[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：テイラー

0.1　関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2017)　(m20170201)

0.2　関数 $f(x)=\cos x$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2019)　(m20190207)

0.3　関数 $f(x)=\sqrt{1+x}$ の $x=0$ を中心とする 2 次までのテイラー展開を求めよ.

(北見工業大 2022)　(m20220201)

0.4　次の関数の原点におけるテイラー展開を，２次の項まで示しなさい.　$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

(秋田大 2001)　(m20010406)

0.5　関数 $f(x)=\log(1+x)$ を $x=0$ で Taylor(テイラー) 展開したとき,

$f(x)=$“ 3 次式 ”+剰余項 $(-1<x\leqq 1)$ となる 3 次式を求めよ. 剰余項は求めなくてよい.

(秋田大 2005)　(m20050404)

0.6　関数 $f(x,y)=e^{x+2y}$ の 2 次までの偏微分を全て求めよ．さらに原点でこれを Taylor（テイラー）展開したときに，$f(x,y)=(2\text{ 次式})+(\text{剰余項})$ となる 2 次式を求めよ．剰余項は求めなくてよい．

(秋田大 2006)　(m20060404)

0.7　関数 $f(x)$ の $x=a$ を中心とするテイラー展開は以下のように与えられる.

$$f(x)\sim f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots$$

ただし, $f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^nf}{dx^n}$ を表す. また, $f'(x)$ および $f''(x)$ は $f(x)$ の導関数 $\dfrac{df}{dx}$ および第 2 次導関数 $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ をそれぞれ表す. 特に, $-1<x<1$ に対する関数 $\dfrac{1}{1-x}$ および $-\infty<x<\infty$ に対する関数 e^x の $x=0$ を中心とするテイラー展開はそれぞれ次のように与えられる.

$$\frac{1}{1-x}\sim\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad , \qquad e^x\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

x を実数とし, 関数 $g(x)$ と $h(x)$ を

$$g(x)=e^{x^2} \qquad , \qquad h(x)=\frac{e^{x^2}}{2-x}$$

と定義する.

(1)　$g(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めよ.

(2)　問 (1) の結果を用いて, $h(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開の x^2 の項までを求めよ.

(3)　$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

(4)　$y=h(x)$ の $-\infty<x<\infty$ における発散する点, 極値を与える点に注意して, グラフの概略を描け.

（東北大 2004）　(m20040502)

0.8　(1)　$(-1,1)$ を定義域とする関数 f を，$f(x)=\arctan x+\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ で定める．ただし，$\arctan x$ は，$\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする.

(a) $f'(x)$ を求めよ.

(b) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ.

(2) g を $(-1,1)$ 上で定義された C^2 級関数とする． g のテイラー展開あるいはロピタルの定理を用いて

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h)+g(2h)+g(-3h)-3g(0)}{h^2}=7g''(0)$$

を示せ（ただし，ロピタルの定理を用いる際は，定理の仮定を満たしていると確認する事）.

(3) h を $(-2,2)$ 上で定義された C^1 級関数とする． $h(0)=0$ であれば，広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{h(x)}{x^{3/2}}\,dx$ が存在することを示せ.

(お茶の水女子大 2009) (m20090601)

0.9 指数関数 e^x のテイラー展開

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

を拡張して，行列 A の指数関数 e^A を，

$$e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$$

と定義する．ただし，I は単位行列である．いま，行列 e^A が

$$e^A=\begin{bmatrix}2-e^{-1} & -1+e^{-1}\\ 2-2e^{-1} & -1+2e^{-1}\end{bmatrix}$$

と与えられたとき，以下の問に答えよ．

(1) 行列 e^A を対角化せよ．

(2) 正則行列 P に対して，$P^{-1}e^AP=e^{(P^{-1}AP)}$ が成り立つことを示せ．

(3) 行列 A を求めよ．

(東京大 2004) (m20040704)

0.10 関数 $y(x)$ は, $x=1$ を含むある区間で定義された連続関数で, $x=1$ で極値をとり, $y^3+3xy^2+x^3y=1$ を満たすとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) $y(1)$ を求めよ.

