

で定義する．このとき

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

を満たす 3 次正方行列 B を求めよ.

(4) 一般項 a_n を求めよ.

(岐阜大 2014)　　(m20142602)

0.327 $a = \log 2$ とし，関数 f と g を

$$f(x) = ax - a - \log x$$
$$g(x) = x^2 - ae^x$$

で定義する．ただし，log は e を底とする自然対数である．以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ の閉区間 [1, 2] における最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ.

(3) 次の累次積分 I の積分順序を変更せよ:

$$I = \int_1^2 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \sin(g(y))dy \right) dx\ ,$$

ただし,

$$\alpha(x) = ax$$
$$\beta(x) = a + \log x$$

とする.

(4) I の値を求めよ.

(岐阜大 2018)　　(m20182602)

0.328 以下の文章の空欄に適当な式を記入せよ.

(1) 連続関数 $f(x)$ の微分は次の公式で定義される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{1} - f(x)}{h}$$

この公式に基づき e^x の微分を求めよう．

$$(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{2}}{h}$$

ここで， $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ と展開できることを利用すると，

$$(e^x)' = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{\boxed{3}}{n!} + \cdots \right)$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots + \frac{\boxed{4}}{n!} + \cdots \right)$$

$$= \boxed{5}$$

と求まる．

(2) x^x の微分を次の手順で求めよう．ただし， $x > 0$ とし，また自然対数を log で表すものとする．

$y = x^x$ の両辺の対数をとると，

$$\log y = \boxed{6}$$

この式の両辺を x で微分すると，

$$\boxed{7} = \boxed{8} + x \cdot \frac{1}{x} = \boxed{9} + 1$$

この式から， y' を x で表すと，

$$y' = \boxed{10}$$

と求まる．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972703)

0.329 $0 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f(x)$ が以下のように与えられている．

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$f(x)$ を $g(x)$ で近似するとき，近似誤差 I は以下の積分と考えるものとする．

$$I = \int_0^{\pi} \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, dx$$

(1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx$ を計算せよ．

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x)^2 \, dx$ を計算せよ．

(3) 定数 a を用いて， $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を計算せよ．

(4) $g(x) = a \cdot \cos x$ で近似するとき，誤差 I を最小にする a を計算せよ．

公式 $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ を利用してもよい．

(豊橋技科大 1997)　　(m19972705)

0.330 (1) $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は次の式で計算される．

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

この関係を用いて，以下に示す関数のラプラス変換を求めよ．
ただし，以下の計算では，($\mathrm{Re}[s] > 0$) とする．

(a) $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$ 　　ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

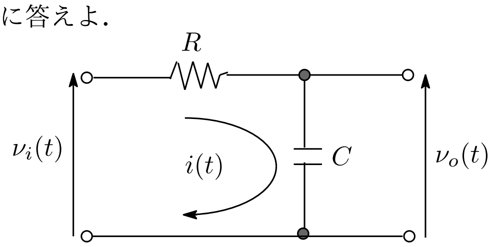
(b) $f(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(c) $f(t) = t\,u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(d) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

(2) 右図に示すように直列 RC 回路について以下の問いに答えよ．

(a) 図に示すように，入力電圧を $\nu_i(t)$，出力電圧を $\nu_o(t)$，ならびに，電流を $i(t)$ とするとき，これらの関係を示す回路方程式を記述せよ．
ただし，$t = 0$ のとき，$\nu_o(t) = 0$ である．



(b) $\nu_i(t)$, $\nu_o(t)$ ならびに $i(t)$ のラプラス変換を，それぞれ $V_i(s)$, $V_o(s)$ そして $I(s)$ と表すものとする．このとき，(a) で求めた回路方程式をラプラス変換して，次の伝達関数 $G(s)$ を求めよ．

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

(c) $\nu_i(t)$ が次のように与えられるとき

$$\nu_i(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

出力電圧 $\nu_o(t)$ のラプラス変換 $V_o(s)$ を求めよ．

(d) $V_o(s)$ をラプラス逆変換して出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(e) $G(s)$ をラプラス逆変換して，インパルス応答 $g(t)$ を求めよ．

(f) インパルス応答 $g(t)$ を用いて，(c) で定義した入力電圧があるときの出力電圧 $\nu_o(t)$ を求めよ．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062708)

0.331 xy 直交座標系の点列 (x_i, y_i) , $i = 1, \cdots, N$ に対し，各点からの垂直距離の 2 乗和が最小となるような直線を求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$ に適当な数式を入れよ．
各点に単位質量を置いたときの重心を G とすると，その座標は

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} \\ \boxed{\text{イ}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．xy 座標系に対し，この重心 G を原点として，角度 θ で回転させた uv 座標系を考える．このとき

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とおけば，(x_i, y_i) と (u_i, v_i) との関係は θ を用いて

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ -\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{ウ}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられる．もし求めたい直線を u 軸にとれば，問題は

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \tag{4}$$

で定義される $J(\theta)$ を最小にする角度 θ を求めることに等しい．

式 (3) の v_i を θ で微分し，u_i を用いて表すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial \theta} = \boxed{\text{オ}} \tag{5}$$

となるから，式 (4) を θ で微分して 0 とおけば

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = 0 \tag{6}$$

を得る．この式 (6) に，式 (3) を代入することにより，

$$\boxed{\text{カ}} \sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i = \boxed{\text{キ}} \sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2) \tag{7}$$

となり，次式を得る．

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{8}$$

式 (8) の左辺は，倍角の公式により

$$\frac{2\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{カ}}} = \boxed{\text{ク}} \tag{9}$$

と書けるから，式 (8) は

$$\boxed{\text{ク}} = \frac{2\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} ({x'_i}^2 - {y'_i}^2)} \tag{10}$$

となる．よって，式 (10) の右辺を計算して，式 (4) を最小化する θ を求めればよい．

式 (4) を最小化する θ を $\hat{\theta}$ とし，求めたい直線が重心 G を通ることを用いれば，直線の式は

$$y = \tan\hat{\theta}\left(x - \boxed{\text{ケ}}\right) + \boxed{\text{コ}} \tag{11}$$

として与えられる．

(2) 4 点 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$ があるとする．

(a) これらの 4 点に単位質量を置いたときの重心 G の座標を求めよ．

(b) これらの 4 点に関し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x'_i y'_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {x'_i}^2$および$\displaystyle\sum_{i=1}^{N} {y'_i}^2$ を求めよ．

(c) これらの 4 点からの垂直距離の 2 乗和が最小となる直線の傾き θ を求めよ．ただし，分数は既約分数とし，三角関数およびその逆関数はそのままでよい（例：$\cos\dfrac{7}{4}\pi$や　$\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ など）．

(豊橋技科大 2006)　　(m20062710)

0.332 行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -18 & -7 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ，ただし，$\lambda_1 > \lambda_2$ とせよ．

(2) 各固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ とするとき，a と b を求めよ．

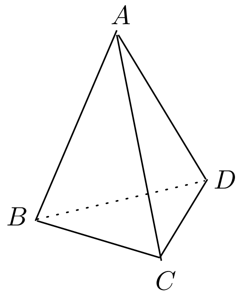
(3) (2) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を用いて，行列 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ を定義する． このとき，$\boldsymbol{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 $\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

(4) 行列 $\boldsymbol{QAP}$ を求めよ．

(5) 自然数 n に対して，$\boldsymbol{QA}^n\boldsymbol{P}$ を求めよ．

(豊橋技科大 2008) (m20082702)

0.333 右図のように，四面体 $ABCD$ には，三角形の面が 4 つあり，辺が 6 つある．ここで，各辺を独立に，赤か青の色に等確率で（つまり，確率 1/2 で）塗ることを考える．3 辺が同じ色で塗られた三角形を，単色三角形と定義して，以下の問いに答えよ．



(1) すべての辺が青色で塗られる確率を求めよ．

(2) 三角形 ABC が単色三角形となる確率を求めよ．

(3) 三角形 ABC と ACD のどちらか，あるいは両方が単色三角形となる確率を求めよ．

(4) 四面体 $ABCD$ の中に単色三角形が 2 個のみ現れる確率を求めよ．

(豊橋技科大 2014) (m20142702)

0.334 以下の条件※で定義される n 次正方行列 C_n について次の問いに答えよ． ただし，n は正の整数とし，C_n の i 行 j 列の成分を c_{ij} とする．

条件※ i と j の少なくとも一方が 1 ならば $c_{ij} = (-1)^{i+j+1}$

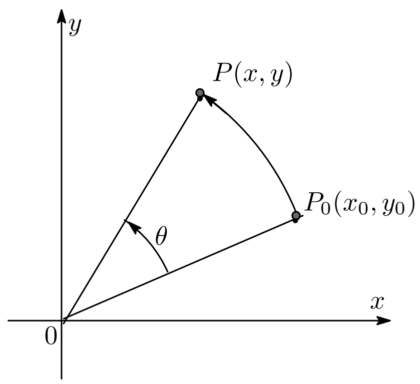
その他の場合には $c_{ij} = 0$

(1) C_1 および C_3 の行列式をそれぞれ求めよ．

(2) ${C_3}^2$ を求めよ．

(豊橋技科大 2017) (m20172703)

0.335 図のように，xy 平面上の点 $P_0(x_0, y_0)$ を原点 O のまわりに θ だけ回転した点 $P(x, y)$ に移す座標変換は次の線形変換により表される．また，このときの変換行列を $A(\theta)$ と定義する．以下の設問に答えよ．



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) xy 平面上の点を x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍する変換行列 B を a と b を用いて表せ．

(2) xy 平面上の点を原点 O のまわりに $(-\theta)$ 回転し，その後 x 軸方向に a 倍，y 軸方向に b 倍し，最後に原点 O のまわりに θ 回転する線形変換を考える．このときの変換行列 C を a, b, $\cos\theta$ および $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3) 次に示す変換行列 D の固有値を求め，それぞれの固有値に対応する長さ 1 の固有ベクトルをすべて求めよ．

$$D = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

(4) 変換行列 C が変換行列 D に等しいとき，a, b および θ の値を求めよ．ただし，θ は $0 \leq \theta \leq \pi/2$ の範囲にあるとする．

(豊橋技科大 2021)　　(m20212701)

0.336 次の漸化式で定義される数列を考える．

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である．

(名古屋大 2014)　　(m20142804)

0.337 原点と正規直交する基底ベクトル $\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ をもち，それぞれの基底ベクトルに対応する座標を x, y, z とするユークリット空間を考える．また，演算子 ∇ を $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e}_z$ と定義する．

(1) $V = xy(x^2 + y^2 + z^2)$ とする．∇V を基底ベクトルと x, y, z を用いて表せ．

(2) 以下に示す $\overrightarrow{f}$ に対して，$\nabla W = \overrightarrow{f}$ となるスカラー関数 $W(x,\ y,\ z)$ が存在するかを考える．ここで，W の 2 階偏導関数は連続であり，$W(0,0,0) = 0$ とする．W が存在するならばそれをひとつ示し，W が存在しないならばそれを証明せよ．

(i) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + zx)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(ii) $\overrightarrow{f} = (2x + yz)\overrightarrow{e}_x + (2y + z)\overrightarrow{e}_y + (xy + 1)\overrightarrow{e}_z$

(名古屋大 2018)　　(m20182801)

0.338 $\alpha > 1$ とする．a_1 を $\sqrt{\alpha}$ より大きい数とし，　$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\alpha}{a_n})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
によって，数列 $\{a_n\}$ を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geq \sqrt{\alpha}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ を示せ．

(2) この数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．

(名古屋工業大 2001)　　(m20012901)

0.339 N を正の数として, xyz 空間の部分集合

$$T_N = \{(x, y, z) \,|\, x + y + z = N\,,\ 0 < x, y, z < N\}$$

を考える. そして, 正の数 p, q, r を用いて関数

$$f_{p,q,r}(x,y,z) = \left(\frac{p}{x}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{y}\right)^y \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^z$$

を T_N 上で定義する.

(1) $f_{p,q,r}$ の自然対数として定義される関数

$$\log_e f_{p,q,r}(x,y,z)$$

の極値を, ラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ.

(2) T_N 上で定義された関数 $f_{p,q,r}$ は, T_N 上のある点 (x,y,z) において最大値をとる事が知られている. この事を用いて, $f_{p,q,r}$ の最大値を求めよ.

(名古屋工業大 2005)　　(m20052901)

0.340 (1) 次の 2 つの逆三角関数の導関数を求めよ.

(i) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　　(ii) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) (1) を参考にして，原点以外で定義される関数　$f(x) = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ を簡単な形にせよ.

(名古屋工業大 2006)　　(m20062903)

0.341 (1) $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の最大値を求めよ.

(2) (1) を利用して, π^e と e^π の大小関係を調べよ.

(名古屋工業大 2007)　　(m20072901)

0.342 行列 A, 変数ベクトル $\boldsymbol{x}$, 定数ベクトル $\boldsymbol{c}$ を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & a & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし, a は定数である. 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 方程式が解をもたないための a の値を求めよ.

(2) 方程式が無数の解をもつための a の値を求めよ.

(3) 方程式が唯一の解をもつための a の範囲を示せ. またこの範囲の a に対して解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(名古屋工業大 2009)　　(m20092906)

0.343 3 次正方行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を A とする. ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ に対して, 内積を使って関数を $Q(\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$ と定義する.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) 条件 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 1$ の下での関数 $Q(\boldsymbol{u})$ の最大値と最小値を求めよ.

(名古屋工業大 2011)　　(m20112902)

0.344 R^3 の 2 組の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ \text{と}\ \ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$$

によって定義されている．このとき，次の問に答えよ．

(1) 基底 $A\to B$ の基底変換の行列 P を求めよ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の基底 $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関する座標は $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ であるとき，

$\boldsymbol{\xi}$ の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ に関する座標を求めよ．

(3) 2 組の基底 $A:(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)$ と $B:(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3)$ に関して，
同じ座標をもつ非零ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ を求めよ．

(名古屋工業大 2012)　　(m20122907)

0.345 次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $F(x)$ が $F(x)=\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}}\left(2-\frac{1}{3t}\right)dt$， $x>0$ によって定義される．このとき，$F(x)$ の増減範囲を調べ，極値を求めよ．

(名古屋工業大 2013)　　(m20132907)

0.346 2 回偏微分可能な関数 $f(x,y)$ に対して，$g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ と定義する．

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ 及び $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ 及び $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ が成り立つことを示せ．

尚，導出の過程で次の公式を用いて良い．

【公式】$z=f(x,y)$ として，関数 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ がいずれも偏微分可能ならば，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\quad,\quad\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

が成り立つ．

（愛知県立大 2000）　　(m20003001)

0.347 関数の微分の定義は次式で与えられる．

$$h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

この極限値が存在するとき，関数 $h(x)$ は微分可能であるという．

上の定義を用いて，次の定理を証明しなさい．

【定理】
関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能であれば，$f(x)+g(x)$ は微分可能であり，
次の公式が成り立つ．

$$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$$

(三重大 2002)　　(m20023107)

0.348 区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された 2 つの関数 $s_1(x), s_2(x)$ が次の性質をもつとしょう.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{s_1(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{s_2(x)\}^2 dx = 1 \ , \quad \int_{-\pi}^{\pi} s_1(x)s_2(x)dx = 0$$

(1) 定積分 $f(a,b) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - as_1(x) - bs_2(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b を与える表式を求めなさい.(定積分の形になる.)

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{x - a\sin x - b\sin 2x\}^2 dx$ を最小にする a, b の値を求めなさい.

(三重大 2002) (m20023112)

0.349 xy 平面上の領域 $D = \{(x,y) \ : \ x + y < 1 \ , \ 0 < x \ , \ 0 < y\}$ で定義された関数 $f(x,y) = xy(1-x-y)$ について考える.

(1) D における $f(x,y)$ の最大値と最大値をとる点 (x_0, y_0) を求めよ.

(2) D での積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ の値を求めよ.

(三重大 2007) (m20073118)

0.350 位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ と定ベクトル $\boldsymbol{w} = (0,0,\omega)$ (ただし, ω は定数)を考える. 以下の問に答えよ.

(1) これらのベクトルの外積で定義されるベクトル $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{w} \times \ \boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) C を反時計回りの向きをもつ xy 平面上の原点を中心とする半径 R の円とする. C に沿っての周回積分 $\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{I}$ を計算せよ. ただし $d\boldsymbol{I}$ は C に沿った微小線素ベクトルである.

(3) $\boldsymbol{A}$ の回転 $\nabla \times \ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(4) $\boldsymbol{e}_z$ を z 軸向きの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_z = (0,0,1)$ とし, D を上述の C で囲まれた半径 R の円盤領域とする. 重積分 $\displaystyle\iint_D (\nabla \times \ \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{e}_z \, dxdy$ を計算せよ.

(三重大 2013) (m20133116)

0.351 以下の問に答えなさい.

(1) 以下に示す x, y, z に関する方程式を考える. これが $x = y = z = 0$ 以外の解を持つように, 定数 k の値を定め, 解を求めなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以下に示す行列 A により表される線形写像 $f : \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ を考える. 写像 f の核の次元および正規直交化された基底を求めなさい. なお, 写像 f の核は $\left\{\boldsymbol{x} \in R^4 \ \middle| \ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\right\}$ ($\boldsymbol{0}$ は R^4 の零ベクトルとする)として定義される.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(三重大 2014) (m20143102)

0.352 (1) $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれる面積は，次式の定積分の定義により求めることができる．

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\triangle x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続とし，$\triangle x=(b-a)/n$, $x_k=a+k\triangle x$ とする．上記の積分の定義を用いて，$\displaystyle\int_0^1 xdx$ を求めなさい．ただし，導出過程も示すこと．

(2) 問 (1) の定積分の定義を用いて，
極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)$ を求めなさい．

(三重大 2015)　　(m20153101)

0.353 (1) 関数 $f(x)=\log(1-x)$ を $x<1$ において定義する．任意の自然数 n に対して，下の式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ここで，$\log x$ は実数 x の自然対数を表すとする．

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

(2) 関数 $g(x,y)$ について，$m\geqq 0$, $n\geqq 0$, $m+n>0$ の条件を満たす任意の整数 m, n に対して式 ㋐ が成り立つとする．また，式 ㋑ が成り立つとする．

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}g(x,y)=g(x,y)\cdots\cdots\cdots ㋐$$

$$g(0,0)=e\cdots\cdots\cdots ㋑$$

なお，$m=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{0+n}}{\partial x^0\partial y^n}g(x,y)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}g(x,y)=g(x,y)$$

また，$n=0$ のとき式 ㋐ は以下の式を表すものとする．

$$\frac{\partial^{m+0}}{\partial x^m\partial y^0}g(x,y)=\frac{\partial^m}{\partial x^m}g(x,y)=g(x,y)$$

(a) $g(x,y)=u(x)w(y)$ とおく．任意の自然数 m に対して以下の式が成り立つことを示しなさい．ここで，$u(x)$ は変数 x に関する関数，$w(y)$ は変数 y に関する関数とする．

$$\frac{d^m}{dx^m}u(x)=u(x)$$

(b) 関数 $g(x,y)$ を求めなさい．

(三重大 2018)　　(m20183104)

0.354 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えなさい．

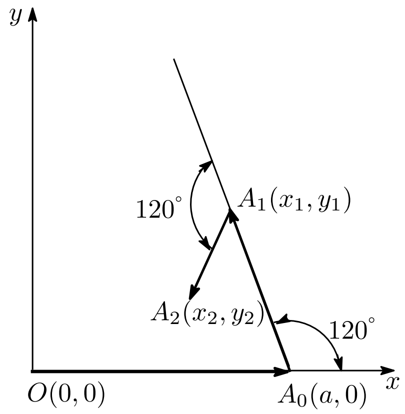
(1) A の逆行列を求めなさい．
また，それを利用して x, y に関する連立方程式 $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ を解きなさい．

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正方行列 P を求めなさい．
また，それを利用して $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ により定義される数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めなさい．ここで，n は自然数とする．

(三重大 2018)　　(m20183105)

0.355 図に示すように原点 $O(0,0)$ から x 軸上を点 $A_0(a,0)$ に向かうベクトル $\overrightarrow{OA_0}$ がある．次にベクトル $\overrightarrow{A_0A_1}$ を，点 A_0 を始点とし，長さが $\overrightarrow{OA_0}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{OA_0}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する．さらにベクトル $\overrightarrow{A_1A_2}$ を点 A_1 を始点とし，長さが $\overrightarrow{A_0A_1}$ の $1/2$，向きを $\overrightarrow{A_0A_1}$ から 120°(反時計回り）方向とするベクトルとして定義する ．以降同じ操作を行ってベクトルを定義していくものとして，以下の設問に答えよ．

(1) 点 A_1 の座標 (x_1, y_1) を求めよ．



(2) 点 A_n の座標 (x_n, y_n) を点 A_{n-1} の座標 (x_{n-1}, y_{n-1}) と a を使って表せ．

(3) この操作を繰り返したとき，点 A_n が漸近する座標 (x, y) を求めよ．

(三重大 2020)　　(m20203105)

0.356 $x>0$ において，$h(x)=\log\alpha^x-\log x^\alpha$ と定義する．ここで，α は正の実数とする．任意の正の実数 x に対して，$x^\alpha \leqq \alpha^x$ となる正の実数 α を求めなさい．

(三重大 2020)　　(m20203112)

0.357 p の関数

$$f(p)=p\log\frac{p}{q}+(1-p)\log\frac{1-p}{1-q}$$

について，以下の問に答えなさい．ただし，定義域は $0<p<1$ とし，q は $0<q<1$ を満たす定数とする．また，$\log$ は自然対数を表す．

① p の関数 $f(p)$ の最小値を求めなさい．

② 右側極限値 $\displaystyle\lim_{p\to+0} f(p)$，および，左側極限値 $\displaystyle\lim_{p\to1-0} f(p)$ を求めなさい．

③ p の関数 $f(p)$ の変曲点の有無を，理由を説明して答えなさい．

④ 問 ①, ②, ③ の結果を用いて，$q=1/2$ に固定したとき，$f(p)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，必要であれば $\log 2$ の近似値として 0.7 を使ってもよい．

(三重大 2022)　　(m20223101)

0.358 m と n が整数のとき，次の式を証明せよ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m-n)}d\theta=\delta_{m,n}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．また，$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1 & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$ と定義されている．

また，必要なら公式　$e^{ix}=\cos x+i\sin x$　を用いよ．

(奈良女子大 2003)　　(m20033210)

0.359 F_n が次のように定義されているとする.

$$F_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$$

このとき, 以下の問いに答えよ. ただし, n は正の整数である.

