[選択項目] 年度：1991〜2023 年　 文中：漸化式

0.1 $-\infty < x < \infty$ で連続な関数の列

$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots$

が次の (i) の関係式を満たし，$f_1(x)$ が (ii) で与えられている．

(i) $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \exp[-(x-t)^2]dt$, ここで $n = 1, 2, 3, \cdots$,

(ii) $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2]$.

ここで，exp は指数関数を表し，必要があれば次の定積分の値を用いてもよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2]dx = \sqrt{\pi}$$

次の問に答えよ．

(1) 関数 $f_2(x)$ を求めよ．

(2) n に対応して定まる正定数 a_n, b_n を用いて，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_n}} \exp[-x^2/b_n]$$

a_{n+1}, b_{n+1} をそれぞれ a_n, b_n で表す漸化式 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(3) $a_n, b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を n で表す一般形を求めよ．

(4) 次の定積分の値を求めよ．　$I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx$

(岩手大 1994)　　(m19940307)

0.2 任意の実数 x を変数とする関数の列 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ が次の関係式 (a),(b) を満たすものとする．

(a) $f_0(x) = x^2$

(b) $f_n(x)\, e^{-x} = \displaystyle\int_x^{\infty} f_{n-1}(t)\, e^{-t} dt$

次の問に答えよ．

(1) 次の積分 I, J, K のそれぞれを x の関数として求めよ．

$$I = \int_x^{\infty} e^{-t}dt\ , \quad J = \int_x^{\infty} t\, e^{-t}dt\ , \quad K = \int_x^{\infty} t^2\, e^{-t}dt$$

(2) 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を導入して，関数 $f_n(x)$ を次のようにおく．

$$f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

a_n, b_n のそれぞれを a_{n-1}, b_{n-1} を用いて表す漸化式を求めよ．なお，これらの漸化式において $n \geqq 1$ とする．

(3) 前問の 2 つの数列の一般項 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(岩手大 1996)　　(m19960301)

0.3 x を実数とする．$n\times\ n$ 正方行列である $\boldsymbol{A}_n(x)$ と $\boldsymbol{B}_n$ を以下のように与える．

$$\boldsymbol{A}_n(x)=\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_n=\boldsymbol{A}_n(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

すなわち，$\boldsymbol{A}_n(x)$ は対角要素がすべて $-x$，その両側の斜めの要素が 1，それ以外の要素がすべて 0 の 3 重対角行列である．$\boldsymbol{B}_n$ は $\boldsymbol{A}_n(x)$ において $x=0$ としたときの行列である．

(1) $\boldsymbol{B}_2$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $\boldsymbol{B}_3$ の固有値をすべて求めよ．

(3) $\boldsymbol{B}_n$ の固有値のひとつを λ とする．この λ は $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=0$ を満たすことを示せ．

(4) λ が $\boldsymbol{B}_n$ の固有値であるとき，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|$ は漸化式 $|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=-\lambda|\boldsymbol{A}_{n-1}(\lambda)|-|\boldsymbol{A}_{n-2}(\lambda)|$ を満たすことを示せ．ただし，$|\boldsymbol{A}_0(\lambda)|=1$，$|\boldsymbol{A}_1(\lambda)|=-\lambda$ とする．

(5) $\lambda=-2\cos\theta$，$|\boldsymbol{A}_n(\lambda)|=\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}$ とおくとき，これらが (4) の漸化式を満たすことを示せ．ただし，$\sin\theta\neq 0$ である．

(6) $\dfrac{\sin[\,(n+1)\theta\,]}{\sin\theta}=0$ を満たす θ を求めよ．これを使って，$\boldsymbol{B}_n$ の固有値 $\lambda=-2\cos\theta$ を求めよ．また，求めた固有値は，$n=2$，$n=3$ の場合，それぞれ (1) および (2) で求めた固有値と一致することを示せ．

(東北大 2015)　　(m20150505)

0.4 実数列 $\{a_n\}=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす集合 V は，任意の二つの実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}\in V$ と任意の実数 s に対して，和 $\{a_n\}+\{b_n\}\in V$ とスカラー倍 $s\{a_n\}\in V$ を

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\},\qquad s\{a_n\}=\{sa_n\}$$

と定義することにより，実ベクトル空間となる．V の元 $\{a_n\}$ で，漸化式

$$a_{n+4}=4a_{n+3}+3a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすもの全体のなす，V の部分集合を W とする．以下の問いに答えよ．

(1) W は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\{a_n\}$ を W の元とするとき a_5，a_6 を a_1，a_2，a_3，a_4 を用いて書き表せ．