(2) $y(x)$ の $x=1$ のまわりでのテイラー展開を 2 次の項まで求めよ.

(3) $x=1$ における極値が, 極大, 極小のいずれかを答えよ.

(東京大 2005) (m20050702)

0.11 関数 $\sqrt{1+x}\,\cos x$ の $x=0$ におけるテイラー展開の x^3 までの項を求めよ.

(東京工業大 2008) (m20080801)

0.12 関数 $f(x,y)=x^2+3xy-y^3+1$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(2) xyz 空間内の曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(2,-1,0)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) xy 平面上の曲線 $f(x,y)=0$ が点 $(2,-1)$ の近くで定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ を $x=2$ の近くで

$$\varphi(x)=a_0+a_1(x-2)+a_2(x-2)^2+\cdots$$

とテイラー展開したときの係数 $a_0,\ a_1,\ a_2$ をそれぞれ求めよ.

(電気通信大 2017)　　(m20171003)

0.13　xy 平面上の曲線 C ： $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について考える．C 上で y は x の関数となるが，これを $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $(0 < x < 1)$ を t の関数として表せ．

(2) $f(x)$ の $x = \dfrac{1}{2}$ におけるテイラー展開

$$f(x) = a_0 + a_1\left(x - \frac{1}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

の係数 a_0，a_1，a_2 を求めよ．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分を D とするとき，重積分 $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$ の値を求めよ．

(電気通信大 2022)　　(m20221003)

0.14　(1) $x = 0$ 近傍で次の近次式が成り立つように，定数 A_i $(i = 0.1, 2, 3, 4)$ を求めなさい．

$\cos(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4$

(2) 次の関数をテイラー展開しなさい．

$\log(x + 1)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{x}$ の極限値を求めなさい．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{1 + x^2}}$ の極限値を求めなさい．

(千葉大 2016)　　(m20161201)

0.15　(1) $f(x) = \ln(1 + x)$，$(-1 < x \leq 1)$ のテイラー展開を x^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ の項まで求めよ（剰余項は含まない）．$\ln x$ は x の自然対数を示す。

(2) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$，$(|x| < 1)$ のテイラー展開を x^n の項まで求めよ（剰余項は含まない）．

(3) $\ln 2$ を近似する場合，少ない数の展開項で誤差をより小さくするには，上記のテイラー展開の内、どちらを用いればよいか．理由を記して答えよ．

(筑波大 2006)　　(m20061316)

0.16　関数 $f(x) = (2e^x + a)^4$ が与えられている．$f(x)$ を x についてマクローリン展開（$x = 0$ の周りでのテイラー展開）をして x^2 の項まで求めよ．ただし，a は定数である．

(筑波大 2008)　　(m20081322)

0.17　指数関数 e^x の性質に関する以下の問いに答えなさい．

(1) 自然数 n を用いて定義された以下の極限値を考える．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

(1a) 2 項展開の公式を用いて下の関係式を示しなさい．

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

(1b) さらに $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を用いて $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が有界であることを示しなさい．

(2) 有界なる単調数列は収束するので (1) で与えられた極限は極限値をとり，これを e と書くことにする．この e が自然数の底である．　このとき以下を示しなさい．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

(3) 上記の (2) を使って

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

が成立することをまず示し，その上で微分の定義に基づいて $\{e^x\}'=e^x$ を示しなさい．

(4) $f(x)=e^x$ を n 次のマクローリン展開（$x=0$ のまわりでのテイラー展開）し，その剰余項を求めなさい．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{n!}=0$ を示し，これを用いて $\displaystyle e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を示しなさい．

(筑波大 2009)　　(m20091302)