(1) F_1 を求めよ.

(2) n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ.

$$F_n = \frac{n-1}{2} F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009) (m20093206)

0.360 次のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について以下の問いに答えよ.

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, , \; \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, , \; 0 \right)$$

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \ \boldsymbol{A}$ を求めよ.

(3) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の概形を $x-y$ 平面上に図示せよ.

ここで, ∇ は次のように定義された演算子である.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \, , \; \frac{\partial}{\partial y} \, , \; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2012) (m20123204)

0.361 次のスカラー関数 $U(x,y,z)$ について以下の問いに答えよ. ただし, a は正の実定数とする.

$$U(x,y,z) = \exp\left[-a(x^2+y^2+z^2)\right]$$

(1) ベクトル $F = \nabla U$ を求めよ.

(2) $\nabla \cdot F = 0$ となるとき, x, y, z が満たす条件をすべて求めよ.

(3) $\nabla \times \ F$ を求めよ.

ここで, 演算子 ∇ は次のように定義する.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2014) (m20143204)

0.362 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ の時, 以下の量を計算せよ. ただし, $r \neq 0$ とする.

(1) ∇r^n (2) $\nabla \times \ r^n \boldsymbol{r}$ (3) $\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right)$ (4) $\nabla \left(\frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} \right)$ (5) $\nabla f(\boldsymbol{r})$

ここで, ∇ は以下で定義する微分演算子であり,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$f(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の任意の関数, $\boldsymbol{p}$ は定ベクトル, n は定数である.

(奈良女子大 2015) (m20153204)

0.363 xy 座標で多項式 $5x^2-6xy+5y^2=8$ で表される曲線を考える.

(1) この式は実数の定数 a,b,c を成分に持つ $2\times\ 2$ 対称行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

を使って,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$$

と書き換えることができる. 行列 A を求めよ.

(2) 行列 A は異なる 2 つの実数の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ をもつ ($\lambda_1<\lambda_2$ とする). $\lambda_1,\ \lambda_2$ を求めよ.

(3) 前問で得られた固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ とする. $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ が直交していることを示せ.

(4) $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ長さ 1 になるように決めて,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=X\boldsymbol{e}_1+Y\boldsymbol{e}_2$$

によって新しく XY 座標を定義する. 問題で与えた多項式を XY 座標で表し, もとの xy 座標で曲線のグラフをかけ.

(奈良女子大 2016) (m20163208)

0.364 $x\geq 0$ 定義された関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ ついて, 以下の問いに答えよ.

(1) f の増減おいび凹凸を調べ, $y=f(x)$ のグラフの概形を書け.

(2) f の最大値を求めよ.

(3) $\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|dx<\infty$ であることを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ を求めよ.

(奈良女子大 2017) (m20173203)

0.365 以下の微分方程式を考える.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1) \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2}=-k_1x_2-k_2(x_2-x_1) \end{cases}$$

ただし, $m,\ k_1,\ k_2$ は正の実定数である. 以下の問いに答えよ.

(1) これら 2 つの方程式を $X_1=x_1+x_2,\ X_2=x_1-x_2$ で定義される $X_1,\ X_2$ に対する方程式に書き直せ. また, $\omega=\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$, $\omega'=\sqrt{\dfrac{k_1+2k_2}{m}}$ とおいて, $X_1,\ X_2$ に対する一般解を求めよ.

(2) $t=0$ で, $x_1=1,\ x_2=0$ かつ $v_1=0,\ v_2=0$ を満たす解 $x_1(t),\ x_2(t)$ を求めよ. ここで, $v_1=\dfrac{dx_1}{dt}$, $v_2=\dfrac{dx_2}{dt}$ とする.

(奈良女子大 2017) (m20173206)

0.366 $\boldsymbol{r}=(x,y,z),\ r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする. 以下の量を計算せよ.

(1) r の勾配 ∇r

(2) $\dfrac{1}{r}$ の勾配 $\nabla\dfrac{1}{r}$

(3) $\boldsymbol{r}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$

(4) $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ (ω は正の実定数) とするときの，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ の回転 $\nabla \times \boldsymbol{v}$

ここで，∇ は以下で定義される微分演算子である．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

(奈良女子大 2017)　　(m20173207)

0.367 $a < b$ となる正の実数 a, b に対して，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次で定義する．

$$a_1 = a, \quad b_1 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 2$ に対し，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 2$ に対し，$b_n - a_n < \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる実数 α が存在することを示せ．

(奈良女子大 2018)　　(m20183202)

0.368 行列 A, B, C が $A \cdot B$, $B \cdot C$ が各々の行と列が与えられるように定義されているとき，以下の問いに答えよ．

(1) $(A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B \cdot C)$ が定義されていることを示せ．

(2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ を証明せよ．ただし，A^T は転置行列である．

(3) (2) を用いて $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ を証明せよ．

(京都大 1996)　　(m19963303)

0.369 関数 $r = a(1 + \cos\theta)$ が領域 $A\{-\pi \leq \theta \leq \pi\}$ で定義されている．以下の問いに答えよ．

(1) この閉曲線の長さ L を求めよ．

(2) この閉曲線に囲まれた面積 S を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983302)

0.370 行列 A が次のように定義されている．以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) A を対角化する正則行列 P を求めよ．

(京都大 1998)　　(m19983304)

0.371 行列 A が次のように定義されているとき，以下の問いに答えよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

(1) i 列目の x_i と j 列目の x_j が等しい場合，階数は n より 1 以上小さいことを示せ．

(2) A の行列式は $(x_i - x_j)$ で割りきれることを示せ．$(i \neq j)$

(3) 列の値がすべて同じ値である列数が m であるとすると，階数は $(n-m)$ であることを示せ．

(京都大 1999)　　(m19993303)

0.372　z 平面（のある領域）で定義された 1 次分数変換 $w = f(z)$ で，領域 $\{z \mid |z-1| < 1\}$ を $\{w \mid \mathrm{Im}w > 0\}$ に写像し，かつ $f(\frac{1}{2}) = i$，$f(0) = 0$ であるようなものを求めよ．

次に，この写像による領域 $V = \{w \mid 0 < \mathrm{Im}w < 1\}$ の現像 $f^{-1}(V)$ を図示せよ．

(京都大 2002)　　(m20023304)

0.373　関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$，$B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\binom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.374　任意の関数 $y = f(x)$ がある区間 I で微分可能であるとき，I の各点に対して次式で定義される y' を関数 y の導関数と呼び, 導関数を求めることを関数 y を微分するという.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(1) 上の定義式を用いて, 次の関数の導関数を求めよ.

$$y = \log x \qquad (x > 0)$$

(2) 今関数 $f(x)$ と $g(x)$ は微分可能であるとする. この時, 上の導関数の定義式を用いて, 次の事を示せ.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

但し, $g(x) \neq 0$ とする.

（京都大 2004）　　(m20043301)

0.375　有限のシンボル集合 $A = \{a_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$，$B = \{b_j \mid j = 1, 2, \cdots, m\}$ を考え, 各シンボルの生起確率を $P(a_i)$，$P(b_j)$ とする. これらのシンボル集合に対して条件付き確率 $P(a_i/b_j)$，$P(b_j/a_i)$, 同時生起確率 $P(a_i, b_j)$ をもとにして，$H(A), H(B), H(A/B), H(A,B), I(A,B)$ を以下のように定義する.

$$H(A) = \sum_{i}^{n} P(a_i) \log \frac{1}{P(a_i)}$$

$$H(B) = \sum_{j}^{m} P(b_j) \log \frac{1}{P(b_j)}$$

$$H(A/B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i/b_j)}$$

$$H(A, B) = \sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{1}{P(a_i, b_j)}$$

$$I(A, B) = H(A) - H(A/B)$$

この時, 次の問に答えよ.

(1) $I(A, B) = \displaystyle\sum_{j}^{m} \sum_{i}^{n} P(a_i, b_j) \log \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i)P(b_j)}$ となることを示せ.

(2) $H(A, B) = H(A) + H(B) - I(A, B)$ となることを示せ.

(3) $I(A, B) \geq 0$ となることを示せ.

(京都大 2004) (m20043304)

0.376 $x > 0$ に対して $\log x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ と定義して, $\log x$ の性質を定積分の性質から導きたい. (1)〜(2) に答えよ.

(1) 定積分の性質を用いて, 等式 (a)〜(d) を示せ.

(a) $\log x_1 x_2 = \log x_1 + \log x_2 \qquad (x_1, x_2 > 0)$

(b) $\log x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m} \log x \qquad (m, n$ は正整数$)$

(c) $\log e = 1 \qquad \left(e = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

(d) $\dfrac{d}{dx} \log x = \dfrac{1}{x}$

(2) 上で定義した $\log x$ の逆関数を $\exp(x)$ とするとき, 以下の等式 (e)〜(h) を示せ.

(e) $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$

(f) $\exp(1) = e$

(g) $\exp\left(\dfrac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}} \qquad (m, n$ は正整数$)$

(h) $\dfrac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$

(京都大 2008) (m20083301)

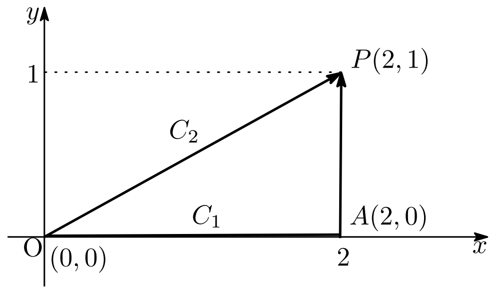
0.377 (x, y) 平面上に 2 つの関数：

$$F(x, y) = 2x + ay\ , \qquad G(x, y) = 2x + 5y$$

が定義されている. ここに a は定数である. (1)〜(4) に答えよ.

(1) 図に示すように, 折れ線 OAP に沿う経路を C_1, また, 直線 OP に沿う経路を C_2 とするとき, 次の 2 つの線積分の値を求めよ.

$$I_1 = \int_{C_1} (F dx + G dy)\ , \qquad I_2 = \int_{C_2} (F dx + G dy)$$



(2) $F = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $G = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ なる関数 $U(x, y)$ が存在するように定数 a を定めよ．また，そのときの $U(x, y)$ を求めよ．ただし定数項の差は無視してよい．

(3) (2) の関数 $U(x, y)$ が存在する場合，点 O と点 P を結ぶいかなる経路 C を選んだとしても線積分：

$$I = \int_C (Fdx + Gdy)$$

は経路によらず同じ値をもつことを示せ．

(4) (2) の関数 $U(x, y)$ が存在する場合，単位円周上 $(x^2 + y^2 = 1)$ でのその極値を考える．

(a) 点 (x, y) が単位円周上に沿って動くとき，微分 dx と微分 dy の関係を示せ．

(b) 点 (x, y) が単位円周上に沿って動くとき，$Fdx + Gdy = 0$ となる点において $U(x, y)$ は単位円周上で極値をとることを示せ．

(c) 関数 $U(x, y)$ が極値をとるときの x, y の値および $U(x, y)$ の値をそれぞれ求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083302)

0.378　複素数平面から実軸の $|x| \leq 1$ の部分を取り除いて出来る領域を D とする．$z \in D$ に対し，関数 $C(z)$ を　$C(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{z - t}$，　$z \in D$（t は実変数）　で定義する．

(1) $C(z)$ は $|z| > 1$ において正則であることを示せ．（ [ヒント] $z \in D$ と実軸上の区間 $[-1, 1]$ までの最短距離を d とするとき，$|h| \leq d/2$ なら，$|z + h - t| \geq d/2$ が成り立つ．）

(2) 被積分関数を t の冪級数に展開し，項別積分により，$|z| > 1$ における $C(z)$ のローラン展開を求めよ．

(京都大 2008)　　(m20083308)

0.379　正の整数 k, N $(1 \leq k \leq N)$ が与えられたとき，方程式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = N \tag{1}$$

の正の整数解

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & m_1 \\ x_2 & = & m_2 \\ & \cdots & \\ x_k & = & m_k \end{array} \right. \tag{2}$$

の総数を求めるために，解 (2) に対して項数が $N - k$ であるような数列

$$\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{m_1 - 1\text{ 個}}, \underbrace{2, 2, \cdots, 2}_{m_2 - 1\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{k, k, \cdots, k}_{m_k - 1\text{ 個}}$$

をつくる．ただし，$m_i = 1$ であるような i はこの数列の項にはならないとする．以下では，項数 M の数列 $a_1, a_2, \cdots, a_M$ を $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにして，(1)〜(4) に答えよ．なお，数列の項は全て正の整数とする．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が与えられたとき，新たな数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ を

$$\overline{a}_n = a_n + n - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

と定義する．数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ が正の整数 k に対して

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_M \leq k$$

を満たすとき，数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ は

$$1 \leq \overline{a}_1 < \overline{a}_2 < \cdots < \overline{a}_M \leq k + M - 1 \tag{3}$$

を満たすことを示せ.

(2) 条件 (3) を満たすような数列 $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M}$ の総数を求めよ.

(3) 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ と $\{b_n\}_{n=1}^{M}$ について,

$$a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \cdots, M)$$

であるとき，かつ，そのときに限り $\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ と表すことにする．このとき.
$\{a_n\}_{n=1}^{M} = \{b_n\}_{n=1}^{M}$ であれば $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{M} = \{\overline{b}_n\}_{n=1}^{M}$ であり，また，その逆も成り立つことを示せ.

(4) (1) から (3) の結果を利用して，方程式 (1) の正の整数解の総数を求めよ.

(京都大 2009)　　(m20093302)

0.380 3 次元ユークリッド空間の直交座標系を一つ定め，その x 軸，y 軸および z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする．2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = u_x\boldsymbol{e}_x + u_y\boldsymbol{e}_y + u_z\boldsymbol{e}_z$ および $\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ について，以下の (1)～(4) に答えよ．ただし，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は零ベクトルではないものとする.

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角 θ の余弦 $\cos\theta$ を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ.

(2) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z を用いて表せ．ただし，平行四辺形の表裏や向きは考えないものとする.

(3) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{w}$ を，行列式を形式的に用いて

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

と定義する．ベクトル $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ に直交することを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{w}$ の長さは (2) の面積 S に等しいことを示せ.

(京都大 2009)　　(m20093304)

0.381 確率密度 X の確率密度関数が $f(x)$ で与えられているとき, 積率母関数 $M_X(t)$ を
$M_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ で定義する．また, 2 つの関数 $p(x)$, $q(x)$ の合成積 $p * q(x)$ を
$p * q(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p(u)q(x-u)du$ で定義する. 以下の (1)～(3) に答えよ. ただし, 計算に必要となる確率密度関数の積分に関する仮定は適宜用いてよい.

(1) 確率変数 X, Y は互いに独立で, 同時確率密度関数が $f(x)g(y)$ で与えられているとする. このとき, 確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数 $h(z)$ が $h(z) = f * g(z)$ で与えられることを示せ.

(2) 独立な確率変数 X, Y に対し, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ がなりたつことを示せ.

(3) 確率変数 X の平均 m_X と分散 σ_X^2 は, それぞれ次のように与えられることを示せ.

$$m_X = \left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}, \quad \sigma_X^2 = \left.\frac{d^2M_X}{dt^2}\right|_{t=0} - \left(\left.\frac{dM_X}{dt}\right|_{t=0}\right)^2$$

(京都大 2010)　　(m20103303)

0.382 $\boldsymbol{R}^n$ において定義された実数値関数 F が凸関数であるとは, 任意の $\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ と任意の $\lambda (0 < \lambda < 1)$ とに対し, 次の不等式が成り立つことである.

$$F(\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \leq \lambda F(\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)F(\boldsymbol{y})$$

特に, A を実対称行列として, $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x} \rangle$ とおく. ただし, $\langle \ , \ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準内積を表す.

(1)〜(2) に答えよ.

(1) 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(a) $F(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x} \rangle$ は凸関数である.

(b) 任意の $\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \ A\boldsymbol{y} \rangle \geq 2 \langle \boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{y} \rangle$ が成り立つ.

(c) 任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\langle \boldsymbol{x}, \ A\boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ が成り立つ.

(2) A をさらに正定値対称行列とし, 閉領域 D を $D = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid F(\boldsymbol{x}) \leq k\}$ で定義する. ただし, $k > 0$ は定数. このとき D は凸集合であることを証明せよ. すなわち, 任意の $\boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y} \in D$ と任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ とに対して, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in D$ が成り立つことを示せ.

(京都大 2010)　　(m20103304)

0.383 $C(r)$ を複素平面内における原点を中心とする半径 $r > 0$ の円周とし, $I(r)$ を

$$I(r) = \int_{C(r)} \frac{\overline{z}+1}{z+1}\, dz$$

と定義する. ただし, 積分の向きは反時計まわりにとるものとする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $0 < r < 1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(2) $r > 1$ のとき, $I(r)$ を求めよ.

(京都大 2010)　　(m20103307)

0.384 R^2 に直交座標系 $O-xy$ をとり, 次式で定義される曲線 C を考える.

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + b\cos 2\theta \\ y &= a\sin\theta + b\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ここに, $a, \ b$ は正の数であり, $a \neq b$ を満たすものとする. このとき問 (1)〜(3) に答えよ.

(1) $\Phi(\theta)$ は, 次式を満たす連続関数であるとする.

$$(a\cos\theta + b\cos 2\theta)\tan\Phi(\theta) = a\sin\theta + b\sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

このとき, $\dfrac{d\Phi}{d\theta}$ を θ の関数として求めよ.

(2) $a = 2, \ b = 1$ のとき, C の概形を描け. また $\Phi(0) = 0$ であるとき, $\Phi(2\pi)$ を求めよ.

