[選択項目] 年度：1991〜2023 年　文中：定数変化法

0.1 (1) 1 階常微分方程式の一般形は以下のように与えられる．

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad ①$$

この式の解の公式を導く．以下の記述の空欄を埋めなさい．

まず，同次（斉次）方程式の解を求める．① の同次方程式は以下のように表される．

$$y' + P(x)y = \boxed{\quad（ア）\quad}$$

この同次方程式は，変数分離形であるので，解は，任意の定数を C として，以下のように求められる．

$$y = C \cdot \boxed{\quad（イ）\quad} \qquad (\cdot \text{ は積を意味する.})$$

この結果を用いて，① の解を定数変化法で求める．従って，① の解を

$$y = C(x) \cdot \boxed{\quad（イ）\quad} \qquad ②$$

とおく．これを ① の左辺に代入して整理すると

$$y' + P(x)y = C' \cdot \boxed{\quad（イ）\quad} = Q(x)$$

すなわち，

$$C' = Q(x) \cdot \boxed{\quad（ウ）\quad}$$

両辺を積分して $C(x)$ を求め，② に代入すると，① の解の公式が以下のように求められる．

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

(2) (1) を参考にして，微分方程式を解く方法のひとつである，“定数変化法”について説明しなさい．

(3) 次の微分方程式を (1) の公式を用いて解きなさい．

$$y' - y = e^x$$

(横浜国立大 2008)　　(m20081103)

0.2 (1) 次の微分方程式を $y = \dfrac{1}{N}$ と置いて変数変換せよ. ただし, α, β は正の定数, $N = N(t)$ とする.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2$$

(2) 定数変化法により (1) で得られた式を解き, $N(t)$ を求めよ. ただし, $N(0) = N_0$ とする.

(筑波大 2010)　　(m20101311)

0.3 次の $y_1(t)$, $y_2(t)$ に関する連立微分方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} &=& y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} &=& -y_1 + \cos t \end{cases}$$

(1) 上の連立微分方程式の同次方程式（第 2 式右辺の $\cos t$ が無い場合の連立微分方程式）の一般解を求めよ．

(2) 定数変化法を用いて，上の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(富山大 1994)　　(m19942301)

0.4 次の微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 4y = \cos(x)$　　(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos(x)$

(大阪府立大 2003)　　(m20033601)

0.5 方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$ の特殊解を定数変化法を用いて求めよ．

(鳥取大 2009)　　(m20093902)

0.6 (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ を解け．

(2) 区間 $[0, \ell\,]$ での $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の解で $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ を満たす恒等的に 0 でない解を求めよ．

また，a がどのような値のときにそのような解が存在するか答えよ．

(3) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = f(x)$　（ただし，$f(x)$ は既知関数）の一般解を定数変化法により求めることを考える．

同次形 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$ の一般解は，$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax \cdots$ ①

であるとし，c_1 および c_2 を x の関数と考えて方程式の特殊解を求めた結果，一般解が

$$y = \frac{1}{a}\left\{\sin ax \int f(x)\cos ax dx - \cos ax \int f(x)\sin ax dx\right\} + c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

となることを示せ．

(九州大 2006)　　(m20064702)