0.18 関数 $f(x)=\sin 2x$ の $x=\pi/2$ におけるテイラー展開について以下の問いに答えよ．

(1) $(x-\pi/2)^4$ の項までテイラー展開を求めよ．ただし，ここでは剰余項は求めなくてよい．

(2) $\pi/2<x<\pi$ を満たす範囲の x に対して，剰余項 R_5 は $|R_5|<\dfrac{\pi^5}{5!}$ を満たすことを示せ．

ただし，(1),(2) において $f(x)$ の $x=a$ におけるテイラー展開は，正の整数 n に対して

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k+R_{n+1}$$

と表される．ここで，剰余項 R_{n+1} は，$a<p<x$ である p が存在して，

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(p)(x-a)^{n+1}$$

と表される．

(筑波大 2011)　　(m20111314)

0.19 2 変数関数 $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を計算せよ．

(2) $f(x,y)$ の全微分を計算せよ．

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}$ を計算せよ．

(4) $(x,y)=(0,0)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(5) $(x,y)=(1,1)$ を中心とする $f(x,y)$ のテイラー展開を 2 次まで求めよ．

(6) xyz 空間で方程式 $z=f(x,y)$ が表す曲面 S について，S 上の点 $P(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ．

(筑波大 2015)　　(m20151306)

0.20 (1) 関数 $f(x)=e^x$ をマクローリン展開（$x=0$ のまわりでテイラー展開）せよ．

(2) 以下の性質 (A) を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{1!}+\frac{n-1}{2!}+\cdots+\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right)$$

(A) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

が成り立つ．

(3) 上の性質 (A) を証明せよ．

(筑波大 2017)　　(m20171312)

0.21 (1) 関数 $f(x,y)$ を次のように定義する．

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

この関数 $f(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① $(x,y)=(0,0)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,0)$ を求めよ．

② $k\neq 0$ に対して $(x,y)=(0,k)$ での x についての偏微分係数 $f_x(0,k)$ を求めよ．

③ 偏導関数 $f_x(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ での y に関する偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$ の定義を f_x を用いて書け．

④ $f_{xy}(0,0)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x,y)$ を次のように定義する．

$$g(x,y)=\frac{\log(1+x)}{1+y}$$

この関数 $g(x,y)$ について，以下の問に答えよ．

① 導関数 $g_x(x,y)$，$g_y(x,y)$，$g_{xx}(x,y)$，$g_{xy}(x,y)$，$g_{yy}(x,y)$ と $(x,y)=(0,0)$ におけるそれぞれの値を求めよ．

② $(x,y)=(0,0)$ 周りのテイラー展開を 2 次の項まで計算せよ．なお，3 次以降は剰余項 R_3 と表記すれば良い．

(筑波大 2020)　　(m20201304)

0.22 $x+2y+z+e^{2z}-1=0$ から定まる陰関数 $z=f(x,y)$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を求めなさい．

(2) $z=f(x,y)$ が表す曲面上の点 $(x,y,z)=(-2,1,0)$ における接平面の方程式を求めなさい．

(3) $f(x,y)$ の原点 $(x,y)=(0,0)$ における 2 変数のテイラー展開を 2 次の項まで求めなさい．

(筑波大 2021)　　(m20211307)

0.23 (1) 関数 $f(x)=\sin x$ に対して，$f^{(n)}(0)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ を求めよ．

(2) $\sin x$ のマクローリン展開（0 のまわりでのテイラー展開）をかけ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=0$ となる正の定数 α の条件を求めよ．

(茨城大 2002)　　(m20021703)

0.24 複素関数 $f(z)=(x^2-2x+3)e^{z-1}$ について，以下の各問に答えよ．

(1) $f(z)$ の $z=1$ を中心にするテイラー展開を

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-1)^k$$

と書くとき，a_1，a_2 をそれぞれ求めよ．

(2) C は複素平面上の円 $|z|=2$ を正の向きに一周する閉曲線とする．次の複素積分を計算せよ．

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-1)^n}\,dz$$

ただし，n は 3 以上の自然数とする．

(茨城大 2015)　　(m20151704)

0.25　以下の関数に対して, $x=0$ での 3 次までの Taylor 展開を求めなさい.

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(山梨大 2010)　　(m20101807)

0.26　$g(x)=x^2\sin x$ の $x=0$ の周りのテイラー展開を求めよ.

(信州大 2019)　　(m20191909)

0.27　関数 $F(x)$ は　$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$　で与えられるものとする.