(3) $a = 2, \ b = 1$ のとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

(京都大 2014)　　(m20143306)

0.385 A, B, C, D は各々$n\times\ n$ 実行列であり，D は正則であるとする．また，M は

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

として定義する $2n\times\ 2n$ 実行列である．M が正則であるとき，次の (1)〜(3) に答えよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} I & 0 \\ G & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
を満たす $n\times\ n$ 実行列 F, G, H を A, B, C, D を用いて表せ．ここに，I は $n\times\ n$ 単位行列，0 は $n\times\ n$ ゼロ行列である．

(2) (1) で求めた行列 H は正則であることを示せ．

(3) M^{-1} を A, B, C, D を用いて表せ．

(京都大 2015) (m20153304)

0.386 実数のパラメータ θ に依存する行列 $A(\theta)$ が

$$A(\theta)=\begin{pmatrix} 1-\dfrac{2}{3}\cos^2\theta & -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta \\ -\dfrac{2}{3}\cos\theta\sin\theta & 1-\dfrac{2}{3}\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

で与えられている．$\mathbb{R}^2$ の点 $\boldsymbol{x}$ をデカルト座標系 $O-x_1x_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2)$ と表す．これらを用いて，集合 $\Omega(\theta)$ を

$$\Omega(\theta)=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\cdot A(\theta)\}\boldsymbol{x}\leq 1\}$$

と定義する．ここに，$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{2}x_iy_i$$

である．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $A(\theta)$ のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．ただし，固有ベクトルは正規化して単位ベクトルとせよ．

(2) $\Omega(\theta)$ の概形を描け．

(3) $\Omega(0)\cap\Omega(\pi/2)$ の面積を求めよ．

(4) $\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ を図示し，その面積を求めよ．ここに，$\boldsymbol{x}\in\displaystyle\bigcup_{0\leq\theta\leq\pi/2}\Omega(\theta)$ とは，$0\leq\theta_0\leq\pi/2$ なる θ_0 があって，$\boldsymbol{x}\in\Omega(\theta_0)$ となることである．

(京都大 2015) (m20153305)

0.387 $a<b$ として，区間 $[a,\ b]=\{x\mid a\leq x\leq b\}$ で定義された連続実数値関数 $x\mapsto f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)\ ,\quad a<c<b$$

となる c が存在することを示せ．

(京都大 2017) (m20173306)

0.388 次の (1)〜(6) に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．

(1) k を自然数とし，$f(x)$ を $k \leq x \leq k+1$ で連続な狭義単調減少関数とする．このとき，不等式

$$\int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく．$S_n > \log(n+1)$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) で定義した S_n に対し，極限 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ.

(4) $x > 1$ において関数 $g(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は狭義単調減少であることを示せ.

(5) k を 3 以上の自然数とする．(4) で定義した関数 $g(x)$ に対し，不等式

$$g(k) < \frac{1}{\log(k-1)} - \frac{1}{\log k}$$

が成り立つことを示せ.

(6) $n = 2, 3, \cdots$ に対して，$T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2}$ とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} T_n$ が存在することを示せ.

(京都大 2019)　　(m20193304)

0.389　$x > 0$ で定義された関数 $y = x^x$ に対して，$\dfrac{dy}{dx}$ を計算せよ．

(京都工芸繊維大 1999)　　(m19993401)

0.390　2 変数関数 $\varphi(x, y) = x - y + e^y \sin x$ と全微分可能な関数 $\psi(x, y)$ に対して，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ を求めよ．

(2) $x = 0$ の近傍で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $\varphi(x, f(x)) = 0$ を満たすとし，$g(x) = \psi(x, f(x))$ とおく．微分係数 $f'(0)$ を求めよ．また，$a = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0)$，$b = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0)$ とおくとき，$g'(0)$ を a, b を用いて表せ．

(京都工芸繊維大 2003)　　(m20033406)

0.391　連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

で定義する．ただし，t は時間を表す実数，ω は角周波数を表す実数であり，$j = \sqrt{-1}$ とおいている．このとき，

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で与えられる連続時間信号 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ と振幅スペクトル $|F(\omega)|$ を求めなさい.

(京都工芸繊維大 2008)　　(m20083405)

0.392　xy 平面上で定義された関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \mathrm{Tan}^{-1} \dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある．ここで，$\mathrm{Tan}^{-1} x$ は逆正接関数の主値を表す.

(1) $x \neq 0$ のとき，偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよ.

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ を定義に基づいて求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ および $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2010)　　(m20103403)

0.393 a を実数とする．実数全体で定義された関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & (x \neq 0) \\ a & (x = 0) \end{cases}$$

を満たし，$x = 0$ で連続であるとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．さらに，$f'(0)$ の値を求めよ．

(京都工芸繊維大 2018)　　(m20183403)

0.394 xy 平面の領域 $D = \{(x,y) \mid 0 < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$ で定義される関数

$$f(x,y) = \log x + \frac{2y^2+2y+1}{2x^2}$$

を考える．

(1) 関数 $f(x,y)$ の 1 次および 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

(京都工芸繊維大 2020)　　(m20203404)

0.395 ２つの３次元空間ベクトル $\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j} + a_3\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{i} + b_2\overrightarrow{j} + b_3\overrightarrow{k}$ に対して，外積 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は次のように定義される．

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

但し，$\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ は空間の基本ベクトル（大きさ 1，互いに垂直）を，また，$|\ \ |$ は行列式を表す．この時，以下の設問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ および $\overrightarrow{b}$ と垂直になることを証明せよ．

(2) 外積について $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ という交換の法則が成り立つかどうかを確かめよ．また，成立しない場合は，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ の間にどのような関係が成り立つかを示せ．

(3) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ ならば，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は平行となり，また逆に $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が平行ならば，$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ となることを証明せよ．

(4) ３つの空間ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ で定まる平行六面体の体積 V は $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ の絶対値で与えられることを証明せよ．($\cdot$ は，内積を表す．)

(大阪大 1996)　　(m19963501)

0.396 以下の問 (1)〜(6) に答えよ．

あるパーティで，n 人がひとつずつプレゼントを用意して，お互いに交換することになった．n 人には 1 番から n 番までの番号がついているものとし，すべてのプレゼントは区別できるものとする．本問では，集合 X の要素数を $|X|$ と表すことにする．

[集合 $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ の定義]

j 番（ただし，j は 1 以上 n 以下の任意の整数）の人に着目する．j 番の人にその人自身が用意したプレゼントがあたるような交換のしかたすべての集合を $S(j)$ と定義する．この記法は 1 パラメタに関するものであるが，これを任意の $k(1 \leqq k \leqq n)$ 個のパラメタに関する記法に拡張する．ある k 人 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ がそれぞれ自分のプレゼントに当たることが同時に起きるような交換のしかたすべての集合を $S\,(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ と表す．ただし，次の (a)～(c) の条件を満たすものとする．

(a) k は 1 以上 n 以下の任意の整数である．

(b) $1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqq n$

(c) $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ に属する交換のしかたのなかには，$(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ 以外の人で自分のプレゼントに当たっている人がいる交換のしかたも含まれるものとする．

（定義終わり）

(1) プレゼントの交換のしかたは全部で何通りあるか．n を用いて表せ．

(2) 集合 $S(j_1, j_2, \cdots, j_k)$ を $S(j_1), S(j_2), \cdots, S(j_k)$ を用いて表せ．

(3) $|\,S(j_1, j_2, \cdots, j_k)\,|$ の値を n および k を用いて表せ．

(4) $|\,S(j_1) \cup S(j_2) \cup S(j_3)\,|$ の値を n を用いて表せ．

(5) だれも自分のプレゼントには当たらないような交換のしかたは何通りあるか．n を用いて表せ．また，そのように表すことができる理由を簡単に説明せよ．

(6) n 個のプレゼントをでたらめに n 人に配ったとする．このとき自分のプレゼントが自分に配られるような人の数の期待値を求めよ．また，その導出過程も簡単に示せ．

(大阪大 1996)　　(m19963503)

0.397 以下の問に答えよ．ただし，$C(m, r)$ は異なる m 個のものから r 個とる組み合わせの数を表す．ただし，$C(m, r)$ の値は，$m \geqq r$ の場合は通常の定義に従うものとし，$m < r$ の場合は $C(m, r) = 0$ と定めることにする．

(1) 次の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に書け．ただし，n は正の整数とする．

$$C(n, 0) + 2C(n, 1) + 3C(n, 2) + \cdots + (n+1)C(n, n)$$

(2) 2 以上の整数 n に対して条件 [1] を満たす整数を x, y, z とする．

$$0 \leqq x < y < z \leqq n \cdots\cdots\cdots [1]$$

x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ を次のように定義する．

$$f(x, y, z) = C(x, 1) + C(y, 2) + C(z, 3)$$

条件 [1] を満たす組 (x, y, z) すべての集合を関数 f の定義域とするとき，異なる値 $f(x, y, z)$ の個数 $R(n)$ を考える．すなわち，$R(n)$ は関数 f の値域の要素数である．

$x_1 \neq x_2$ あるいは $y_1 \neq y_2$ あるいは $z_1 \neq z_2$ のいずれかが成り立つとき，

$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$ となる場合は，値 $f(x_1, y_1, z_1)$ を重複して勘定しないことに注意せよ．

(a) 条件 [1] を満たす (x, y, z) の組の個数（すなわち，関数 f の定義域の要素数）を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(b) $n = 6$ の場合，異なる $f(x, y, z)$ の値をすべて列挙せよ．また，$R(6)$ の値も書け．

(c) 一般の n に対して $R(n)$ の値を n を用いて表せ．最終結果だけでなく，その根拠も簡単に示せ．

(大阪大 1999)　　(m19993501)

0.398 ２次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ を標準化して，そのグラフを書くことを考える．以下の問に順次答えよ．

(1) ２次形式 $F=2x^2-4xy+5y^2$ の行列 A を求めよ．

(2) 対称行列 A の固有値 α , β を求めると共に，それぞれに対応した大きさ１の固有ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ を計算せよ．

(3) 直交行列の定義を述べよ．また，(2) で求めた列ベクトル $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ より２次の正方行列 $P=[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ を作成した場合， P が直交行列となっていることを示せ．

(4) P を用いて，行列 A を対角化せよ．

(5) (3) で求めた P を用いて，次式のようにもとの (x,y) 座標系から (x',y') 座標系に変換した場合，新しい座標系ともとの座標系の関係はどのようになっているか示せ．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

(6) ２次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ に対して，(5) の座標変換を行い，新しい座標系 (x',y') で表現したときの式を求めよ．

(7) 与えられた２次曲線 $2x^2-4xy+5y^2=3$ の図形を描け．

(大阪大 1999)　　(m19993503)

0.399 行列に対する新たな演算子 $\otimes$ を考え，式の集合 $\mathcal{Z}$ を以下のように定義する．

(1) 各行列 $A_1,\ A_2,\ldots$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(2) $\mathcal{Z}$ に属する任意の式 $F,\ G$ に対し，式 $(F\otimes G)$ は $\mathcal{Z}$ に属する．

(3) $\mathcal{Z}$ は，上の２条件に該当する式だけを要素として含む．

このとき，式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ に対し，それが $\mathcal{Z}$ の要素となるように「括弧づけ」を行うことを考える．例えば，式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3$ に対しては

$$((A_1\otimes A_2)\otimes A_3),\quad (A_1\otimes(A_2\otimes A_3))$$

の２通りの「括弧づけ」が存在する．また，式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3\otimes A_4$ に対しては

$$(((A_1\otimes A_2)\otimes A_3)\otimes A_4),\quad ((A_1\otimes A_2)\otimes(A_3\otimes A_4))\quad ((A_1\otimes(A_2\otimes A_3))\otimes A_4)$$

$$(A_1\otimes((A_2\otimes A_3)\otimes A_4)),\quad (A_1\otimes(A_2\otimes(A_3\otimes A_4)))$$

の５通りの「括弧づけ」が存在する．以下では，式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ (ただし $n\geq 2$) に対する「括弧づけ」の個数を T_n と表す．

(1) 式 $A_1\otimes A_2\otimes A_3\otimes A_4\otimes A_5$ に対する「括弧づけ」を５通り示せ．

(2) $T_n\geq 2T_{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $T_n\geq 2T_{n-1}$ の結果および数学的帰納法を用いて, $T_n\geq 2^{n-2}$ が成り立つことを示せ．

(4) 式 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_n$ には $\otimes$ が $n-1$ 個現れていることに注意して，$T_n\leq(n-1)!$ が成り立つことを示せ．

(大阪大 2001)　　(m20013501)

0.400 区間 $(0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $x(t)$ が次の積分方程式

$$x(t)=\int_0^t \sin(2(t-u))\cdot x(u)du+t$$

を満たすとする．このとき，$x(t)$ を求めよ．

(大阪大 2001)　　(m20013504)

0.401 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ に対して $g(x)$ を　$g(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt$

で定めるとき，次の (1), (2), (3) に答えよ．

(1) $f(x)$ が奇関数ならば $g(x)$ も奇関数であり，$f(x)$ が偶関数ならば $g(x)$ も偶関数であることを示せ．

(2) $f(x)=\cos x$ のとき，$g(x), g'(x), g''(x)$ を求めよ．

(3) $f(0)>0$ のとき，$g(x)$ は $x=0$ で極小値をとることを示せ．

(大阪大 2003)　　(m20033501)

0.402 赤い玉 3 個が一列に並んでいるとする．この列に対して次のような操作を繰り返し行う．

> 列の先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．選んだ玉が赤い玉なら，それをそのまま置いておき，列の先頭に白い玉を 1 つ付加する．選んだ玉が白い玉なら，それを取り去り，玉が抜けたために隙間ができれば，玉の順序が変わらないように玉を移動して隙間をなくす．

例として 1 回目の操作と 2 回目の操作について述べる．1 回目の操作で当然赤い玉を選ぶことになり，操作の結果として白い玉が 1 つ，列の先頭に付加され，3 つの赤い玉と合わせて 4 つの玉が並ぶことになる．2 回目の操作では，それらの 4 つの玉のうちの先頭，2 番目，3 番目の 3 つの玉のうちから 1 つを等確率で選ぶ．このとき，確率 $\frac{2}{3}$ で赤い玉が選ばれ，確率 $\frac{1}{3}$ で白い玉が選ばれる．赤い玉が選ばれた場合には，白い玉が 1 つ先頭に付加され，結果として白い玉が 2 つ並び，その後に赤い玉が 3 つ続いた列ができる．また，白い玉が選ばれた場合には，白い玉は取り去られ，結果として列には赤い玉が 3 つ残ることになる．

n 回目の操作の終了時に列にある白い玉の個数を $w(n)$ と書くことにする．明らかに $w(n)$ は $0,1,2,3$ のいずれかの値を（それぞれある確率を持って）とる．特に $n=0$ の場合には確率は 1 で $w(0)=0$ であると定義しておく．

$i=0,1,2,3$ について，$w(n)$ が i である確率を $p_i(n)$ で表す．上で述べたことにより，
$p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$, $p_0(0)=1$ である．

次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $p_0(1), p_1(1), p_2(1), p_3(1)$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $p_1(2m)=p_3(2m)=0$ であることを示せ．ただし，m は非負整数とする．

(3) m を 1 以上の整数とするとき，$p_0(2m)$ と $p_2(2m)$ を $p_0(2m-2)$ と $p_2(2m-2)$ を用いて表せ．

(4) 非負整数 m について，$p_0(2m)$ を求めよ．

(大阪大 2003)　　(m20033503)

0.403 s を実数, v を実数を成分とする 3 次元ベクトルとして,

$$A_s=E-sv\,{}^tv$$

と定義する. E は単位行列, ${}^tv$ は v の転置ベクトルを表す. ただし, v は零ベクトルではないとする. 以下の問に答えよ.

(1) A_s が直交行列となる s をすべて求めよ.

(2) 必要があれば, A_s が対称行列であることを用いて, A_s の固有値をすべて求めよ.

(3) 実数を成分とする 3 次元列ベクトル x_0 に対して

$$x_{i+1} = A_s x_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

と定める. このとき, すべてのベクトル x_0 に対して, x_i が収束するための s の範囲を求めよ. また, その時の極限 x_∞ を x_0 と v を用いて表せ. ただし, x_i が x_∞ に収束するとは, x_i の各成分が x_∞ の各成分に収束することである.

(大阪大 2004) (m20043506)

0.404 実軸上で定義された関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$xy'' - (x+1)y' + y = 2x^2 e^{2x} \qquad (A)$$

の一般解を求めたい.

(1) (A) に対応する斉次方程式 $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ は $y = e^{px}$ (p は定数) の形の解をもつ. この解を求めよ.

(2) $y = e^{px}u$ (p は (1) で得られた値, u は x の関数) とおいて (A) に代入し, u が満たすべき微分方程式を求めよ.

(3) (2) で得られた微分方程式を解くことにより, (A) の一般解を求めよ.

(大阪大 2006) (m20063505)

0.405 次の 2 階線形常微分方程式を考える：

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \qquad (*)$$

ここで, $a(t), b(t)$ は実軸上で定義された有界な連続関数とする. このとき次の問に答えなさい.

(1) x_1, x_2 を $(*)$ の解とし, これらに対して関数 J を

$$J(t) := \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1{}'(t) & x_2{}'(t) \end{bmatrix}$$

と定める. このとき J は次の 1 階常微分方程式を満足することを示しなさい:

$$J'(t) = -a(t)J(t).$$

(2) 上記 (1) と同様に, x_1, x_2 を $(*)$ の解として, さらに

$$J(0) = \det \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1{}'(0) & x_2{}'(0) \end{bmatrix} \neq 0$$

と仮定する. このとき, 任意の t において, 2 つのベクトル $(x_1(t), x_1{}'(t))$, $(x_2(t), x_2{}'(t))$ は 1 次独立となることを示しなさい.

(3) x_1, x_2, x_3 を $(*)$ の 3 つの解とする. このとき, 任意の t で

$$\det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ x_1{}'(t) & x_2{}'(t) & x_3{}'(t) \\ x_1{}''(t) & x_2{}''(t) & x_3{}''(t) \end{bmatrix} = 0$$

であることを示しなさい．また，ある 3 つの実数の組 $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ があって，任意の t で

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0$$

が成り立つことを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063508)

0.406 閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上で定義された，1 階連続微分可能（1 階導関数が存在して連続）な奇関数 $f(t)$ が与えられている．

(1) 実数列 $\{a_k\}$ を次のように定める：　$a_k := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$,　$k = 1, 2, \cdots$.

このとき　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$　を示しなさい．また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2 < \infty$　であることを示しなさい．

(2) 上記 (1) で定めた実数列 $\{a_k\}$ に対して，　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} {a_k}^2$　が成立したとすると，

$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k \sin kt \right|^2 dt = 0$　となることを示しなさい．また，この逆も成立することを示しなさい．

(大阪大 2006)　　(m20063510)

0.407 X, Y を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立な確率変数とし，その和を W，W の絶対値を Z とおく．すなわち，　$W = X + Y$,　$Z = |W|$　である．$N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ を使って，関数 $\Phi(t)$ を $\Phi(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x) dx$　で定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 W の分布を求めよ．

(2) 非負定数 z に対して，確率 $P(Z < z)$ を関数 Φ を用いて表せ．

(3) 確率変数 Z の平均を求めよ．

(大阪大 2007)　　(m20073512)

0.408 n, k が自然数のとき，広義積分 $I_{n,k}$ を次のように定義する．　$I_{n,k} = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}} dx$

(1) $I_{1,k}$ を求めよ．

(2) $n - 1 - k < 0$ のとき，次の関係が成り立つことを示せ．　$I_{n,k} = \dfrac{n-1}{k} I_{n-1,k-1}$

(3) $n - 1 - k < 0$ のとき，$I_{n,k}$ を求めよ．

(4) $x \geq 1$ のとき，自然数 k に依存するある実数 C_k が存在して，　$\dfrac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{k+1}} \geq \dfrac{C_k}{x^{2k-2n+3}}$ となることを示せ．

(5) 上記 (4) の不等式を使って $n - 1 - k \geq 0$ のとき，$I_{n,k} = \displaystyle\lim_{L\to\infty} \int_0^{L} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{k+1}} dx = \infty$ を示せ．

(大阪大 2008)　　(m20083501)

0.409 閉区間 $[-\pi,\ \pi]$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x \sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

と定義する．

(1) $f(x)$ のフーリエ係数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) で求めた a_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ に対して,

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(大阪大 2009) (m20093507)

0.410 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ の指数関数 $\exp(A)$ を求める. ただし, a, b および c は実数ある. また, E を単位行列として, 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を

$$\exp(A) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

のように定義する.

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.

(2) 行列 A は対称行列であるので, 適当な直交行列によって対角化される. 行列 A を対角化する直交行列の中で対称行列となる直交行列 P を 1 つ求めよ.

(3) 行列 A の指数関数 $\exp(A)$ を求めよ.

(4) $\exp(A)$ の行列式 $|\exp(A)|$ を求めよ.

(大阪大 2010) (m20103501)

0.411 自然数 n に対し, 以下のように定義される数列 $\{a_n\}$ について, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

ただし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ ($|r| < 1$) を用いてもよい.

(1) $\displaystyle a_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (2) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n+1} (k-2)\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(大阪大 2010) (m20103502)

0.412 関数 f を, 実軸上で定義された周期 1 の連続微分可能な実数値関数とする. この f に対して $\hat{f}(k)$ を

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t)\,dt$$

と定義する. このとき, 複素数 z に対して

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k) \bar{z}^{|k|}$$

とおく.

(1) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $u(z)$ は $|z| \leq r$ で絶対かつ一様収束することを示せ.

(2) $u = u(z)$ は実数値関数で, $z = x + iy$ とするとき,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

となることを示せ.