また,　$\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　であることがわかっている.

(1) $\frac{dF(x)}{dx}$ を求めよ.　　(2) $\int_x^\infty e^{-t^2}dt$ を $F(x)$ を用いて表せ.

(3) e^{-t^2} のマクローリン展開（$t=0$ の周りでのテイラー展開）を用いて，$x=0.1$ のときの $F(x)$ の値の近似値を有効数字 4 桁で求めよ.

(4) 次の定積分の値を求めよ.　(a) $\int_0^\infty e^{-a^2t^2}dt$　（a は正の定数とする）　(b) $\int_0^\infty t^2e^{-t^2}dt$

(新潟大 2008)　　(m20082001)

0.28　三角関数に関する以下の問いに答えよ.

(1) e^x, $\cos x$, $\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ.

(2) オイラーの関係式,

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

が成り立つことを，問 (1) のテイラー展開の結果を用いて示せ.

(3) 任意の正の整数 n について，次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

(4) 問 (3) の恒等式を用いて，以下の式を証明せよ.

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta$$
$$\sin(3\theta)=3\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta$$

(新潟大 2016)　　(m20162010)

0.29　$f(x)=\sin x$ について，以下の問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を $x=0$ の周りでテイラー展開せよ．解答は x の 5 次の項まで示せ.

(2) 極限値 $\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^3}$ を求めよ.

(新潟大 2019)　　(m20192001)

0.30　虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる．物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い．このことに関連した以下の問いに答えよ.

(1) オイラーの公式を書け．つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ．

(2) 二次正方行列 I および J を

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される：

$$X^0 = I, \qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots$$

(2) の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta) I + g(\theta) J$$

で表すことができる．このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ．

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい．

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} \qquad = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots$$

$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots$$

(4) (3) で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ．

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい．ここで ω は正の定数である．以下の問いに答えよ．

(5) 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる．ここで K は t に依らない二次正方行列である．行列 K を答えよ．

(6) (5) の微分方程式の解は次式で与えられる：

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$，$q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ．

(新潟大 2022)　　(m20222006)

0.31 関数 $\varphi(x) = x \log x \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $\varphi'(x)$，$\varphi''(x)$ を求めよ．

(2) テイラーの定理を適用して，$\varphi(x)$ の $x = 1$ における 1 次の近似式 $p(x)$ および剰余項 R_2 を求めよ．

(3) (2) の $p(x)$ に対し，$x > 0$ において $\varphi(x) \geqq p(x)$ が成り立つことを示せ．

(4) 閉関数 $[0,1]$ で定義された正の値をとる連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ を満たすとする．このとき

$$\int_0^1 \varphi\left(f(x)\right)\,dx \geqq\ 0$$

が成り立つことを示せ.

(金沢大 2014)　　(m20142202)

0.32 $\boldsymbol{R}$ 上の 3 回微分可能な関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $x > a$ に対して，

$$\frac{|f''(a)|}{2}(x-a)^2 \leqq |f(x)| + |f(a)| + |f'(a)|(x-a) + \frac{|f'''(c)|}{6}(x-a)^3$$

を満たす $c\ (a < c < x)$ が存在することを，テイラーの定理を用いて示せ.

(2) $f(x)$ および $a \in \boldsymbol{R}$ は，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たすとする.

(i) $|f(x)| \leqq 1 \qquad (x \in \boldsymbol{R})$

(ii) $|f'''(x)| \leqq 3 \quad (x \in \boldsymbol{R})$

(iii) $f'(a) = 0$

このとき，$|f''(a)| \leqq 3$ を示せ.

(金沢大 2020)　　(m20202205)

0.33 θ が 0 付近では $\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似されることがある． この近似が成り立つ理由についてテイラー展開（マクローリン展開）を用いて説明せよ.

(富山大 2021)　　(m20212303)

0.34 テイラーの定理によって $f(x,y) = x^2y + 4y - 5$ を $(x-1)$ と $(y+1)$ のべきで展開せよ.