(3) 任意の $r \in (0,1)$ に対して, $z = re^{2\pi i\theta}$ とするとき,

$$u(z) = \int_0^1 f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(2\pi(\theta - t)) + r^2}\, dt$$

となることを示せ.

(大阪大 2010)　　(m20103509)

0.413 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す.

$$a_1 = 2\ , \quad a_2 = 6\ , \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ.

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ.

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.414 曲線 $y = f(x)$，x 軸，直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた領域の重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を考える．ただし，区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする.

(1) 上記の領域を D とするとき，$\overline{x}$ は

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dxdy}{\displaystyle\iint_D dxdy}$$

で定義される.

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}$$

となることを証明せよ.

(2) 同様の形式で $\overline{y}$ を求めよ.

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ．ただし，exp は指数関数を表すものとする.

(大阪大 2011)　　(m20113505)

0.415 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が，行列 $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ ，　$A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\ , \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

と定義される．ここで n は自然数とする．以下の問いに答えよ.

(1) PAP^{-1} を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) 第 n 項が $c_n = 2^n b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ならびに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123501)

0.416 (1)

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{\pi} - \cos(x)\right), \quad (0 \leq x < 2\pi)$$

で定義された周期 2π を持つ関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}$$

とフーリエ級数に展開したとき,

$$a_n,\ (n = 0, 1, 2, \cdots),\ b_n,\ (n = 1, 2, \cdots)$$

を求めよ.

(2) (1) の結果を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値を求めよ.

(大阪大 2012)　　(m20123510)

0.417 曲線 C が媒介変数表示 $x = f(s),\ y = g(s),\ s \geq 0$ で表される．ただし，$\cosh s = (e^s + e^{-s})/2$ ，$\sinh s = (e^s - e^{-s})/2$ を用いて

$$f(s) = s - \frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s) = \frac{1}{\cosh s}$$

と定義する．以下の設問に答えよ.

(1) 定数 $b > 0$ に対して曲線 $C(b)$ が $x = f(s),\ y = g(s),\ 0 \leq s \leq b$ で表される．$C(b)$ の長さ $\ell(b)$ を求めよ.

(2) 点 P は時刻 0 で $x = f(0),\ y = g(0)$ を出発して s が増える方向へ一定の速さで C 上を移動する．時刻 $t > 0$ までに移動した経路の長さを t とする．時刻 t における P の位置を $x = f(\varphi(t))$, $y = g(\varphi(t))$ と表すための関数 $\varphi(t)$ を求めよ

(大阪大 2014)　　(m20143501)

0.418 正の実数 R に対して，複素平面上の原点を中心とする半径 R の円周上を反時計まわりに 1 周する閉曲線を C_R とする．以下の問いに答えよ.

(1) R を正の実数とし，α を $|\alpha| < R$ を満たす複素数とするとき，複素積分

$$\int_{C_R} \frac{z^2}{z - \alpha} dz$$

を求めよ.

(2) n を 2 以上の自然数とする．複素平面における領域 D 上で定義された n 個の複素関数 $h_j(z)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を考え，各 $h_j(z)$ は D 上で正則とする．D 上の複素関数 $g(z)$ を $g(z)=h_1(z)h_2(z)\cdots h_n(z)$ と定義するとき，$g(z)$ の D における導関数 $g'(z)$ について

$$\begin{aligned} g'(z) &= h_1'(z)h_2(z)\cdots h_n(z)+h_1(z)h_2'(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad +\cdots+h_1(z)\cdots h_{j-1}(z)h_j'(z)h_{j+1}(z)\cdots h_n(z) \\ &\quad +\cdots+h_1(z)h_2(z)\cdots h_n'(z) \end{aligned}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．

(3) n を 2 以上の自然数とする．複素数 $b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}$ に対して複素関数 $f(z)=z^n+b_{n-1}z^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\cdots+b_1z+b_0$ を考える．n 次方程式 $f(z)=0$ の n 個の複素数解を α_1，α_2，$\cdots$，α_n とし，R は $|\alpha_j|<R$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を満たす正の実数とする．このとき複素積分

$$\int_{C_R}\frac{z^2f'(z)}{f(z)}dz$$

を b_{n-2}，b_{n-1} を用いて表せ．

(大阪大 2014)　　(m20143505)

0.419 $\{f_k(x)\}_{k=1.2.\cdots}$ を閉区間 $I(\subset\mathbb{R})$ で定義された実数値連続関数の列とする．二つの条件を考える．

条件 1 ：$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Big|f_k(x)\Big|<\infty,\qquad x\in I$

条件 2 ：$\displaystyle\max_{x\in I}\left|\sum_{k=1}^{m}f_k(x)-\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\right|\to 0\qquad (m,n\to\infty)$

条件 1 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において絶対収束するという．条件 2 が満たされるとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ は I において一様収束するという．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=|x|$ $(x\in[-\pi,\ \pi])$ のフーリエ級数

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

を求めよ．

(2) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において絶対収束することを示せ．

(3) (1) で求めた級数 $s(x)$ が $[-\pi,\pi]$ において一様収束することを示せ．

(大阪大 2014)　　(m20143506)

0.420 実数 x に対し $y=\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ．そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について　$S(a)=\frac{1}{a}\int_0^a\mathrm{sh}^{-1}(x)dx$　と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to 0}S(a)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\{S(a)-\log a\}$ を求めよ．

(大阪大 2015)　　(m20153505)

0.421 2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

で定める．ここで，関数 $\theta=\tan^{-1}s$ は，関数

$$s=\tan\theta\quad\left\{-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right\}$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y)=h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問いに答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y)=e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y)+xg_y(x,y)-h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}=0$$

が成り立っているとする． ここで， $g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数， $g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数， $h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す． $h(1)=1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(大阪大 2021)　　(m20213506)

0.422 $0\leqq\theta<2\pi$, $0\leqq\phi<2\pi$ とする．3 次の正方行列 A, B を次式で定義し，$C=AB$ とする．

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{pmatrix}$$

なお，虚数単位は i $(=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223506)

0.423 (1) 関数 $y=y(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy+(1+x^2)^2+y^2$$

を満たしているとする．このとき，関数 $z=z(x)$ を

$$z=\frac{y}{1+x^2}$$

によって定義する．z が満たす微分方程式を求めよ．

(2) (1) の微分方程式の，初期条件 $y(0)=0$ の下での解を求めよ．

(3) (2) で求めた解は，0 を含むある有界開区間 $(a,\ b)$ 上で連続であり

$$\lim_{x\to a+0}|y(x)|=\lim_{x\to b-0}|y(x)|=\infty$$

を満たしている．このような a, b を求めよ．

(4) 関数 $u = u(x)$ が微分方程式

$$(1+x^2)\frac{du}{dx} = 2xu + (1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2 + u^2}$$

を満たしているとする．この微分方程式の，初期条件 $u(0) = 0$ の下での解を求めよ．

(大阪大 2022)　　(m20223509)

0.424 有限次元の実ベクトル空間について, つぎの各問いに答えよ.

(1) ベクトル空間の次元の定義を述べよ.

(2) V をベクトル空間, W を V の部分空間とする. V と W の次元が等しいならば, $W = V$ であることを証明せよ.

(大阪府立大 2010)　　(m20103603)

0.425 行列 A をつぎのように定義する：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを, それぞれ求めよ.

(3) 問い (1) と問い (2) の結果を使って, 行列 A を対角化せよ.

(4) 行列 A の n 乗, A^n を求めよ. ただし n は自然数とする.

(大阪府立大 2010)　　(m20103604)

0.426 関数 $X(r,\theta) = r\cos\theta$, $Y(r,\theta) = r\sin\theta$ の定義域はいずれも $D = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ とする．次の問いに答えよ.

(1) 2 つの集合

$$A = \{(X(r,\theta_0), Y(r,\theta_0)) \mid r \in (0,\infty)\},\ B = \{(X(r_0,\theta), Y(r_0,\theta)) \mid \theta \in (-\pi,\pi)\}$$

を 1 つの座標平面上に図示せよ．ただし，$\theta_0 \in (-\pi,\pi)$, $r_0 \in (0,\infty)$ は定数である.

(2) 行列 $J(r,\theta) = \begin{pmatrix} X_r(r,\theta) & Y_r(r,\theta) \\ X_\theta(r,\theta) & Y_\theta(r,\theta) \end{pmatrix}$ とその行列式 $|J(r,\theta)|$ を求めよ．ただし,

$$X_r = \frac{\partial X}{\partial r},\ Y_r = \frac{\partial Y}{\partial r},\ X_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta},\ Y_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

である.

(3) 2 つのベクトル $(X_r(r,\theta), Y_r(r,\theta))$, $(X_\theta(r,\theta), Y_\theta(r,\theta))$ が直交することを示せ.

(大阪府立大 2011)　　(m20113602)

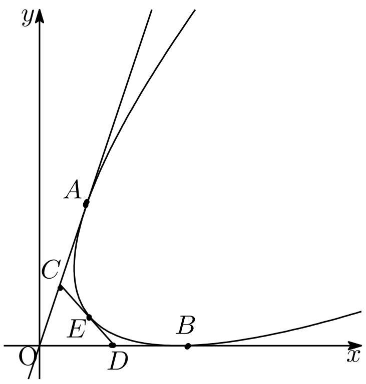
0.427 O を原点とする直交座標上の 2 点 $A(a_x,\ a_y)$ と $B(b_x,\ 0)$ を通る曲線が媒介変数 t を用いて次式のように定義されている．$a_y > 0$, $b_x > 0$ として以下の問に答えよ.

$$x = (1-t)^2 a_x + t^2 b_x$$

$$y = (1-t)^2 a_y$$

(1) この曲線が点 A において直線 $\overline{AO}$ に接することを示せ.

(2) この曲線が線分 $\overline{AO}$ の中点 C と線分 $\overline{BO}$ の中点 D を結ぶ線分の中点 E で接することを示せ.



(大阪府立大 2011)　　(m20113612)

0.428　$2\times\ 2$ の行列 A をつぎのように定義する：

$$A=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

このとき，つぎの各問いに答えよ.

(1) 行列 A の固有値を求めよ.

(2) 問い (1) で求めた固有値に対応する行列 A の長さ 1 の固有ベクトルを求めよ.

(3) 問い (1) で求めた固有値を λ，対応する長さ 1 の固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$ と置く．次の等式を満たすベクトル $\boldsymbol{y}$ を求めよ.

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$$

ただし E は $2\times\ 2$ の単位行列であるとする.

(4) ベクトル $\boldsymbol{x}$ とベクトル $\boldsymbol{y}$ が次のように成分表示されるとする.

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

このとき $2\times\ 2$ の行列 B を次のように定義する：

$$B=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}$$

次の等式を満たす $2\times\ 2$ の行列 C を求めよ：

$$AB=BC$$

(大阪府立大 2013)　　(m20133604)

0.429　実ベクトル空間 V とそのベクトル $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ が一次独立であるとはどういうことか，その定義を述べよ.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ が V を生成するとはどういうことか，その定義を述べよ.

(3) $V=R^4$ で

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

のとき，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$，$\boldsymbol{x}_4$，$\boldsymbol{x}_5$ が V を生成するかどうかを，(2) で述べた定義にしたがって調べよ.

(大阪府立大 2016)　　(m20163604)

0.430　$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$　$(n = 1, 2, \cdots)$　で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問に答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ が有界な単調増加数列であることを証明せよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$　を求めよ．

(神戸大 1996)　　(m19963802)

0.431　$F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} |\, t \,|\, dt$　$(x \in R)$　とおくとき，次の問に答えよ．

(1)　$F(x)$ を求めよ（すなわち x の式で表せ）．そして，$y = F(x)$ のグラフを描け．

(2)　$\dfrac{d}{dx}F(x)$　を求めよ．

(3)　実数全体 R で定義された関数 $G(x)$ で２次導関数 $G''(x)$ はあるが３回は微分可能でない点があるような関数を作れ．

(神戸大 1998)　　(m19983804)

0.432　$(-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が任意の $a \leq b,\ 0 < t < 1$ に対し

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

を満たすとき下に凸であるという．$f(x)$ を $(-\infty, \infty)$ 上で定義された微分可能な実数値関数とするとき，$f'(x)$ が単調増加なら $f(x)$ は下に凸であることを上の定義に基づいて示せ．

(神戸大 2001)　　(m20013802)

0.433　正の整数 n, および実数 x に対し

$$e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_{x,n}x}$$

と表し, 数列 $\{\theta_{x,n}\}$ を定義する．ここで，$0 < \theta_{x,n} < 1$　$(n = 1, 2, \cdots)$　である. このとき, 次の各問に答えよ.

(1)　次の式が成り立つことを示せ.

$$e^{\theta_{x,n}x} = 1 + \frac{x}{n+2}e^{\theta_{x,n+1}x}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \theta_{x,n}$ を求めよ.

(神戸大 2004)　　(m20043803)

0.434　a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A\,,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1-|c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1)　$a_n d_n - b_n c_n = 1$　$(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2)　c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053804)

0.435 関数 $g_{a,b,c,d}(t)$ を $\quad g_{a,b,c,d}(t) = \dfrac{at+b}{ct+d}$ 　で定義する．ここで a,b,c,d は $ad-bc \neq 0$ を満たす任意の実定数．このとき $g = g_{a,b,c,d}(t)$ は

$$(*) \qquad \left(\frac{g''}{g'}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

を満たすことを示せ．ここで，$' = d/dt$.

さらに任意の $a,b,c,d,\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}$ $(ad-bc \neq 0\,,\ \hat{a}\hat{d}-\hat{b}\hat{c} \neq 0)$ に対して

$$g = g_{a,b,c,d}(g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)) = g_{a,b,c,d} \circ g_{\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}}(t)$$

も $(*)$ を満たす理由を説明せよ.

(神戸大 2006)　　(m20063802)

0.436 $f(x)$ をすべての $x \geq 1$ に対して定義された単調増加な連続関数とする．$f(x) > 0$ であるとするとき，次の各問いに答えよ.

(1) $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1) \leq \displaystyle\int_1^n f(x)dx \leq f(2)+\cdots+f(n-1)+f(n)$ を示せ.

(2) $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ とする．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{F(n)} = 0$ を仮定する．そのとき，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{F(n)} = 1$ 　を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073805)

0.437 $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を次式によって帰納的に定義する:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1\,, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t\,f_n(t)\,dt\,, \quad n = 0,1,\cdots \end{cases}$$

このとき，$f_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{2^k\,k!} \quad n = 1,2,\cdots$ となることを数学的帰納法によって示せ.

(神戸大 2009)　　(m20093807)

0.438 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ について，次の計算をせよ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(神戸大 2009)　　(m20093809)

0.439 $(x+y)^{xy}$ の x についての偏微分を計算しなさい $(x,\ y > 0)$. ただし, $x^a = e^{a\log x}$ と定義する.

(神戸大 2010)　　(m20103803)

0.440 以下で定義される 3 次の正方行列 $A,\ B$ について, 固有値と, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 　　(2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(神戸大 2010)　　(m20103807)

0.441 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=(x+\cos y)e^{-x}$ の極値を全て求め，極大・極小を判定せよ．

(神戸大 2011)　　(m20113804)

0.442 線形変換 $T:R^4\to R^4$ を

$$T(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\-1&-2&-5&-1\\1&1&4&0\\1&-1&2&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\quad (x_1,x_2,x_3,x_4\in R)$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}(T)=\{\boldsymbol{x}\in R^4\mid T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ を 1 組求めよ．

(2) $\mathrm{Im}(T)=\{T(\boldsymbol{x})\mid \boldsymbol{x}\in R^4\}$ の基 $\{\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\}$ を 1 組求めよ．

(3) (1)，(2) で求めた $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立であることを証明せよ．

(神戸大 2011)　　(m20113810)

0.443 $g(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された 2 回微分可能な関数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}g(x)+x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ g(0) & x=0\end{cases}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $x\neq 0$ として $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示し，$f'(0)$ を求めよ．

(3) $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ．

(神戸大 2013)　　(m20133806)

0.444 正の整数 n と実数 $c,y_1,y_2,\cdots,y_n$ に対し，$D_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ を

$$D_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\det\begin{bmatrix}y_1y_1+c & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1\\ y_1y_2 & y_2y_2+c & \cdots & y_ny_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n+c\end{bmatrix}$$

で定義し，また $n\geq 2$ のとき $d_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ を

$$d_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\det\begin{bmatrix}y_1 & y_2y_1 & \cdots & y_ny_1\\ y_2 & y_2y_2+c & \cdots & y_ny_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n & y_2y_n & \cdots & y_ny_n+c\end{bmatrix}$$

で定義する．ただし，$\det A$ は行列 A の行列式を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $n\geq 2$ のとき次の等式が成り立つことを示せ．

$$D_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)=cD_{n-1}(c,y_2,\cdots,y_n)+y_1d_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

(2) $n\geq 2$ のとき $d_n(c,y_1,y_2,\cdots,y_n)=c^{n-1}y_1$ であることを示せ．

(3) n についての数学的帰納法により次の等式が成り立つことを示せ．(ただし $0^0 = 1$ とする.)

$$D_n(c, y_1, y_2, \cdots, y_n) = c^n + c^{n-1}\sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

(神戸大 2014)　　(m20143806)

0.445　正の実数 x に対し $f(x) = x^{x^x}$ と定義する． $f'(x)$ を計算せよ．

(神戸大 2015)　　(m20153805)

0.446　実数 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f_n(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^n} \right|$$

と定義する． $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．次の問に答えよ．

(1) 関数 f_0，f_1，f_2 のグラフの概形を書け．

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (*)$$

は収束することを示せ．

(3) $(*)$ で与えられる $x \in \mathbb{R}$ の関数 $S(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを示せ．

(神戸大 2015)　　(m20153807)

0.447　$D_0(x) \equiv 1,\ D_n(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cos kx\ (n \geq 1)$，$F_n(x) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_k(x)\ (n \geq 0)$ で $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{D_n\}$ と $\{F_n\}$ を定義する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $D_n(x)\sin\dfrac{x}{2} = \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x$ となることを示せ．

(2) $F_n(x)\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2(n+1)}\Big\{1 - \cos(n+1)x\Big\} = \dfrac{1}{n+1}\sin^2\dfrac{n+1}{2}x$ となることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy = 2\pi$ となることを示せ．

(4) $0 < \delta < \pi$ なる δ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} F_n(y)dy = 0$ となることを示せ．

(神戸大 2016)　　(m20163805)

0.448　(1) $x = \sin^2\theta$ と変数変換して，次の積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

(2) 次の xy 平面上の領域 D を図示せよ．　$D = \Big\{(x, y)\ \Big|\ 1 \leqq\ x + y \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ x,\ 0 \leqq\ y\Big\}$

(3) 変数変換 $x = st,\ y = s(1-t)$ により，次の st 平面上の領域 E が (2) の領域 D に 1 対 1 に写されることを示せ．　$E = \Big\{(s, t)\ \Big|\ 1 \leqq\ s \leqq\ 4,\ 0 \leqq\ t \leqq\ 1\Big\}$

(4) 次の重積分の値を求めよ．ただし，D は (2) で定義した領域とする．　$\displaystyle\iint_D \sqrt{\frac{x}{y(x+y)}}dxdy$

(神戸大 2016)　　(m20163809)

0.449　(1) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $g(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$ の臨界点を全て求め， それぞれの点で関数が極値をとるかどうか判定せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ が回転対称であるとき，$x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ を満たすことを示せ．ただし，$f(x,y)$ が回転対称であるとは，任意の $x,y,\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x,y) = f(x\cos\theta + y\sin\theta,\ -x\sin\theta + y\cos\theta)$$

を満たすことをいう．

(神戸大 2018)　　(m20183803)

0.450　$(-1,1)$ で定義された C^∞-級関数 $f(x)$ は次の微分方程式を満たすとする：

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

自然数 n に対し，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ とおく．

(1) a_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$ が成り立つことを示せ．ただし，不等式 $1-x \leqq e^{-x} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ および等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ は証明せずに用いてよい．

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を判定せよ．また，収束するときは極限値を求めよ．

(神戸大 2018)　　(m20183805)

0.451　$xy-$ 平面上の 2 変数関数 f を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義するとき，f の原点 $(0,0)$ での連続性，偏微分可能性，全微分可能性を判定せよ．

(神戸大 2018)　　(m20183808)

0.452　微分可能な関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義式　$f'(x) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ を用いて, 以下の微分公式を証明せよ.

(1) $y(x) = u(x)v(x)$ の微分 ： $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(2) $y(x) = \sin(x)$ の微分 ： $y'(x) = \cos(x)$　　ただし, $\displaystyle\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を利用してもよい.