(福井大 2014)　　(m20142407)

0.35 テイラーの定理を使って，$f(x,y) = \sin xy$ を $(x-\pi/2)$ と $(y-1)$ の 2 次のベキまで展開せよ.

(福井大 2016)　　(m20162404)

0.36 関数 $f(x) = x^5e^x$ のマクローリン級数（すなわち原点を中心とするテイラー級数）を求めよ.

(静岡大 2006)　　(m20062503)

0.37 (1) 関数 $f(x) = \sin x\cos x$ の原点を中心とするテイラー級数を求めよ.

(2) 複素数 $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{14}$ を $x+iy$ の形に改めよ. （i は虚数単位）

(3) 2 変数関数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$ の極値を求めよ.

(静岡大 2008)　　(m20082501)

0.38 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を $x=1$ を中心にテイラー展開せよ.

(2) 複素数平面上に 2 点 $A(\sqrt{3}+2i)$, $B(2\sqrt{3}+3i)$ をとる．以下の問いに答えよ.

(a) 点 C を三角形 ABC が正三角形となるように定める．点 C を表す複素数を求めよ.

(b) 点 D は直線 AC に関して B と線対称となる点である．点 D を表す複素数を求めよ.

(静岡大 2009)　　(m20092505)

0.39 関数 $\log x$ の $x=1$ を中心とするテイラー展開（無限和による表示）を求めよ．収束に関しては調べなくてよい．

(名古屋工業大 2023)　　(m20232901)

0.40 関数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x^2(x+3)}$ について，以下の問に答えなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(mx+b)\}=0$ となるように，係数 m, b の値を決定しなさい．極限値を求めるときには，途中の計算過程もわかるようにしなさい．「$x=1/t$ への変形，テイラー展開，ロピタルの定理」等の工夫のうち，一部，または全部の工夫をすることにより，答えを求める方法もある．

(2) (1) で求めた直線 $y=mx+b$ は，一般に何と呼ばれるか？答えなさい．(漢字で書くと，より望ましい）．

(3) $f(x)$ を 1 回微分，2 回微分した式を，それぞれ，求めなさい．

(4) (1)〜(3) をもとに，$f(x)$ のグラフの概形を書きなさい．途中の手順も示しなさい．また，極大値，極小値，変曲点，x 軸，y 軸との交点などが，もしあれば，それぞれ，その座標をグラフ中に示しなさい．

(三重大 2003)　　(m20033101)

0.41 関数 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}$ を考える．ただし，x は正の実数とする．

(1) 最小点 $x=x_0$ を求めよ．

(2) $x=x_0$ の周りでテイラー展開をして $x-x_0$ の 2 乗の項までの近似式を求めよ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163205)

0.42 関数 $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ $(-1<x<1)$ を $x=0$ の近傍でテイラー展開し，x の 3 乗の項まで求めよ．

(奈良女子大 2019)　　(m20193205)

0.43 関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{e^z-1} & (z\neq 0)\\ 1 & (z=0)\end{cases}$$

この関数は $|z|<2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

のように表し，ベルヌーイ数 B_n , $n=0,1,2,\cdots$ を定義する．$B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z-1)f(z)=z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$$

ただし，$\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.44 (1) 複素数 w に対して，級数

$$\frac{1}{1+w}=\sum_{n=1}^{\infty}(-w)^{n-1}\ ,\quad (|w|<1)\ \cdots ①$$

の両辺を $w=0$ から $w=z$ まで積分することで，複素関数 $\mathrm{Log}(1+z)$ を $z=0$ において，テイラー展開せよ．ただし，$\mathrm{Log}(1+z)$ は $-\pi < \mathrm{Im}\log(1+z) \leq \pi$ なる $\log(1+z)$ の主値を表す．級数 ① の項別積分可能性は明らかとしてよい．

(2) 任意の複素数 z について

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Log}\left(1+\frac{z}{n}\right) = z \ \cdots ②$$

を示せ．

(3) ② を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ．

(京都大 2006) (m20063307)

0.45 半径 a の円に内接する正 n 辺形の面積を A_n, 外接する正 n 辺形の面積を B_n とおく. 半径 a の円の面積を C として, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C-A_n}{B_n-C}$ を求めよ.（3 角関数のテイラー展開は既知として使ってよい.）

(京都大 2010) (m20103302)

0.46 以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ がべき級数展開可能であるとき，$f(x)$ を点 a のまわりでテイラー級数に展開せよ．

(2) (1) で求めた結果を利用して，$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるための必要条件と十分条件を示し，その理由を説明せよ．ただし，$f''(a)\neq 0$ とする．

(3) $f(x)=\sin x$ を $x=0$ のまわりでテイラー級数展開せよ．

(鳥取大 2000) (m20003903)

0.47 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}dt$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f(1)$ の値を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開を求め，その収束半径を答えよ．

(3) 正の整数 n に対して，n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(岡山大 2013) (m20134002)

0.48 次の関数を $x=1$ のまわりでテイラー展開し，３次項まで示せ．

$f(x)=a^x$ ただし $a>0$ の定数

(広島大 2003) (m20034104)

0.49 実 2 変数関数 $f(x,y)=x^2+\dfrac{5}{2}y^2+3xy-y$ について以下の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) を求めよ．ただし停留点とは，関係式 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ をともに満たす点のことである．

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0,y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ．

(3) 停留点における値 $f(x_0,y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ．

(広島大 2008) (m20084104)

0.50 (1) 関数 e^x , $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ.

(広島大 2010) (m20104101)

0.51 (1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(3) (1) と (2) を用いて, $\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ.

(4) a を実数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ.

(広島大 2011) (m20114105)

0.52 以下の問いに答えよ.

(1) e^x の $x=0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

の係数 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を書け,（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき, $\displaystyle\lim_{t\to+0}t(\log t)^k=0$ であることを示せ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$ の値を求めよ.

(4) 自然数 k に対して, 広義積分 $I_k=\displaystyle\int_0^1(\log x)^k\,dx$ の値を求めよ.

(広島大 2013) (m20134110)

0.53 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3x+1}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{1}{ax+b}$ の n 次導関数 $(n\geqq 1)$ が $\dfrac{a^n\cdot(-1)^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$ であることを示せ. ただし, a,b は 0 でない定数とする.

(2) 等式 $f(x)=\dfrac{p}{x+1}+\dfrac{q}{2x+1}$ を満たす定数 p,q を求めよ.

(3) $f(x)$ の n 次導関数 $(n\geqq 1)$ を求めよ.

(4) $f(x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー級数展開をせよ.（一般項も記すこと）.

(広島市立大 2002) (m20024201)

0.54 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x-y}}$ のマクローリン展開（点 $(0,0)$ におけるテイラー展開）を x,y に関して 2 次の項（x^2, y^2, xy の項）まで求めよ.

(広島市立大 2006) (m20064202)

0.55 $x>-1$ で定義された関数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ の $x=0$ でのテイラー展開（マクローリン展開）を x^2 の項まで求めよ. ただし, 3 次の剰余項についても $f'''(x)$ を用いて正しく書け.

(3) (2) の結果を利用して, $(8.1)^{\frac{1}{3}}$ を小数点以下 3 桁まで求めよ.

(愛媛大 2007) (m20074610)

0.56 (1) $1-x^3$ を因数分解せよ.

(2) $1-x^4$ を因数分解せよ.

(3)　$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ を原点 O のまわりで 2 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(4)　$g(x) = \dfrac{1}{1+x}$ を原点 O のまわりで 3 次の多項式プラス剰余項の形にテイラー展開せよ.

(愛媛大 2008)　　(m20084606)

0.57　$f(x) = x^3 - 2x^2$ を $x = 1$ のまわりでテイラー展開し, 最初の第 2 項まで用いて, x についての線形式を求めよ.

（佐賀大 2004）　　(m20044913)

0.58　(1)　関数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開し，x^3 の項まで書け.

(2)　微分方程式 $y''(x) + 9y(x) = 0$ の一般解を求めよ.