(鳥取大 2006)　　(m20063901)

0.453　次の行列 A に対して以下の設問 (1), (2) に答えよ.　$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．固有ベクトルは第一成分（x 成分）が 1 のものを求めよ.

(2) 行列 A を用いて, 2 変数関数 $f(x,y)$ を以下の式で定義する.

$$f(x,y) = (x\ \ y)\,A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x, y \text{ は実数})$$

この 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して　$f(x,y) = a(x+y)^2 + b(x-y)^2$　となるように a, b を求めよ.

(鳥取大 2006)　　(m20063914)

0.454　(1) $x = \tan y$ のとき，逆関数 $y = \tan^{-1} x$ が定義できる．このとき，逆関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

(2) $y = x^4 e^{-1/x}$ を微分せよ.

(3) 次の関数を微分せよ．ただし，$x > 0$ とし，また $\log$ の底は e とする．

$$y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(鳥取大 2008)　　(m20083901)

0.455 関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$ は広義積分を用いて定義された実変数 s の関数である。これについて, 以下の問に答えよ.

(1) $\Gamma(1)$ を求めよ.

(2) $\Gamma(s)$ に対して, x について部分積分をすることによって, 任意の $s > 1$ に対して $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ となることを示せ.

(鳥取大 2010)　　(m20103906)

0.456 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ を $a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $c_1 = -1$,

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n + c_n\ ,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n\ ,\ c_{n+1} = a_n + 2c_n \qquad (n \geqq 1)$$

によって定義する．これらの数列の一般項を求めよ．

(岡山大 2003)　　(m20034004)

0.457 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続な増加関数であるとき，区間 $(a, b]$ 上の関数 $F(x)$ を $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 　で定義する．このとき次の各問いに答えよ.

(1) $F(x)$ の x による微分 $F'(x)$ を $f(x)$ と $F(x)$ を使って表せ.

(2) 区間 $(a, b]$ において $f(x) - F(x) \geqq 0$ であることを示せ.

(3) 区間 $(a, b]$ において $F(x)$ は増加関数となることを示せ.

(4) 区間 $(0, \infty)$ で定義される関数 $F(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ は増加関数であることを示せ.

(岡山大 2007)　　(m20074002)

0.458 (1) 関数 $f(t)$ を $f(t) = \dfrac{1 + at}{1 + bt}$ によって定義する（a, b は定数）．このとき，$f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を計算せよ.

(2) 次の極限値が存在するように定数 a, b を定め，その極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^6}\left(\cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}\right)$$

(岡山大 2008)　　(m20084001)

0.459 数直線 $(-\infty, \infty)$ 上の関数 $F(x)$ と $f(x)$ を

$$F(x) = x^2 \log(1 + x^2)\ , \quad f(x) = F'(x)$$

によって定義する．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (tf'(t) - f(t))\, dt$ を求めよ.

(2) $f'(x) > \dfrac{f(x)}{x} > \dfrac{2F(x)}{x^2} > 0 \quad (x \neq 0)$ が成り立つことを示せ.

(3) $g(x)$ は下に凸な関数であることを示せ.

(岡山大 2009)　　(m20094001)

0.460 区間 $[0,\infty)$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対する広義積分

$$\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M f(x)e^{-sx}dx \quad (s>0)$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して，

$$\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx = \frac{n}{s}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 非負の整数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-sx}dx$ の値を求めよ．

(3) $s>1$ のとき，

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-x)^n}{n!}e^{-sx}dx$$

が成り立つことを示せ．

(岡山大 2009) (m20094002)

0.461 実数全体を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ を考える．

(1) $f(x)^2 - f'(x)^2$ を計算せよ．

(2) $f(x)$ は単調増加であることを示せ．

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について

$$\left\{f^{-1}(x)\right\}' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

を示せ．

(岡山大 2010) (m20104001)

0.462 (1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x}\,dx$ を求めよ．

(3) $x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が有界ならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{e^x}\,dx$ は収束することを証明せよ．

(岡山大 2011) (m20114002)

0.463 $|x|\neq 1$ なる実数 x に対して

$$f(x) = \int_0^\pi \log(1-2x\cos t + x^2)dt$$

で関数 $f(x)$ を定義する．次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=f(-x)$ を示せ．

(2) $f(x)+f(-x)=f(x^2)$ を示せ．

(3) $x\neq 0$ のとき，$f(x)=2\pi\log|x| + f(\frac{1}{x})$ を示せ．

(4) $|x|<1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(5) $|x|>1$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

(岡山大 2012) (m20124002)

0.464 開区間 $(-1,1)$ 上で定義されたなめらかな関数 $f(x)$ を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\displaystyle\int_0^x (x-t)f''(t)dt$ を示せ．

(2) $f(x)=(1+x)^{1/3}$ のとき，

$$\left|\int_0^x (x-t)f''(t)dt\right| \leqq \frac{x^2}{9} \qquad (x \geqq\ 0)$$

が成り立つことを示せ．

(3) $7^3=343$ に注意して，$(345)^{1/3}$ の値を小数第 3 位まで求めよ．

(岡山大 2015)　　(m20154001)

0.465 初期値 $F_1=1,\ F_2=1$ と漸化式 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフイボナッチ数列という．例えば，$F_3=F_2+F_1=2,\ F_4=F_3+F_2=3$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) F_6 を求めよ．また，行列式

$$\det\begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ．

(2) $n \geqq 1$ に対して，2 次の正方行列 A_n を

$$A_n=\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det A_n=(-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

(3) $n \geqq 1$ に対して，3 次の正方行列 B_n を

$$B_n=\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det B_n=0$ が成り立つことを示せ．

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき，$n \geqq 1$ に対して，$\det \tilde{B}_n=0$ が成り立つことを示せ．

(岡山大 2017)　　(m20174003)

0.466 三角形 OAB において，ベクトルを $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$ と定義し，$\angle OAB=\alpha$ とする．ベクトルの内積を用いて，三角形の 2 辺の長さの和は他の 1 辺より長くなることを示せ．

(広島大 2001)　　(m20014107)

0.467 (1) 関数 $F(x,y)$ は連続かつ $x,\,y$ に関して偏微分可能で, さらに, 各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ が連続であるとする．関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする．このとき, 関数 $G(t)=F\big(f(t),\ g(t)\big)$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f, g の導関数を用いて表せ. ただし, 公式の証明を行う必要はない.

(2) 2 変数関数 $F(x,y)=x^2+xy+y^3-1$ に対して, $x=1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y=g(x)$ で

$$g(1)=0\ , \qquad F\big(x,g(x)\big)\equiv 0$$

をみたすものがあるとする. このとき $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ を求めよ.

(広島大 2005)　　(m20054103)

0.468 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ.

(3) 零ベクトルではないベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次のように帰納的に $\boldsymbol{x}_n$ を定義する.

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \frac{1}{||A\boldsymbol{x}_n||} A\boldsymbol{x}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき, $\boldsymbol{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば, $\boldsymbol{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ. ただし, $||\cdot||$ は, ベクトルの大きさを表すものとする.

(広島大 2005) (m20054105)

0.469 $p > 0$ を定数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 f を， $f(x) = \begin{cases} x^p \sin \dfrac{1}{x^2} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ で定義する．

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(2) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ．

(3) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ．

(広島大 2006) (m20064101)

0.470 実数を成分とする 3 次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする．また，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線形写像 $f : V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する．

(1) 線形写像 f に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値を求めよ．

(2) 線形写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^t\!X$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ．

(3) 線形写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ．

(広島大 2008) (m20084105)

0.471 関数 $f(x) = \tanh x$ を考える．ただし，$\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減表とグラフを書き，定義域と値域を求めよ．

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．また，その定義域と値域も書け．

(広島大 2009) (m20094103)

0.472 2 次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,({}^t\!AB)\,,$$

とおく．ただし，${}^t\!A$ は A の転置行列とし，$\mathrm{tr}\,C$ は行列 C のトレースとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) (A, B) は内積であることを示せ．

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,,\quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき，(A, B) を求め，さらに A と B のなす角 θ を求めよ．

ただし，$0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする．

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f\ :\ V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)\ \ (X \in V)$ で定義する．このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を 1 組求めよ．

(広島大 2009)　　(m20094104)

0.473 2 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す．一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する．

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ．

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ．

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ． また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ．$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと．

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{x}$, $T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ．

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ．

(広島大 2014)　　(m20144107)

0.474 $2\times\ 2$ 行列 A は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と 固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする．また，$2\times\ 2$ 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $2\times\ 2$ 行列 P で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ．（答だけで良い.）

(2) 行列 A を求めよ．

(3) $2\times\ 2$ 行列 X で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ．

(4) $2\times\ 2$ 行列 Y で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか．また，そのような Y をひとつ見つけよ．

(5) $2\times\ 2$ 行列 Z で $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ．

(広島大 2015)　　(m20154101)

0.475 $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える．以下の問いに答えよ．

(1) f の像および核の次元を求めよ．

(2) $a = 0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ．

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(広島大 2015) (m20154103)

0.476 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5} \leq a_n \leq 1$ を示せ．

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする．級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束することを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ．

(広島大 2015) (m20154104)

0.477 実行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする．ただし，$a_n,\ b_n,\ c_n$ は実数である．このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\},\ \{b_n\},\ \{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ．ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{||\boldsymbol{v}_n||\}$ が有界であることと定義する．

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \{A^n\boldsymbol{w} \mid n = 1, 2, 3, \cdots\} \text{ は有界} \right\}$ とおく．W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ．

(広島大 2016) (m20164105)

0.478 実数 x に対し，

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \tanh x$ のグラフを描け．増減表を書き，変曲点があればすべて求めること．

(2) $|f(x)| \leq \dfrac{4}{5}$ を満たす x からなる区間を求めよ．

(3) $f''(x) + 2f(x)\left(1 - f(x)^2\right) = 0$ が成り立つことを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174102)

0.479 行列 A，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし，写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(\boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) \cdot (A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

ただし，$\cdot$ はベクトルの内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) A の階数を求めよ．

(2) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を求めよ．

(3) A の固有値 0 に対する固有ベクトルを一つ求めよ．

(4) $f(\boldsymbol{x})$ の最小値を与える $\boldsymbol{x}$ の中で最も原点に近い $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

(広島大 2017)　　(m20174103)

0.480 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots$ を零ベクトルでない k 次元実列ベクトルとし，k 次実対称行列 M_n $(n = 1, 2, \cdots)$ を

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i {}^t\boldsymbol{a}_i$$

で定義する．ここで，^{t} は転置を表す記号である．以下の問いに答えよ．ただし，任意の実対称行列は直交行列により対角化可能であることは用いてよい．

(1) α_n を行列 M_n の $(1, 1)$ 成分とする．数列 $\{\alpha_n\}$ が広義の単調増加列，すなわち，
$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$ となることを示せ．

(2) M_n の固有値はすべて非負の実数であることを示せ．

(3) λ_n を M_n の最小固有値とする．$S = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k \mid {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = 1 \right\}$ に対し，

$$\min_{x \in S} {}^t\boldsymbol{x} M_n \boldsymbol{x} = \lambda_n$$

を示せ．

(4) (3) で定義した λ_n に対して，数列 $\{\lambda_n\}$ が広義の単調増加列となることを示せ．

(5) (1) で定義した α_n と (3) で定義した λ_n に対して，$\{\alpha_n\}$ が上に有界であれば，$\{\lambda_n\}$ は収束することを示せ．

(広島大 2017)　　(m20174105)

0.481 A を行数 m，列数 n の行列とし，B を行数 s，列数 t の行列とする．以下の条件を満たすときの m, n, s, t の関係をそれぞれ答えよ．

(1) 積 AB が定義可能である．

(2) 積 AB および BA が定義可能であり，等式 $AB = BA$ が成り立つ．

(広島市立大 2002)　　(m20024205)

0.482 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする．

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t \, dt$$

(1) $I_0(x),\ I_1(x),\ I_2(x),\ I_3(x)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて，n が 2 以上のとき，$I_n(x)$ の漸化式を求めよ．

(広島市立大 2007)　　(m20074202)

0.483 2 次以下の実数係数多項式全体からなる線形空間 V において，

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (f,g \in V)$$

により内積を定義する．ことのき，グラム_シュミットの直交化により，V の基底 $\{1,x,x^2\}$ から正規直交基底を求めよ．

(広島市立大 2008)　　(m20084204)

0.484 双曲線関数 $\sinh(x), \cosh(x)$ および $\tanh(x)$ は次のように定義される．

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

(1) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$ を証明しなさい．

(2) $y = \tanh(x)$ のグラフを描きなさい．

(山口大 2001)　　(m20014308)

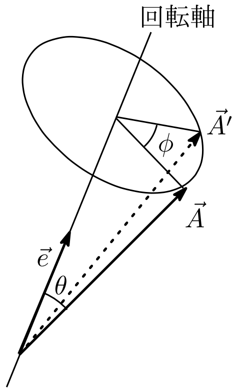
0.485 微分とは, 導関数を求めることをいう. 導関数とは, 関数 $f(x)$ における微分係数を, x の関数で表した関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ のことをいう. 微分係数とは, x から $x + \Delta x$ の区間における関数 $f(x)$ の平均変化率において，$\Delta x \to 0$ の極限を取った値をいう. そのような<u>定義に従って</u>

(1) $y = x^2$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ となることを示しなさい.

(2) $y = \sqrt{x+1}$ を x について微分すると, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ となることを示しなさい.

(山口大 2005)　　(m20054307)

0.486 右図のように，ベクトル $\vec{A}$ をその始点を通る回転軸のまわりに回転させたら $\vec{A}'$ になった．回転軸の方向を表す単位ベクトルを $\vec{e}$ とする．回転角 ϕ（単位はラジアン）が 1 に比べて十分小さい場合について，ベクトルの変化 $\Delta\vec{A} = \vec{A}' - \vec{A}$ とベクトル積 $\vec{e}\times\vec{A}$ の関係を説明しなさい.
（結果だけでなく，ベクトル積の定義に基づいてわかりやすく説明しなさい.）

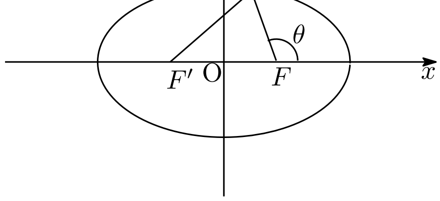


(山口大 2006)　　(m20064307)

0.487 焦点を F, F' とする楕円は，二つの線分 PF と PF' の長さの和が一定である点 P が作る曲線と定義される．今，$PF + PF' = 2a$ とし，点 $F,\ F'$ の座標を $(ae, 0),\ (-ae, 0)$ として以下の問いに答えなさい.（e はいわゆる離心率）.

(1) この楕円の方程式を直交座標 x, y を用いて表しなさい.

(2) 線分 PF が x 軸となす角を θ，PF 間の距離を r として，この楕円の方程式を極座標で表しなさい.



(3) 楕円上の点で，点 F と最も近い点 P の座標を求めなさい.

(山口大 2006)　　(m20064308)

0.488 (1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$,　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx$　（ n : 整数）をそれぞれ求めなさい.

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$　$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$　（n,m : 正整数）をそれぞれ求めなさい.

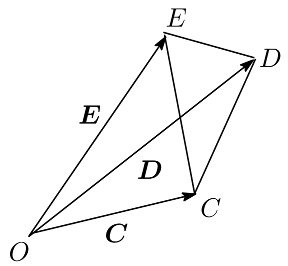
(3) 周期 2π をもち，$f(x)=\begin{cases}-\pi/4 & (-\pi<x<0\text{ のとき}) \\ \pi/4 & (0<x<\pi\text{のとき})\end{cases}$ で定義される関数をフーリエ級数に展開しなさい.

(山口大 2007)　　(m20074301)

0.489 ベクトルに関する以下の問いに答えなさい.

(1) x,y,z の成分で表した 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}=(4,5,6)$ と $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$ について，$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行なベクトル $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直なベクトル $\boldsymbol{A}_{\perp}$ に分解する. $\boldsymbol{A}_{\parallel}$ と $\boldsymbol{A}_{\perp}$ それぞれの x,y,z 成分を求めなさい.

(2) 右図のように原点を O にとり，三角形 CDE の頂点の位置ベクトルを $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ とする. ただし，$\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ は同一平面上にはない.



(a) 三角形 CDE を通る無限に広い平面上の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ を用いて表しなさい. ただし，必要な変数は自分で定義しなさい.

(b) 三角形 CDE の面積 S が

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{C}\times\ \boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}\times\ \boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}\times\ \boldsymbol{C}|$$

と表せることを示しなさい.

(山口大 2008)　　(m20084302)

0.490 実数 x の関数 $\varphi(x)$ および $\varphi_N(x)$ を

$$\varphi(x)=e^{-x^2},\quad \varphi_N(x)=N_{\varphi}(Nx)\qquad(N=1,2,3,\cdots)$$

で定義する. 実係数の多項式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ が与えられたものとして，次の各問いに答えなさい.

(1) 極限　$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x)p(x)dx$　の値を求めなさい.

(2) 実数 c に対して，極限　$\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_N(x-c)p(x)dx$　の値を求めなさい.

なお，解答に必要なら　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\sqrt{\pi}$　を用いてもよい.

（高知大 2001）　　(m20014501)

0.491 $f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上の連続関数とする. I 上に $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n$ を

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

となるように選び, I の分割と呼び Δ で表す. また

$$|\Delta|=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$$

とする. さらに $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす ξ_i をとり, $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ をこの分割の代表系と呼び, $\xi(\Delta)$ で表す. このとき

$$S\left(f, \xi(\Delta)\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

を分割 Δ とその代表系 $\xi(\Delta)$ に関するリーマン和と呼ぶ. 任意の分割の列と任意の代表系に対して

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S\left(f, \xi(\Delta)\right)$$

が一意に存在する. その極限 S を $f(x)$ の I における積分といい

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

とかく. この定義を用いて次の問に答えよ. ただし, 以下において $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正値連続な関数とし

$$f_{in} = f(a + i\delta_n)\,, \qquad \delta_n = \frac{b-a}{n}$$

とする.

(1) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{1n} + f_{2n} + \cdots f_{nn}}{n} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(2) 次の式を示せ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{f_{1n} f_{2n} \cdots f_{nn}} = \boldsymbol{e}^{\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(x)dx}$$

(3) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)}$$

(高知大 2005)　　(m20054501)

0.492 I_n を $n \times\ n$ 単位行列とする．また，$a \in \boldsymbol{R}^n$ を長さ 1 の n 次元行ベクトルとする．任意の $x \in \boldsymbol{R}$ に対して，行列 $A(x)$ と関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$A(x) = I_n + x({}^t a a)\,, \quad f(x) = \det A(x)$$

ただし，${}^t a$ は a の転置ベクトルであり，$\det A(x)$ は $A(x)$ の行列式である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(0) = 1$ を示せ.

(2) $aA(-1) = 0$ であり，ゆえに $f(-1) = 0$ となることを示せ.

(3) $f(x)$ は x の多項式であり，その次数 m は $1 \leq m \leq n$ を満たすことを示せ.

(4) 任意の $x, y \in \boldsymbol{R}$ に対して，$f(x)f(y) = f(x + y + xy)$ となることを示せ.

(5) $f(x) = (1 + x)^m$ を示せ.

(6) $m = 1$，すなわち $f(x) = 1 + x$ となることを示せ.

(高知大 2006)　　(m20064503)

0.493 実数を成分とする $2 \times\ 2$ 行列全体の集合を V とする．さらに V から $\boldsymbol{R}$ への写像 f_1 と f_2 を次のように定義する．V の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$f_1(M) = ad - bc \qquad\qquad f_2(M) = a + d$$

このとき，f_1 と f_2 が線形写像であるか否かを調べよ．線形写像である場合には，その核の一組の基底を求めよ．ただし，V と $\boldsymbol{R}$ はそれぞれ $\boldsymbol{R}$ 上の自然なベクトル空間とし，線形写像の核が V の部分空間になることは証明しなくてもよい．

(高知大 2006)　　(m20064504)

0.494 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続であるとは

『任意の正の数 ε に対し，正の数 δ で $|x - x_0| < \delta$ であるならば $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ をみたすものがとれる』$\cdots$ (★)

ときをいう．このとき，次の問いに答えよ．

まず $f(x) = x^2$ として，(1) と (2) に答えよ．

(1) $x_0 = 0,\ \varepsilon = \dfrac{1}{100}$ としたときに (★) が成立する δ を求めよ．

(2) $x_0 = 0$ とし，任意の $\varepsilon > 0$ に対して (★) が成立する δ を求めることにより，$f(x) = x^2$ が $x = 0$ で連続であることを示せ．

次に

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & (x \text{ が } 0 \text{ でない有理数で, その既約分数表示が } m > 0 \text{ として } \dfrac{n}{m} \text{ と表せるとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき, または } x \text{ が無理数のとき}) \end{cases}$$

と定義された関数について，以下の (3)〜(5) に答えよ．

(3) 次の値を求めよ．

(a) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$　　(b) $f\left(\sqrt{2}\right)$　　(c) $f\left(\dfrac{4}{8}\right)$

(4) M を自然数とする．$|x| < \dfrac{1}{M}$ をみたす有理数 x $(x \neq 0)$ の既約分数表示の分母を m とすれば $|m| > M$ となることを示せ．

(5) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となることを示せ．

(高知大 2007)　　(m20074502)

0.495 $\alpha > 0$ のとき，広義積分 $f(t) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{t-1} dx$ は $t > 0$ に対して定義される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) $t > 0$ に対して，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} x^t = 0$ を示せ．

(3) $t > 0$ に対して，$\alpha f(t+1) = t f(t)$ が成り立つことを示せ．

(4) 正の整数 n に対して，$f(n+1)$ を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074503)

0.496 $M_3(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 3 次正方行列全体のなす集合とし，$A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．また，

$$\mathfrak{L}_A = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid B \neq O,\ AB = O\}$$

$$\mathfrak{R}_A = \{C \in M_3(\mathbb{R}) \mid C \neq O,\ CA = O\}$$

と定義する．ただし，O は 3 次零行列を表す．今，$\mathfrak{L}_A$ は空集合でないと仮定する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) A は正則でないことを示せ．

さらに，$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 6-a \\ a+12 & 7 & 2 \\ 8 & -a & -2 \end{pmatrix}$ としたときに，次の (2)〜(4) に答えよ，

(2) a の値を求めよ．

(3) $P \in \mathfrak{L}_A$ となる 3 次正方行列 P をひとつ与えよ．

(4) $\mathfrak{R}_A = \{{}^tQ \mid Q \in \mathfrak{L}_A\}$ を示せ．ただし，${}^tQ$ は Q の転置行列を表す．

(高知大 2007)　　(m20074504)

0.497 実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす集合 $M_2(\mathbb{R})$ は行列の和，行列の実数倍をそれぞれ，線形和，スカラー倍とみなすと実ベクトル空間になる．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ．

(2) $\mathrm{tr} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + d$ で定義するとき，tr は線形写像であることを示せ．

(3) $\mathrm{Ker\ tr} = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ は $M_2(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(4) Ker tr の次元を求めよ．

(高知大 2007)　　(m20074505)

0.498 微分可能な関数 $f(x)$ の $x = a$ での微分係数 $f'(a)$ は次で定義される．

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = \sin x$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ．

(2) 同様に，$f(x) = x^n$ の $x = a$ での微分係数を上の定義に基づいて求めよ．ただし，n は正の整数である．

(高知大 2008)　　(m20084501)

0.499 $\det(A)$, $\mathrm{rank}(A)$ はそれぞれ行列 A の行列式，階数を表す．次の問いに答えよ．

(1) 3 次正方行列 A と 3 次単位行列 I を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，$\det(\lambda I - A) = 0$ を満たす λ をすべて求めよ．

(2) (1) で求めたそれぞれの λ について，$\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ を求めよ．

(3) A を n 次正方行列，I を n 次単位行列とし，$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ とおく．λ_0 が方程式 $f(\lambda) = 0$ の単根であるとき，$\mathrm{rank}(\lambda_0 I - A) = n - 1$ であることを示せ．

(高知大 2008)　　(m20084503)

0.500 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する．

① $a_1 = 1$

② n が素数のときは $a_n = n$

③ $n \geq 2$ が素数でないときは $a_n = \dfrac{1}{m}$, ただし, m は n の 2 以上の約数の中で最小のものとする．

このとき, 次の問いに答えよ．

(1) 初項から第 10 項までを求めよ.

(2) $\dfrac{1}{2}$ に収束する部分列をひとつ求めよ.

(3) 0 に収束する部分列をひとつ求めよ.

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束しないことを示せ.

(高知大 2010)　　(m20104501)

0.501 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定義する.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2x\,,\ x \leq 2y\,,\ x + y \leq 3\}$$

D における重積分

$$\iint_D x\,dxdy \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

について, 次の問いに答えよ.

(1) 累次積分を用いて①の値を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への変換 Φ を

$$u = \varphi(x, y) = \frac{2x - y}{3}\,, \qquad v = \psi(x, y) = \frac{-x + 2y}{3}$$

としたときに $\Phi(x, y) = (\varphi(x, y),\ \psi(x, y))$ で定義する. xy 平面上の集合 D を変換 Φ によりうつした uv 平面上の像 D' を図示せよ.

(3) (2) の変換 Φ を用いて①を

$$\iint_{D'} f(u, v)\,dudv$$

と表したときの f を求めよ.

(4) (3) の重積分の値を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104502)

0.502 x を変数とする高々二次の多項式全体から集合を

$$P = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\}$$

とする. P の元 $f(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ と $g(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ に対して加法 $f + g$ と定数倍 λf を次のように定義する.

① $(f + g)(x) = (b_2 + c_2)x^2 + (b_1 + c_1)x + (b_0 + c_0)$

② $(\lambda f)(x) = \lambda b_2x^2 + \lambda b_1x + \lambda b_0$

これにより P は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) P の元 x と x^2 は P において一次独立であることを示せ.

(2) P の元 $1,\ x,\ x^2$ は P の基底となることを示せ.

(3) P の任意の元 f に対して, 写像 $\varphi : P \to P$ を次で定義する.

$$\varphi(f)(x) = xf'(x)$$

ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数を表す. このとき φ は線形写像となることを示せ.

(4) φ の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ と φ の像 $\mathrm{Im}(\varphi)$ を求めよ.

(高知大 2010)　　(m20104503) ,

0.503 3× 3 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 次の関数式を満たす直交行列 T をひとつ求めよ.

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) α と β を定数とし, 3× 3 行列 B を次で定義する.

$$B = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

このとき, B と B^2 を計算せよ.

(4) $C^2 = A$ を満たす行列 C をひとつ求めよ.

(高知大 2010) (m20104504)

0.504 実数直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることを示せ.

(2) $x \neq 0$ のとき, $f(x)$ の 1 階導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ. また, $f'(0)$ を求めよ.

(4) $f'(x)$ が $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(高知大 2012) (m20124501)

0.505 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $x \neq 0$ のとき, $f'(x)$ を求めよ.

(2) 任意の実数 x に対して, $|f(x)| \leqq x^2$ であることを示せ.

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能かどうかを理由を挙げて答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} xf'(x)$ を求めよ.

(高知大 2014)　　(m20144501)

0.506 平面内のある領域で定義された C^1 級の 2 変数関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

を満たすとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすという．次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $g(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\big((x,y)\neq(0,0)\big)$ のとき，(f,g) はコーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(2) $f(x,y)=x^2-y^2$ のとき，(f,g) がコーシー・リーマンの関係式を満たすような x,y の多項式 $g(x,y)$ の例をひとつあげよ．

(3) 一般に (f,g) および (h,k) がコーシー・リーマンの関係式を満たすとき

$$p(x,y)=h\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

$$q(x,y)=k\big(f(x,y),\ g(x,y)\big)$$

とおくと，(p,q) も（これらの合成関数が意味ある範囲で）コーシー・リーマンの関係式を満たすことを示せ．

(高知大 2015)　　(m20154502)

0.507 $a_1=1$ および $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{1}{2}\leqq a_n\leqq 1$ であることを示せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|\leqq\dfrac{4}{9}\left|a_{n+1}-a_n\right|$ であることを示せ．

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列であることを示せ．また，その極限値を求めよ．

(高知大 2016)　　(m20164501)

0.508 $f(x)$ は開区間 $(-1,1)$ 上で連続な正値関数で，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx=1$$

を満たすとする．さらに，正の整数 n ごとに実数直線 $\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x)=\begin{cases} nf(nx) & \left(x\in\left(-\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)\text{のとき}\right)\\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

で与える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，ε を正の数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された連続関数 $g(x)$ が閉区間 $\left[-\dfrac{1}{N},\ \dfrac{1}{N}\right]$ 上で $\Big|g(x)\Big|<\varepsilon$ を満たせば，$n>N$ を満たす任意の整数 n に対して，

$$-\varepsilon\leqq\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx\leqq\varepsilon$$

であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上で定義された任意の連続関数 $h(x)$ に対して，$a_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)h(x)dx$ とおく．

このとき，$g(x) = h(x) - h(0)$ に対して (2) の結果を利用することにより，
数列 $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $h(0)$ に収束することを示せ．

(高知大 2016)　　(m20164502)

0.509 $\mathbb{R}^2$ の領域 D_1，D_2 を

$$D_1 = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 < x < 1 \text{ かつ } x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1 \text{ かつ } |y| < 1\}$$

により定義する．次の問いに答えよ．

(1) D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が $x^2 + y^2$ のみに依存するとき，すなわち，

$$f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

が任意の $(x, y) \in D_1$ に対して成り立つような一変数関数 h が存在するとき，D_1 上で

$$(*) \qquad y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 逆に，D_1 上の C^1 級関数 $f(x, y)$ が D_1 上で $(*)$ を満たすとき，f は $x^2 + y^2$ のみに依存する関数であることを示せ．

(3) D_2 上の関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2 & (x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } y > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定義する．g は $(*)$ の f を g で置き換えた方程式を D_2 上で満たすことを示せ．

(4) 小問 (1)，(2) の D_1 を D_2 に置き換えると，それぞれ正しいと言えるだろうか．理由を挙げて述べよ．

(高知大 2017)　　(m20174503)

0.510 (1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f を次で定義する．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在するか．理由をつけて答えよ．

(2) a，A，$B \in \mathbb{R}$ を定数とする．g，h を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする． $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．また，$x \neq a$ のとき, $g(x) \neq A$ であるとする． このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x)) = B$ が成り立つことを $\varepsilon - \delta$ 論法を用いて示せ．

(3) a，A，$B \in \mathbb{R}$ を定数とする．g，h を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数とする．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = A$ と $\displaystyle\lim_{x \to A} h(x) = B$ が成り立つとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} h(g(x) = B$ が常に成り立つか．理由をつけて答えよ．

(高知大 2018)　　(m20184501)

0.511 ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の内積を，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ を通常の内積ではなく，この内積に関する計量ベクトル空間とみなすとき，次の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ が正規直交系であるならば．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であることを示せ．

(2) $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は一次独立であるが，正規直交系ではないことを示せ．

(3) (2) の $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ をシュミットの直交化法を用いて直交化せよ．

(高知大 2018)　　(m20184503)

0.512 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $f(x,y)$ が与えられているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y) = a(y - \sin x)$ と表されるとする．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ をそれぞれ求め，

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (\cos x)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを確かめよ．

(2) $u = y - \sin x,\ v = x$ とおく．この変換のもとで，$u,\ v$ の関数 $g(u,v)$ を $g(u,v) = f(x,y)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial g}{\partial u}$ および $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ．

(3) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたすとする．このとき，$f(x,y)$ は $y - \sin x$ のみの関数であること，つまりある 1 変数関数 $a(t)$ を用いて $f(x,y) = a(y - \sin x)$ と表されることを示せ．

(4) $f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ 上 $(*)$ をみたし，かつ $f(0,y) = y^2$ がすべての実数 y について成り立つとき，$f(x,y)$ を求めよ．

(高知大 2019)　　(m20194502)

0.513 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が定数で，$f(x)$ が微分可能のとき，$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha) f\left(\dfrac{s-\beta}{t-\alpha}\right)$ によって定義される関数 $g(s,t)$ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$g(s,t) = \gamma + (t-\alpha)\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) + (s-\beta)\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)$$

(愛媛大 2004)　　(m20044605)

0.514 (1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{R}^3$ の 1 次独立なベクトルであるとき　$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$，　$2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$，　$\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{a}$　は 1 次独立か？

(2) 次式で定義される W, U は $\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間か？
部分ベクトル空間であれば次元と基底を求め，そうでないときはその理由を述べよ．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \quad \middle| \quad x + 2y - z = 0 \right\},\ U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \quad \middle| \quad x + y = 0,\ z = 1 \right\}$$

(愛媛大 2006)　　(m20064612)

0.515 $x > -1$ で定義された関数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ．

(1) $f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の $x = 0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ．ただし，3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け．

(3) (2) の結果を利用して，$(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ．

(愛媛大 2007)　　(m20074610)

0.516 $(x,y) \neq (0,0)$ で定義された関数 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.　　　　(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を計算せよ.

(愛媛大 2007)　　(m20074611)

0.517 (1) 次の曲線上の与えられた点 (a,b) における接線の方程式を求めよ.

(a) $y = x\log x$,　$(a,b)=(e,e)$　　　(b) $y=\dfrac{e^{2x}-e^{-x}}{e^{3x}+e^{-2x}}$,　$(a,b)=(0,0)$

(2) 次の極限値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}-2}$　　(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}$　ただし, $\tan^{-1}x$ の値域は $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする.

(3) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義を述べよ. さらに, $f(x)=c$（定数関数）ならば $f'(x)=0$ であることを定義に従って示せ.

(愛媛大 2010)　　(m20104601)

0.518 (1) 次で定義される関数 $f(x,y)$ の原点 $(0,0)$ での連続性を調べよ.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(2) C^1 級の関数 $f(x,y)$ は

$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

を満たすとする. このとき, $z=f(x,y)$ と $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ は r だけの関数であることを示せ.

(3) 連続関数 $f(x)$ について, 次の等式を示せ.

$$\int_0^x dy\int_0^y dz\int_0^z f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$$

(愛媛大 2016)　　(m20164603)

0.519 $P_n(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$,　$-1\leq x\leq 1$,　$n=0,1,2,3,\cdots$　と定義する. このとき次の問に答えよ.

(1) $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を計算して求めよ.

(2) 任意の $0\leq k\leq n$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1}x^kP_{n+1}(x)\,dx=0$ を示せ.

(3) 任意の n 次多項式 $Q(x)$ について $\displaystyle\int_{-1}^{1}Q(x)P_{n+1}(x)\,dx=0$ を示せ.

(4) $P_n(1)$ の値を計算せよ.

(九州大 1997)　　(m19974701)

線形写像　$T:R^4\to R^2$　について

$$\mathrm{Ker}\ T=\{\ x\in R^4\mid T(x)=0\ \}$$

$$\mathrm{Im}\ T=\{\ T(x)\mid x\in R^4\ \}$$

と定義する. T が条件

$$\mathrm{Ker}\ T=\left\{\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ x_1+2x_3=x_2-x_4=0\ \right\}$$

$$\mathrm{Im}\ T = R^2$$

を満足するとき，次の問に答えよ．

0.520 (1) Ker T の基底を 1 組求めよ．

(2) 上で求めた Ker T の基底を含む R^4 の基底を 1 組求めよ．

(3) $T(x) = Ax$ となる 2 行 4 列の行列 A を一個求めよ．

(4) 上の A について rank A を求めよ．

(九州大 1997） (m19974705)

0.521 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ は 2 回偏微分可能な関数とし，$f_y \neq 0$ となる点の近くで $f(x, y) = 0$ により定義される関数を $y = \varphi(x)$ とする．そのとき，

(a) $\varphi'(x)$ を f_x, f_y を用いて表せ．

(b) $\varphi'(x) = 0$ となる点での $\varphi''(x)$ を f の 2 階までの偏微分を用いて表せ．

(2) 曲線 $C : f(x, y) = xy + y^2 - x^3 = 0$ 上の $f_y \neq 0$ なる部分における関数 y の極値を求め，極大か極小かを判定せよ．

(九州大 1998) (m19984703)

0.522 $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ として，次の各設問に答えよ．

(1) xyz 空間で $z = f(x, y)$ で定義される曲面の点 (a, b, c)，$c = f(a, b)$, における接平面の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ．

(九州大 2003) (m20034702)

0.523 次の問に答えよ．

(1) 行列 A の階数の定義について，以下の下線部に適切な単語を記入せよ．

(a) A の 0 でない小行列式の _________.

(b) A の _________ な列ベクトルのの最大個数.

(c) A の _________ な行ベクトルのの最大個数.

(d) A で定まる線形変換の値域の _________.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ．

(3) 次の連立方程式に解があれば，そのすべてを求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

(九州大 2003) (m20034706)

0.524 (1) 区間 $[0, 1]$ で定義された関数 g の積分（区分求積法）の定義を述べよ．

(2) 関数 $g(x) = x^3$ を区間 $[0, 1]$ で, 上で与えられた定義に従って, 積分した値を求めよ．

(九州大 2005) (m20054708)

0.525 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を n 個のベクトル，$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立（線形独立）であるということの定義を書きなさい．

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ が一次独立であると仮定し，$\boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ とおく，このとき，$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ が一次独立であるための必要十分条件は A が正則行列であることを示しなさい．

(3) 4つの一次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ と4次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

を用い (2) のように $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4$ を定める．これらが一次従属となる a の値を求めなさい．

(九州大 2006)　　(m20064707)

0.526 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で定義された二つの関数

$$f(x) = -\log(\cos x)\,, \quad g(x) = \log\left(\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right)$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $\cos x$ を用いて表せ．

(2) 曲線 $y = f(x) \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3})$ の長さを求めよ．

(九州大 2006)　　(m20064712)

0.527 (1) 区間 $I = (0, 1)$ で定義された微分可能な非負関数 $g(x)$ が区間 I で $f(x) = e^{-x^2}$ に対して $f(g(x)) = x$ を満たすとき，区間 I において，$g(x)$ および導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) 次の広義積分の値を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{xg'(x)}$

ただし，　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$　を用いてよい．

(九州大 2008)　　(m20084717)

0.528 行列 V_2, V_3, V_4 を次のように定義する：

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

(1) V_2, V_3, V_4 の行列式を求めよ．

(2) V_2, V_3, V_4 の逆行列が存在する条件を述べ，その条件下で逆行列を求めよ．

(九州大 2009)　　(m20094709)

0.529 一般に, n 次正方行列 A の (i, j) 成分を $a_{ij} (i = 1, 2, \cdots, n\ ;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ とするとき, A のトレース : $tr[A]$ を, $tr[A] = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ によって定義する. また, ${}^tA$ は A の転置行列を表すとする. このとき, 次の各問いに答えよ.

(1) 3次正方行列 B の (i, j) 成分を $b_{ij} (i = 1, 2, 3\ ;\ j = 1, 2, 3)$ とする. このとき, ${}^tB$ と B の積 : ${}^tBB$ の (i, j) 成分を, B の成分で表せ.

(2) 成分がすべて実数である3次正方行列 B に対して, $tr[{}^tBB] = 0$ ならば $B = O$ であることを示せ. ただし, O は零行列を表す.

(3) 成分がすべて実数である 3 次正方行列 C に対して，「${}^tC = C$ かつ $tr[C^4] = 0$」ならば $C = O$ であることを示せ.

(九州大 2010)　　(m20104712)

0.530 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \left(-\pi \leqq x < -\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 & \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq x < \dfrac{3\pi}{4}\right) \\ -1 & \left(\dfrac{3\pi}{4} \leqq x < \pi\right) \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) 関数 $f(t)$ のフーリエ変換を $F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ で定義する．次式で定義される関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．また，関数 $y = F(\omega)$ のグラフの概形を描け．なお，T は正の実数とする.

$$f(t) = \begin{cases} a & (|t| \leqq T) \\ 0 & (|t| > T) \end{cases}$$

(3) 関数 $f(t)$ は $t > 0$ で定義されているものとし，$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ で定義するとき，以下の問いに答えよ.

(a) $f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(b) $f(t) = \cos\omega t$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ であることを示せ.

(c) $f(t) = a + bt$ のラプラス変換が $F(s) = \dfrac{as+b}{s^2}$ であることを示せ.

(九州大 2012)　　(m20124704)

0.531 (1) 次の周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leqq x < \pi)\,, \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ であることを示せ.

(3) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とする．以下の問いに答えよ.

(a) a を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{at}](s)$ を求めよ．また，$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = F(s-a)$ を示せ.

(b) $\dfrac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$ が成り立つことを示せ．また，これを用いて $F(s) = \log\left(\dfrac{s+1}{s}\right)$ のラプラス逆変換を求めよ.

(九州大 2014)　　(m20144703)

0.532 C を区間 $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された媒介変数方程式 $x(t) = e^t \sin t,\ y(t) = e^t \cos t$ で表される xy 平面上の曲面とする.

(1) 導関数 $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dy}{dx}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 曲線 C の増減を調べ，xy 平面上にグラフをかけ．ただし，$e^{\frac{\pi}{4}} \fallingdotseq 2.19$ である.