(3)　関数 $f(x) = x$（定義域を $-\pi \leq x \leq \pi$ とする）を　$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,]$

と書くとき，a_0，a_n，b_n を求めよ.

(佐賀大 2007)　　(m20074906)

0.59　次の関数について答えよ.　　$f(x) = x - 1 - \log x$　　$(x > 0)$

(1)　関数の増減，凹凸，極値などを調べ，グラフの概形を描け.

(2)　極値をとる点の回りでテイラー展開をし，ゼロでない最低次の項を求めよ.

(3)　次の広義の積分を求めよ.　　$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

(佐賀大 2015)　　(m20154910)

0.60　関数 $(1-x)e^x$ のマクローリン展開 ($x = 0$ を中心とするテイラー展開) を 3 次の項まで求めなさい.

(佐賀大 2018)　　(m20184902)

0.61　関数 $f(x) = \log x$ の $x = 1$ におけるテイラー級数を $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-b)^k$ の形で求めよ.

(佐賀大 2022)　　(m20224914)

0.62　関数 $f(x) = x^{40} - x^{20}$ の $x = 1$ における 2 次のテイラー近似を求めなさい.
さらに，その結果を使って，$f(1.002)$ の近似値を計算しなさい.

(室蘭工業大 2017)　　(m20175503)

0.63　次式を示せ．ただし，e^x のテイラー展開を利用せよ。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \qquad (\alpha : \text{定数})$$

(首都大 2003)　　(m20035904)

0.64　関数 $f(x) = e^x$ について以下の問いに答えなさい.

(1)　$x = 0$ におけるテイラー展開を x^2 の項まで求めなさい.

(2)　(1) の結果を利用して $e^{0.03}$ の近似値を求めなさい.

(首都大 2011)　　(m20115906)

0.65 x の関数 $u,\ v$ の第 n 次までの導関数が連続ならば，部分積分を繰り返し適用して

$$\begin{aligned}\int uv^{(n)}dx &= uv^{(n-1)} - \int u'v^{(n-1)}dx \\ &= uv^{(n-i)} - u'v^{(n-2)} + \int u''v^{(n-2)}dx \\ &= \cdots\cdots \\ &= uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + u''v^{(n-3)} - \cdots \\ &\quad +(-1)^{(n-2)}u^{(n-2)}v' + (-1)^{(n-1)}u^{(n-1)}v + (-1)^n \int u^{(n)}vdx\end{aligned}$$

が成り立つ．このことを利用して下の問いに答えよ．

(1) $u = (b-x)^{n-1}$ としたとき，$u',\ u'',\ \cdots,\ u^{(n-2)},\ u^{(n-1)},\ u^{(n)}$ を求めよ．

(2) $u = (b-x)^{n-1},\ v = f(x)$ としたとき，上記の左辺と右辺の最終行の式との関係を具体的に記述せよ．

(3) (2) の結果において積分範囲を $[a,b]$ として定積分を求め，$x = b$ のとき 0 になる項を整理して $f(b)$ についてのテイラー展開の式を求めよ．剰余項は積分形のままでよい．なお，計算過程も記入せよ．

(宇都宮大 2020)　　(m20206104)

0.66 次の関数の $x = \dfrac{\pi}{2}$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい．

$$f(x) = x\cos x$$

(和歌山大 2015)　　(m20156502)

0.67 次の (1), (2) に答えなさい．ただし，x を実数，z を複素数とする．また，i は虚数単位，e は自然対数の基底である．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - iz + 2}$ の $z = 0$ の周りでのテイラー展開を求めなさい．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}$ を，$z = e^{ix}$ として $|z| = 1$ の閉路積分から求めなさい．

(和歌山大 2017)　　(m20176508)

0.68 次の関数の $x = \pi$ のまわりのテイラー展開を 3 次の項まで求めなさい．

$$f(x) = \sin x$$

(和歌山大 2018)　　(m20186502)

0.69 次の関数 $f(x)$ のマクローリン展開（x=0 のまわりのテイラー展開）を x^3 の項まで求めなさい．

$$f(x) = e^{2x+1}$$

(和歌山大 20221)　　(m20216502)