(3) 曲線 C の x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

(九州大 2015)　　(m20154703)

0.533 a を実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の行列式を求めよ．

(2) A の行列式が 0（ゼロ）となるような a の値をすべて求めよ．

(3) 前問 (2) の解のうちの最小値を a_0 とおく．（ 前問 (2) の解がただ一つの場合は，それを a_0 とおく．） $a = a_0$ の場合に，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2015)　　(m20154706)

0.534 a, b を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\begin{aligned} &\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \,|\, x+y+z=1\} \\ &\text{平面 } S_2 = \{(x,y,z) \,|\, 2x+3y+4z=7\} \\ &\text{平面 } S_3 = \{(x,y,z) \,|\, 4x+6y+az=b\} \end{aligned}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $a = 7$ とし，b は任意の値に固定する．3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点となることを示せ．また，その点を b を用いて表せ．

(2) $a = 8$ とする，このとき，3 つの平面の共通部分 $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が空集合にならないための b に関する条件を求めよ．また，そのとき，この共通部分は「1 点」「直線」「平面」のいずれになるか，理由を述べて答えよ．

(九州大 2015)　　(m20154707)

0.535 a は $a \geqq 0$ なる定数とする．$0 < x \leqq 1$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = x^a \log x$

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ を求めよ．

(2) $0 < x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表を与えよ．さらに，$f(x)$ の最大値および最小値が存在する場合には，それらを求めよ．

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ．　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

(九州大 2015)　　(m20154708)

0.536 a, b, c は $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \frac{cy}{ax^2 + by^2}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ．

(2) $x > 0$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy$$

(3) $y > 0$ なる y を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^\infty f(x,y)\,dx$$

(九州大 2015)　　(m20154709)

0.537 x, y を実数とし，行列 A, B および $\boldsymbol{p}$ を下記のように定義する．

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また，$C = AB({}^tA)$ とする．ここで ${}^tA$ は A の転置行列である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 行列 C の固有値を求めよ．

(3) 行列 C の行列式 $\det(C)$ を求めよ．

(4) $x > 0,\ x^2 + y^2 = 1$ および $\boldsymbol{p}\cdot(C\boldsymbol{p}) = 1$ を満たす x と y を求めよ．

(九州大 2016)　　(m20164701)

0.538 (1) (a) 周期 $2L$ の区分的に連続な関数 $f(x)$ をフーリエ級数で表現した式を示し，そのフーリエ係数を求める式を示せ．

(b) 次の関数 $f(x)$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ のフーリエ級数を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & (-2 \leqq x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 4 - 2x & (0 < x \leqq 2) \end{cases}$$

(2) $t > 0$ で定義された関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ とする．必要ならば下記の表にある関係式を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．また (b) については，$f(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(a) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+1)(s+2)}$

(b) $F(s) = \dfrac{-s+2}{s^2+2s+4}$

表：
$$\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s},\quad \mathfrak{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}\ (n = 1, 2, \cdots),\quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},\quad \mathfrak{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$
$$\mathfrak{L}[\cos\omega t] = \frac{s}{s^2+\omega^2},\ \mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right),\ \mathfrak{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),\ \mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$$

(九州大 2016)　　(m20164703)

0.539 3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく.（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく.）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2016)　　(m20164706)

0.540　a, b は $a > 1,\ b > 0$ なる定数とする．$x \geqq 0$ において関数 $f(x)$ を次の式で定義する．　$f(x) = a^{-bx}$

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ.

(2) 次の積分（広義積分）を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$

(3) 次の積分（広義積分）を求めよ.　$\displaystyle\int_0^\infty a^{-x}\cos x dx$

(九州大 2016)　　(m20164707)

0.541　a, b は $a > 0,\ b > 0$ なる定数とする．$x > 0,\ y > 0$ において 2 変数関数 $f(x, y)$ を次の式で定義する.

$$f(x, y) = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{b}{y}}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $y > 0$ なる y を固定する．このとき，次の積分（広義積分）は収束するか発散するかを理由を示して答えよ．さらに，収束する場合には，積分の値を求めよ

$$f(y) = \int_0^1 f(x, y)dx$$

(九州大 2016)　　(m20164708)

0.542　4 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の行列式を求めよ.

(2) A の逆行列を求めよ.

(九州大 2017)　　(m20174701)

0.543　a は $a > 0$ なる定数とする．xy-平面内の領域 D と，D 上の 2 変数関数 $f(x, y)$ を，次のように定義する.

$$D = \{(x, y) \mid 0 < y < x < a\}$$

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x}$$

このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の x に関する偏導関数および y に関する偏導関数を求めよ.

(2) $0 < x < a$ なる x を固定するとき，次の積分（広義積分）を求めよ．

$$\int_0^x f(x,y)dy$$

(3) 領域 D における $f(x,y)$ の 2 重積分（広義積分）を求めよ．

(九州大 2017)　　(m20174705)

0.544 4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．

(2) A の固有値のうちで最大のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，第 1 成分が 1 であるものを求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184705)

0.545 $a,\ b,\ c,\ r$ を実数として，3 次元空間（$xyz-$ 空間）内の 3 つの平面を次のように定義する．

$$\text{平面 } S_1 = \{(x,y,z) \mid x + 2y + z = a\}$$

$$\text{平面 } S_2 = \{(x,y,z) \mid -2x + y + z = b\}$$

$$\text{平面 } S_3 = \{(x,y,z) \mid 2x + 5y + rz = c\}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) 任意の $a,\ b,\ c$ の値に対して常に 3 つの平面の共通部分 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点となるための r に関する条件を求めよ．

(2) r が前問 (1) の条件を満たさないとする． このとき，以下の (i) と (ii) のそれぞれについて，$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は「空集合」「1 点」「直線」「平面」のいずれになるかを答えよ． 「空集合」となる場合には，その理由を示すこと．それ以外の場合には，集合 ： $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を具体的に求めること．

(i) $a = b = c = 0$ の場合．

(ii) $a = 1,\ b = 2,\ c = 3$ の場合．

(九州大 2018)　　(m20184706)

0.546 $x \geqq 1$ において，関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x) = \sin(\log x)$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $y \geqq 1$ なる y を固定するとき，次の積分を求めよ．

$$g(y) = \int_1^y f(x)dx$$

(2) $1 \leqq y \leqq e^{2\pi}$ における $g(y)$ の最大値および最小値を求めよ．ただし，e は自然対数の底，π は円周率である．

(九州大 2018)　　(m20184707)

0.547　$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \frac{y}{(xy+1)^2(y^2+1)}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　$y > 0$ なる y を固定し，a を任意の正の定数として，

$$g(y,a) = \int_0^a \frac{1}{(xy+1)^2}dx$$

とおく．このとき，$g(y,a)$ を求めよ．

(2)　領域 $D_1 = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 1,\ xy < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(3)　領域 $D_2 = \{(x,y) \mid 0 < x < y < 1\}$ における $f(x,y)$ の 2 重積分を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184708)

0.548　3 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ．

(1)　A の固有値をすべて求めよ．

(2)　A の固有値のうちで最小なものを λ_0 とおく．（固有値がただ一つの場合には，それを λ_0 とおく．）λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件をみたすものを求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194709)

0.549　a を $a \neq 0$ なる実数として，4 次正方行列 A を次のように定義する．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

このとき，A の階数 (rank) を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194710)

0.550　$x > 0,\ y > 0$ において，2 変数関数 $f(x,y)$ および $g(x,y)$ を次の式で定義する．

$$f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)\ , \qquad g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/3}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x,y)$ の x に関する 2 次偏導関数 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$ を求めよ．

(2)　次の等式が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t \to +0} t \log t = 0$$

(3) 領域 $D = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 < x^2 + y^2 < 1,\ 0 < y < x\right\}$ における次の 2 重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{g(x,y)} dxdy$$

(九州大 2019)　　(m20194712)

0.551　周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

で表される．以下の問いに答えよ.

(1) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $g(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$$

(2) 区間 $[-\pi, \pi)$ において次のように定義される周期 2π の関数 $h(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(3) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

(九州大 2021)　　(m20214704)

0.552　3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1)」かつ「第 1 成分は負ではない」という条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2021)　　(m20214705)

0.553　3 次正方行列 A を次のように定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -9 \\ -20 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，以下の各問いに答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A の固有値のうちで最小のものを λ_0 とおく．λ_0 に対応する固有ベクトルで，「ベクトルの長さ（大きさ）は 1 」かつ「第 1 成分は負ではない」と言う条件を満たすものを求めよ.

(九州大 2022)　　(m20224704)

0.554 n を正の整数として以下のように $f(x)$ と G_n を定義する．

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$G_n = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+e^x}dx & for \ \ n=1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{n-1}}{1+\exp(x^n)}dx & for \ \ n=2,3,4,\cdots \end{cases}$$

(1) $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ を求めよ．ただし積分定数を C とせよ．

(2) 定積分 G_1 の値および定積分 G_2 の値を求めよ．

(3) 一般の正の整数 n について，定積分 G_n を求めよ．

(九州大 2022)　　(m20224706)

0.555 次の問に答えよ．ただし，log は自然対数を表す．自然対数の底は $e = 2.718\cdots$ である．

(1) 次の積分（広義積分）の値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

(2) 極限値に関する次の二つの等式が成り立つことを証明せよ．

$$\lim_{x>0,\ x\to 0} x\log x = 0 \quad , \qquad \lim_{x>0,\ x\to 0} x^x = 1$$

(3) 閉区間 $[0,1]$ 上の関数 f,g を次のように定義する．

$$0 < x \leq 1 \text{ のとき } f(x) = x\log x, \quad g(x) = x^x, \quad f(0) = 0, \quad g(0) = 1$$

このとき，f,g の各々について，$[0,1]$ における最大値と最小値を求めよ．

(4) 次の積分（広義積分）は有限値に収束するか，それとも無限大に発散するか，いずれであるか判定せよ．その理由も示せ．

$$\int_0^1 \frac{x^x}{\sqrt{x}}dx$$

（九州芸術工科大 2000 ）　　(m20004802)

0.556 $x > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = x^x$ について，次の問いに答えよ．ただし，計算の際は $x^x = e^{x\log x}$ と変形せよ．また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ は既知としてよい．

(1) 導関数 $f'(x)$ を計算し，$f(x)$ の最小値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの概形を図示せよ．

(佐賀大 2003)　　(m20034904)

0.557 実数を成分とする n 次縦ベクトルのなす線形空間を $\mathbf{R^n}$ とし，$\mathbf{R^4}$ から $\mathbf{R^3}$ への写像 f を

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ 11x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

で定義するとき，次の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{R^4}$ の任意のベクトル x に対して $f(x) = Ax$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) 写像 f が線形写像になることを証明せよ.

(3)
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbf{R^4} \mid f(x) = \mathbf{0}\},$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid \ x \in \mathbf{R^4}\}$$

がそれぞれ $\mathbf{R^4}, \mathbf{R^3}$ の線形部分空間になることを証明せよ．ただし，$\mathbf{0}$ は $\mathbf{R^3}$ の零ベクトルを表す.

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をそれぞれ求めよ.

(佐賀大 2003)　　(m20034932)

0.558 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について以下の問に答えよ.

(1) 導関数 $f'(x)$ の定義を示せ.

(2) 定義に基づいて $f(x) = x^n$ (n : 自然数) の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) $f(x) = x^x$ $(x > 0)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044905)

0.559 R^3 を実の 3 次列ベクトル全体のなすベクトル空間とする．3 次正方実行列 A と 3 次列ベクトル $a \in R^3$ を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とする. さらに, $f\ :\ R^3 \to R^3$ を $f(x) = Ax$ $(x \in R^3)$ で定義された R^3 の線形変換とする.

(1) A^2 および逆行列 A^{-1} を計算せよ.

(2) ベクトル $f(f(\boldsymbol{a}))$ を計算せよ.

(3) $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{a}$ となるベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(4) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ を求めよ.

(5) A の固有値とそれぞれの固有値に属する固有ベクトルを求めよ.

(佐賀大 2004)　　(m20044933)

0.560 次の問に答えよ.

(1) 三角関数の加法定理より

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

を導出せよ.

(2) 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を利用して $(\sin x)' = \cos x$ であることを示せ.

(佐賀大 2005)　　(m20054924)

0.561 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ とする．積 AB, BA が定義できるならば，それを計算せよ．

(佐賀大 2006)　　(m20064919)

0.562 (1) 関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x=0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け．

(2) 微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \,]$ と書くとき，a_0，a_n，b_n を求めよ．

(佐賀大 2007)　　(m20074906)

0.563 $x > 0$ で次の定積分で定義された関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

$$f(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(1) 次の等式を証明せよ．ただし，$x > 1$ とする．

$$f(x) = (x-1) f(x-1)$$

(2) x が自然数 n のとき，次式を示せ．

$$f(n) = (n-1)!$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を示し，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094903)

0.564 (1) 導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を利用して $\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ であることを示せ．

(2) $x = 3\sin t$ として $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ を計算せよ．

(佐賀大 2009)　　(m20094910)

0.565 次式で定義される関数について，以下の問いに答えよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

(1) 偏導関数 f_x，f_y，f_{xy}，f_{yx} を求めよ．

(2) $f(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

(3) $f_x(x,y)$ および $f_y(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で連続であることを示せ．

(4) $f_{xy}(x,y)$ および $f_{yx}(x,y)$ が原点 $(0,0)$ で不連続であることを示せ．

(佐賀大 2016)　　(m20164902)

0.566 xy 平面上の集合 $\left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < R^2\right\}$ で定義された関数 $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ について，下記の問いに答えなさい．ただし，定数 R は $R > 2$ を満たすとする．

(1) $\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ を求めなさい．

(2) 集合 D を $D=\left\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ とし，極座標を利用して，

重積分 $I=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ を求めなさい．

(佐賀大 2018)　(m20184903)

0.567 方程式 $z^5=1$ を満足するすべての z について以下に問いに答えなさい．

(1) 与えられた方程式を満足する z のうち, $z=1$ を除いて偏角が最小のものを $z=\omega$ とする. このとき与えられた方程式のすべての解は $1,\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4$ であることを示しなさい. ただし, 複素数 z の偏角 $\arg z$ は $0\leq \arg z\leq 2\pi$ の範囲で考えることにする．

(2) (1) で定義した ω は

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$$

を満足していることを示しなさい．

（長崎大 2004）　(m20045013)

0.568 $a>0$ の範囲で定義された関数 $f(x)=x+\sqrt{a^2+x^2}$ について以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $\sqrt{a^2+x^2}$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ．

(3) 定積分 $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ を計算せよ．

(4) 定積分 $J=\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2+x^2}dx$ を (3) で求めた I を用いて表せ．

(長崎大 2005)　(m20055003)

0.569 関数 $f(t)$ に関するフーリエ変換を $F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ で定義するとき, 以下の問に答えよ．

(1) $f(t)$ が実数で偶関数の時 $F(\omega)$ が実数になることを証明せよ．

(2) $f(t)$ が $f(t)=\begin{cases}1 & , \quad |t|\leq T\\ 0 & , \quad |t|>T\end{cases}$ 　ただし T は正の実数　で与えられるとき, フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ．

(3) 上で求めたフーリエ変換 $F(\omega)$ を, 横軸を ω，縦軸を $|F(\omega)|$ として図示せよ．

(長崎大 2005)　(m20055007)

0.570 関数

$$f(x)=1-e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

について，以下の問いに答えなさい．ただし，$0\leq x\leq 2\sqrt{3}\pi$ とする．

(1) $\dfrac{df}{dx}=0$ を満足する x の値をすべて求めなさい．

(2) (1) で求めた x に対して，$f(x)$ の値および $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ の値を求めなさい．

(3) $0\leq x\leq 2\sqrt{3}\pi$ における，最初の極大値を y_1，2 番目の極大値を y_2 とし，

$$p_1=y_1-1\ ,\quad p_2=y_2-1$$

と定義する．このとき，$\ln(p_2/p_1)$ を求めなさい．ln は自然対数（底が e の対数）を表す．

(長崎大 2008)　(m20085001)

0.571 2 行 2 列の行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ とする．0 以上の整数 n に対して，A のべき乗 A^n を考える．このとき以下の問いに答えなさい．ただし，a は $0 < a < 1$ の実数とする．また，$n = 0$ に対して，$A^0 = I$ とする．

(1) $n = 2, 3, 4$ のそれぞれについて A^n を求めなさい．

(2) 行列 $I - A$ の逆行列を求めなさい．

(3) 行列 T_n を次式で定義する．このとき，$(I - A)T_n = I - A^n$ が成り立つことを示しなさい．

$$T_n = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

(4) (3) の行列 T_n の各要素を a, n を用いて表しなさい．

(長崎大 2009)　　(m20095002)

0.572 次式で定義される I_n について，以下の問いに答えよ．

$$I_n = \int_0^n e^{-st} \cos \omega t \, dt$$

ただし，s, ω, n は正の実数である．

(1) I_n を求めなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n$ を求めなさい．

(長崎大 2009)　　(m20095003)

0.573 (1) $N \times\ M$ の行列 A と $P \times\ Q$ の行列 B があるとき，行列の積 AB が定義できる条件を述べよ．

(2) 連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 以外の解を持つための条件を述べよ．ただし，A は $N \times\ N$ の正方行列，$\boldsymbol{x}$ は N 次元の列ベクトル，$\boldsymbol{0}$ は N 次元の 0 ベクトルである．

(3) 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & z & 1 \\ x & 1 & z & 2 \\ 1 & 0 & b & c \\ 2 & 0 & b & c \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 - 2a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求めよ．また，A^n が $n \to \infty$ のとき収束するための条件および $\displaystyle\lim_{n \to \infty} A^n$ を求めよ．ただし，$a \neq 1$ である．

(長崎大 2009)　　(m20095010)

0.574 次式で与えられるベクトルと行列に対して，積が定義できる組を選びその積を求めよ．

ベクトル　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

行列　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(長崎大 2011)　　(m20115013)

0.575 2 次元ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で定義するとき，次の問に答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{d}$ を正規化したベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を求めよ.

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ を求めよ.

(3) 2 次元空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を用いて表せ.

(長崎大 2011)　　(m20115014)

0.576 いま，2 次元平面上の任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) の間で，$\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \leq \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ と表現するものとする．このとき，下記の問いに答えよ．

(1) 2 点間の関係 L について，下記の①〜③は成り立つかについて，それぞれ答えよ．

① $(x_1, y_1)L(x_1, y_1)$

② $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_3, y_3)$ ならば，必ず $(x_1, y_1)L(x_3, y_3)$

③ $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ ならば，必ず $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$

(2) $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ かつ $(x_2, y_2)L(x_1, y_1)$ が成り立つとき，この 2 点間の関係を $(x_1, y_1)E(x_2, y_2)$ と表すものとする．このとき，点 $(1, 1)$ に対して，$(1, 1)E(x, y)$ が成り立つ点 (x, y) の集合は，2 次元平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3) 任意の点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) について $(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つものとする．また，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ を満足する点 (x_3, y_3) と，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ を満足する点 (x_4, y_4) について考える．
このとき，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が必ず成り立つことを，以下の手順で証明する．
[　ア　] と [　イ　] に，(1) における①〜③のいずれかを入れよ．

関係 E の定義より，$(x_1, y_1)E(x_3, y_3)$ から $(x_3, y_3)E(x_1, y_1)$ が成り立つ．
さらに，仮定より，$(x_1, y_1)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
ここで，[　ア　] より，$(x_3, y_3)L(x_2, y_2)$ が成り立つ．
また，関係 E の定義より，$(x_2, y_2)E(x_4, y_4)$ から $(x_2, y_2)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．
以上により，[　イ　] により，$(x_3, y_3)L(x_4, y_4)$ が成り立つ．

(大分大 2002)　　(m20025101)

0.577 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{1 + 2x} \quad \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right)$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

(1) $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ.

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geqq 2)$ を答え，それが成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

(3) (1), (2) の結果を使って，関数 $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ..

(大分大 2008)　　(m20085103)

0.578 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $ft)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t \leqq 0) \\ 1 & (0 < t \leqq \pi) \end{cases}$$

(大分大 2011)　　(m20115103)

0.579 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (-\pi \leqq t \leqq 0) \\ -1 & (0 < t < \pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125103)

0.580 1 周期が次のように定義された周期 2π の周期関数 $f(t)$ のグラフを描き，そのフーリエ級数を求めよ．

$$f(t)=\begin{cases} -\pi & (-\pi<t\leqq 0) \\ 2t-\pi & (0<t\leqq\pi) \end{cases}$$

(大分大 2012)　　(m20125106)

0.581 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

と定義する．

(1) $f(x)$ の 1 次から 4 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ を求めなさい．

(2) $f(x)$ の $x=0$ における 1 次から 4 次までの微分係数 $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$ を求めなさい．

(3) $f(x)$ のマクローリン級数展開を 4 次の項まで求めなさい．

(大分大 2012)　　(m20125107)

0.582 2 次の対称な正方行列 $A=\begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$ を考える．このとき，行列 A と 2 次元のベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて，2 次式 $f(x,y)$ を $f(x,y)=\boldsymbol{v}^T A\,\boldsymbol{v}$ と定義する．ただし，記号 T は，行列やベクトルの転置を示し，$\boldsymbol{v}^T$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の転置を示すものとする．

(1) 行列 A の固有値，固有ベクトル（ベクトルの大きさは 1 とする）を求めなさい．

(2) 適当な直交行列 U により行列 A を対角化し，$U^T AU=D$ と表現する．ただし，D は 2 次の対角行列とする．行列 U と D を求めなさい．

(3) (2) の結果を利用して，$f(x,y)$ は負の値をとらないことを証明しなさい．

(大分大 2012)　　(m20125108)

0.583 次のように定義される周期関数 $f(x)$ について，以下の問いに答えなさい．

$$f(x)=x^2 \quad (-\pi\leq x<\pi), \quad f(x+2\pi)=f(x)$$

(1) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

(2) 関数 $f(x)$ の $(-\pi,\ \pi)$ におけるフーリエ級数を求めなさい．

(大分大 2013)　　(m20135102)

0.584 (1) 連続関数の中間値の定理について述べよ．

(2) $f(x)$ は区間 $I=[a,b]$ 上で定義されている連続関数とする．このとき，$f(x)$ が I 上単射であるための必要十分条件は $f(x)$ が I 上単調増加関数または単調減少関数であることを示せ．

注：$f(x)$ が I 上単調増加関数であるとは，$x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ ならば，$f(x_1)<f(x_2)$ であるとき，また単調減少関数であるとは，$x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$ ならば，$f(x_1)>f(x_2)$ であるときをいう．さらに，I 上単射であるとは，$x_1,x_2\in I$, $x_1\neq x_2$ ならば，$f(x_1)\neq f(x_2)$ であるときをいう．

（熊本大 2001）　　(m20015202)

0.585 ガンマ関数は，$\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s>0)$ で定義される．次の問いに答えなさい．

(1) 部分積分法を用いて，$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ が成り立つことを示しなさい．

(2) $\Gamma(n+1)=n!$ となることを示しなさい．ただし，n は負でない整数である．

(熊本大 2008)　　(m20085202)

0.586 次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい．

(2) $B = P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい．

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される．

$$A^n = \underbrace{AAA \cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0 = 0,\ a_1 = 1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい．

(熊本大 2020)　　(m20205203)

0.587 以下の各問に答えよ．

(1) 平面内の集合 D を

$$D = \left\{ (x, y) \ \middle|\ 1 \leq x \leq e\,,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

と定義する．集合 D を xy 座標平面上に図示せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2) (1) の集合 D 上で次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D xy dx dy$$

(宮崎大 2005)　　(m20055304)

0.588 平面内の集合 D を　$D = \{(x, y) \mid x - 1 \leqq\ y \leqq\ x + 1\,,\ -1 \leqq\ x \leqq\ 1\}$　と定義する．

(1) D を xy 座標平面上に図示せよ．　　(2) 次の重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$

(宮崎大 2006)　　(m20065304)

0.589 (1) 平面内の集合 D を，$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq\ y \leqq\ 1,\ y^2 \leqq\ x \leqq\ y\}$ と定義する．
集合 D を座標平面上に図示せよ．

(2) (1) の集合 D 上での次の重積分の値を求めよ．　$\displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dx dy$

(宮崎大 2007)　　(m20075304)

0.590 2 つの 2 変数関数

$f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 4x + y$　,

$g(x, y) = e^{-x^2 - y^1}$

について，次の各問いに答えよ．

(1) 偏導関数 $f_x(x, y),\ f_y(x, y),\ g_x(x, y),\ g_y(x, y)$ と $(x, y) = (0, 0)$ における値 $f(0, 0),\ g(0, 0)$,
そして $(x, y) = (0, 0)$ における偏微分係数 $f_x(0, 0),\ f_y(0, 0),\ g_x(0, 0),\ g_y(0, 0)$ を求めよ．

(2) $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ で定義される空間内の 2 つの曲面上の点 $(x,y,z)=\bigl(0,0,f(0,0)\bigr)$, $\bigl(0,0,g(0,0)\bigr)$ における接平面の方程式をそれぞれ求めよ．
ただし，曲面 $z=h(x,y)$ 上の点 $(x,y,z)=\bigl(a,b,h(a,b)\bigr)$ における接平面の方程式は
$$z-h(a,b)=h_x(a,b)(x-a)+h_y(a,b)(y-b)$$
である．

(3) (2) で得られた 2 つの接平面が交わるならば，交わりの図形を表す方程式を求めよ．交わらないならばその理由を書け．

(宮崎大 2015)　　(m20155303)

0.591 直交座標系における二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対して，これらの外積とよばれるベクトル $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は
$$\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \right) \tag{1}$$
で定義される．以下の問に答えよ．

(1) 三つのベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ に対して以下の式 (2) を証明せよ．
$$(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})\cdot c=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) 式 (2) を利用し、外積 $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とで張られる平面に垂直なベクトルであることを示せ．

(鹿児島大 2006)　　(m20065403)

0.592 直交座標系 $O-XYZ$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ と $\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ により作られる三角形に余弦定理を適用して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積について，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ が成り立つことを示せ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角であり，また $|\boldsymbol{a}|$ と $|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の大きさを表し，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}$ である．

(2) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は $\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$ と定義される．これより，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\ \boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\ \boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\ \boldsymbol{b})$ が成り立つことを示せ．

(鹿児島大 2011)　　(m20115403)

0.593 次のように行列 A が定義されている．A^6 を求めなさい．
$$A=\begin{pmatrix} -a & \dfrac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$$

(鹿児島大 2015)　　(m20155410)

0.594 次式で定義される双曲線関数 ：
$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ,\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$
について, 以下を示しなさい．

(1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(室蘭工業大 2005)　　(m20055506)

0.595 行列 E および J を以下のように定義する.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$ として, 以下が成り立つことを示しなさい.

(1) $J^2 = -E$

(2) $AB = (a_1b_1 - a_2b_2)E + (a_1b_2 + a_2b_1)J$

(3) $A^tA = \left({a_1}^2 + {a_2}^2\right)E$ （ただし，A^t は，A の転置行列を表す）

(室蘭工業大 2005)　　(m20055511)

0.596 区間 2π で定義された関数　$f(t) = \pi - |t|\ ;\ -\pi \leq t \leq \pi$　を $f(t+2\pi) = f(t)$ の関係によって周期関数に拡張した関数を考える.

(1) この関数の概形を $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ の範囲で図に示せ．縦軸，横軸に適切な数値を入れること.

(2) この周期関数をフーリエ級数で表せ.

(室蘭工業大 2006)　　(m20065509)

0.597 (1) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi$ を満たす a の値を求めよ.

(2) 関数 $g(x)$ は，関数 $f(x)$ に対して，　$\displaystyle g(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$　,　$(m = 1, 2, 3, \cdots)$

と定義される．ここで，$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の導関数を表す．$f(x) = e^{2x}$ とするとき，$g(x)$ を，$m = 3$ として求めなさい.

(室蘭工業大 2008)　　(m20085508)

0.598 行列に関する以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A, B, C, D を,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

として，行列の積 AB, CD, DC を計算せよ.

(2) 行列 X を,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

として，その転置行列 ${}^tX$，および，固有和（トレース）$\mathrm{tr}(X)$ を,

$${}^tX = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{tr}({}^tXX)$ を求めよ.

(室蘭工業大 2009)　　(m20095502)

0.599 直交座標の点 $P(x,y,z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$$

とする. また, スカラー関数 $f(x,y,z)$ を

$$f(x,y,z) = 2x + y + 3z$$

とする. このとき以下の問の答えよ. ただし, ∇ は次のベクトル演算子を表す.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

(1) ベクトル $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n} = \nabla f$ で定義するとき, $\boldsymbol{n} = (n_x,\ x_y,\ n_z)$ の形で表せ.

(2) 関数 $f(x,y,z)$ をベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表せ.

(3) $f(x,y,z) = 2x + y + 3z = 5$ は平面を表す方程式である. この平面上にある 2 点 $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ における位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1 = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\boldsymbol{r}_2 = (x_2,\ y_2,\ z_2)$ とするとき, ベクトル $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ の内積が $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_2$ となることを示せ.

(4) ベクトル $\boldsymbol{n}$ が平面 $f(x,y,z) = 2x + y + 3z = 5$ と垂直になることを示せ.

(室蘭工業大 2010)　　(m20105503)

0.600 D : $0 \leqq\ y \leqq\ x \leqq\ 1$ により定義される領域を D として, 次の重積分を計算せよ.

$$I = \iint_D \left(2x + 3y^2\right) dxdy$$

(室蘭工業大 2016)　　(m20165515)

0.601 以下の式で表される多変数関数 z について, 次の問いに答えよ.

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

(1) z の定義域ならびに値域を求めよ.

(2) z の表す曲面の概形をグラフに表せ.

(3) この曲面上の $x = 2,\ y = 2$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ.

(4) この曲面と座標平面で囲まれる図形の体積を V とする. V の値を求めるための二重積分の式, ならびにその積分領域 D を数式で表せ.
（積分計算を求める必要はない）

(香川大 2015)　　(m20155701)

0.602 非負の整数 x , y に対して関数 f を次のように定義する.

$$\begin{cases} f(0,y) = y + 1 \\ f(x+1,0) = f(x,1) \\ f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y)) \end{cases}$$

(1) $f(1,3)$ の値を計算せよ. ただし, その計算過程も示せ.

(2) $f(0,y) = y+1$ の例のように, y に関する多項式として $f(1,y)$ を表現せよ. そして, その正しさを帰納法により示せ.

(3) $f(x,y) \geq x + y + 1$ であることを示せ.

(島根大 2005)　　(m20055802)

0.603 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & a\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) R^3 から R^3 への写像 f_A を

$$f_A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

と定義する．f_A は線形写像であることを示せ．

(2) f_A が単射とならないような a の値を求めよ．

(3) f_A の像の次元は 2 以上であることを示せ．

(4) A は 2 を固有値としてもつことを示せ．

(5) A が 1 を固有値としてもつとき，次の (a),(b) に答えよ．

(a) a の値を求めよ．

(b) A は対角化可能であることを示せ．

(島根大 2009)　　(m20095801)

0.604 以下の各設問に答えよ．ただし，x は実数とする．

(1) 関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=x-\tan^{-1}x$, $g(x)=x-x\sin x$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $f'(x)$, 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．

(b) 導関数 $g'(x)$, 第 2 次導関数 $g''(x)$ を求めよ．

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ の値を求めよ．

(2) 関数 $y(x)$ を $y(x)=(x^2+1)e^{-x}$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(a) 導関数 $y'(x)$, 第 2 次導関数 $y''(x)$ を求めよ．

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}y(x)=0$ であることを示せ．

(c) $y'(x)$, および $y''(x)$ の符号を用いて，関数 $y(x)$ の増減表を作成せよ．また，関数 $y(x)$ のグラフの概形をかけ．

(島根大 2012)　　(m20125801)

0.605 3 次正方行列 X を以下のように定義する．

$$X=\begin{bmatrix}x_{11} & -\sqrt{6} & 1\\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{3}\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

以下の設問に答えよ．ただし，${}^tX$ は X の転置行列を表す．

(1) $x_{11}=1$ とする．積 $X\,{}^tX$ を計算せよ．

(2) $x_{11}=1$ とする．$(X\,{}^tX)^{-1}$ の行列式の値を求めよ．

(3) $x_{11}=1$ とする．X の階数を求めよ．

(4) $x_{11}=1$ とする．X^2 の行列式の値を求めよ．

(5) $x_{11} = -7$ とする．以下の命題が真か偽かを示せ．
命題「任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，方程式 $X\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{y}$ が存在する.」
ただし，以下のように，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{y}$ は 3 次列ベクトルとする．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(島根大 2012)　　(m20125802)

0.606 次の (1), (2), (3) に答えよ．$\mathbb{R}^n$ は n 次列ベクトルのなす実ベクトル空間を表すことにする．

(1) (a) 「実ベクトル空間 V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底である」ことの定義を述べよ．

(b) 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立であるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次従属であるならば，$\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せることを示せ．

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ を $f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5)$ と定める．このとき，

(a) 写像 f_A は線形写像であることを示せ．

(b) f_A の核 $\mathrm{ker} f_A$ の基底を求めよ．

(c) $\mathbb{R}^5$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f_A の表現行列を求めよ．

(3) n 次実正方行列 B に対して，線形写像 $f_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_B(\boldsymbol{v}) = B\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$ と定める．このとき，f_B が全射であれば，B は正則行列であることを証明せよ．

(島根大 2013)　　(m20135801)

0.607 $f(x)$ は実数全体で定義された以下の条件 $(*)$ を満たす関数とする．

$$(*) \quad f''(x) = f(x), \ \ f(0) = 1, \ f'(0) = 0$$

次の問いに答えよ．

(1) $\big(f(x)\big)^2 - \big(f'(x)\big)^2 = 1$ を証明せよ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ と $f'(x)$ のグラフの概形をかけ．

(4) 自然数 n に対し，$f^{(n)}(0)$ の値を求め，さらに $f(x)$ のマクローリン展開を求めよ．

(島根大 2013)　　(m20135802)

0.608 次の問いにおいて V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$f : V \to V$ は線形写像とする．$\mathbb{R}$ は実数全体を表すものとする．

(1) ベクトル空間 V の次元 $\dim(V)$ の定義を述べよ．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V のベクトルとする．このとき，$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であるならば，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であることを示せ．

(3) 不等式 $\dim(V) \leq \dim\big(f(V)\big) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)$ を示せ．ただし，$\mathrm{Ker}\, f$ は f の核である．

(島根大 2015)　　(m20155805)

0.609 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ とするとき，次の設問に答えよ．

(1) AB, BA を計算し，$AB = BA$ が成立しないことを示せ．

(2) 行列 A, B が正則であるかどうかを調べ，正則ならば逆行列を求めよ．

(3) 行列 A と 2 行 2 列の零行列 O に対して．$AX = XA = O$ をみたす O でない行列 X を一つ見つけよ．

(4) 次の条件をみたすような行列 $C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ を求めよ．

$$C \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) 点 (x, y) が直線 $x - y = 1$ 上を動くとき，$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により定義される点 (X, Y) の軌跡を求めよ．

(島根大 2018)　　(m20185802)

0.610 (1) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された連続関数とする．$F(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt$ とおくとき，導関数 $F'(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ は $(-\infty,\ +\infty)$ で定義された下に凸な連続関数とする．このとき，すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$2xf(0) \leqq \int_{-x}^{x} f(t)dt$$

(島根大 2019)　　(m20195806)

0.611 0 以上の整数 n に対し，C_n，S_n を

$$C_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$$
$$S_n = \int_0^{\pi} x^n \sin x dx$$

のように定義するとき，以下の問いに答えよ．

(1) C_0，S_0 を求めよ．

(2) C_n を S_{n-1} を用いて表せ．

(3) S_n を C_{n-1} を用いて表せ．

(4) 前問 (1)〜(3) の答えを用いて S_3 を求めよ．

(東京都立大 2021)　　(m20215904)

0.612 関数 $f(x)$ の導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

にしたがって，$f(x) = \sin x$ の導関数が $f'(x) = \cos x$ であることを示せ．

(滋賀県立大 2008)　　(m20086001)

0.613 次の 2 変数関数 $z = z(x, y)$ の極値を求めよ. ただし, x の定義域は $x > 0$ とする.

$$z = z(x, y) = -\frac{1}{2}xy - \log x + y^2 + 3y + 2$$

(宇都宮大 2010) (m20106104)

0.614 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい. 導く過程も示しなさい.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(東京海洋大 2013) (m20136403)

0.615 関数 $f(x)$ の導関数は次のように定義される.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この定義に従って次の関数の導関数を求めなさい. 導く過程も示しなさい.

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 8$ (2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(東京海洋大 2017) (m20176403)

0.616 (1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ のとき, A の行列式と, トレースを求めなさい.

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ として, 以下の問いに答えなさい.

(a) B の行列式を求めなさい.

(b) B の固有値 λ_1, λ_2 を求めなさい. ただし $\lambda_1 \geq \lambda_2$ とする.

(c) 固有値 λ_1, λ_2 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ を求めなさい. ただし, 各成分は $x_{11} \geq x_{21}$, $x_{12} \geq x_{22}$ を満たし, 絶対値の最も小さい整数とする.

(d) 行列 P が $P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ で定義されるとき, $BP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ となることを示しなさい.

(e) 行列 P の逆行列を求めなさい.

(f) B^n を求めなさい.

(和歌山大 2009) (m20096501)

0.617 関数 $f(x)$ に対する次式の積分をフーリエ変換と定義する. ただし, i は虚数単位, e は自然対数の基底である.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

また, 2 つの関数 $g(x)$, $h(x)$ に対する次式の積分をたたみこみと定義する.

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

フーリエ変換およびたたみこみに関する次の (1)〜(3) に答えなさい.

(1) 次式で与えられる関数 $f_1(x)$ のフーリエ変換 $F_1(u)$ を求めなさい.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1\,, & \left(x \leq \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \\ 0\,, & \left(x > \left|\dfrac{1}{2}\right| \text{の場合}\right) \end{cases}$$

(2) 関数 $f_1(x)$ 同士のたたみこみによって得られる関数を $f_2(x)$ とする. 関数 $f_2(x)$ を求め, その概略図を描きなさい.

(3) 関数 $f_2(x)$ のフーリエ変換 $F_2(u)$ を求めなさい.

(和歌山大 2017)　　(m20176509)

0.618 次の文章を読み, (1)〜(5) に答えよ. 次の関数 $f(x)$ は, 理学, 工学の分野でしばしば現れる関数である.

$$f(x) = \frac{1}{x - ia}$$

ここで, a は正の実数 $(a > 0)$, i は虚数単位 $(i^2 = -1)$, x は実数, 定義域は $-\infty < x < \infty$ である.

(1) 関数 $f(x)$ の実数部, および虚数部が, 次のように書けることを示せ.

$$u(x) = \frac{x}{x^2 + a^2} \qquad\qquad v(x) = \frac{a}{x^2 + a^2}$$

(2) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ の x に関する微分をそれぞれ計算せよ.

$$\frac{d\,u(x)}{dx} \qquad\qquad \frac{d\,v(x)}{dx}$$

(3) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ のグラフの概形を図示せよ.

(4) 関数 $u(x)$, および $v(x)$ を $0 < x < a$ の範囲で定積分せよ.

$$\int_o^a u(x)dx \qquad\qquad \int_0^a v(x)dx$$

(5) $x = a$ における関数の値 $f(a)$ を記せ. さらに $f(a)$ を複素平面上にベクトルとして図示せよ.

(大阪市立大 2007)　　(m20076601)

0.619 次のベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 A, B, C について, あとの問いに答えなさい. 回答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A\boldsymbol{v}$, $B\boldsymbol{v}$, $C\boldsymbol{v}$ について, 定義されるときは, それぞれの値を計算しなさい. 定義されないときはその理由を答えなさい.

(2) 行列式 $|A|$, $|B|$ をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列 A, B の逆行列をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 B の固有値と固有ベクトルをそれぞれ答えなさい.

(岩手県立大 2014)　　(m20147001)

0.620 次の行列 A, B, C, D について, あとの問いに答えなさい. 解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad D = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) AB を答えなさい.

(2) 行列 A, B の階数（ランク）をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい.

(4) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい.

(5) 行列 D の固有値と固有ベクトルを答えなさい.

(岩手県立大 2016)　　(m20167001)

0.621 次の行列 A, B, C とベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ について，あとの問いに答えなさい，解答は途中の式も省略せずに書きなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(1) AB と BA をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい.

(2) 行列式 $|A|$, $|C|$ をそれぞれ答えなさい.

(3) 行列 A, C の逆行列をそれぞれ答えなさい．定義されないときには「定義されない」と答えなさい.

(4) ベクトル $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ の組が線形独立か線形従属か 理由とともに 答えなさい.

(5) 次の連立一次方程式の解を 行列を使用して 求めなさい．行列を使用したことが分かるように，途中経過を示しなさい.

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 5 \\ x + y + z = -7 \\ x + 3y + 9z = -5 \end{cases}$$

(岩手県立大 2017)　　(m20177001)