(3) $i=1,2,3,4$ に対して，実数列 $\{e_n^{(i)}\}=\{e_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$e_n^{(i)}=\begin{cases} 1 & (n=i\ \text{のとき}), \\ 0 & (n=1,2,3,4,\ n\neq i\ \text{のとき}) \end{cases}$$

を満たす唯一つの W の元とする．このとき，$\{e_n^{(1)}\}$，$\{e_n^{(2)}\}$，$\{e_n^{(3)}\}$，$\{e_n^{(4)}\}$ は W の基底であることを示せ．

(4) 線形写像 $T:W\to W$ を，

$$T(\{a_n\})=\{b_n\}\qquad \text{ただし}\qquad b_n=a_{n+1}\ \ (n=1,2,\cdots)$$

で定める．このとき，設問 (3) の基底に関する T の表現行列を求めよ．また，その行列式を求めよ．

(東北大 2019)　　(m20190506)

0.5 任意の自然数 n に対する数列を以下の定積分により定義する．

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}$$

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_2 を求めよ．必要であれば次の関係式を用いよ．

$$\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

(3) I_n に成立する漸化式を求めよ．

(4) 以下に示す極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nI_n}{2^n}$$

(東北大 2020)　　(m20200502)

0.6 実数列 $\{x_n\}$, $n = 0, 1, \cdots$, を次の漸化式で定義する．

$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \cos x_n\,, \quad n = 0, 1, \cdots$$

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$x_0 < x_2 < x_4 < \cdots < x_{2n} < x_{2n+2} < \cdots$$

(2) 数列 $\{x_n\}$ はある正数 $\alpha > 0$ に収束することを示せ．また極限値 α は

$$\cos\alpha = \alpha$$

を満たすことを示せ．

(お茶の水女子大 2013)　　(m20130602)

0.7 数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ がある．この数列の 隣接した 3 項の間には次のような関係式が成り立つ．

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

(1) $a_0 = a_1 = 1$ として，極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．

(2) 上の漸化式をベクトルおよび行列の関係式を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書かれる．この行列を対角化し，またその時の固有ベクトルを求めることにより， $a_0 = a_1 = 1$ を初期値とした極限値

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

を求めよ．また a_n の一般項はどのように書けるか．

(東京大 1997)　　(m19970703)

0.8 p, q を任意の実数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ について，$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を満たす実数 λ と非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を，次の漸化式で与える． $\begin{cases} a_{n+1} = (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} = pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$
ただし，$0 < p < 1$, $0 < q < 1$ とし，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の初項を，それぞれ , a_0, b_0 とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ を p, q, a_0, b_0 を用いて示せ．

(東京大 2006)　　(m20060702)

0.9 1 回の勝負でコインが 1 枚増減するゲームを考える．1 回の勝負で，確率 p でコインが 1 枚増え，確率 $q = 1 - p$ でコインが 1 枚減る．コインの所持数が 0 になった時点で破産となり，N 枚になった時点でゲームに勝利するとする（ただし N は 2 以上の整数である）．破産か勝利した時点でゲームは終了する．以下の問いに答えよ．

(1) コインが k 枚のとき，破産する確率を $R(k)$ とする．ただし $0 \le k \le N$ とする．$R(k)$ が満たす漸化式を求めよ．

(2) $p = q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(3) $p \neq q$ の場合に $R(k)$ を求めよ．

(4) コインが k 枚ある状態から，ゲームが終了するまでの平均勝負数を $G(k)$ とする．$G(k)$ は $1 \le k \le N - 1$ において以下の漸化式を満たすことを説明せよ．

$$G(k) = 1 + pG(k+1) + qG(k-1)$$

(5) $p = q$ の場合に $G(k)$ を求めよ．

(東京大 2015)　　(m20150702)

0.10 赤, 青, 白の 3 色の球が入っている箱から，球を次のルールで取り出すゲームを考える．
プレイヤーは，1 回の挑戦で 1 個の球を無作為に取り出し，引いた球の色に応じて以下を行う．

赤： ゲームを終了する．

青： 引いた青球を箱の中に戻し，ゲームを続行する．

白： 引いた白球を捨て，ゲームを続行する．

この挑戦をゲームが終了するまで繰り返す．最初，箱の中には，赤球が L 個，青球が M 個，白球が N 個あるものとする．以下の問いに答えよ．計算過程も示すこと．また，有理関数はは約分すること．

(1) $L = 2,\ M = 2,\ N = 2$ のとき，1 回目の挑戦でゲームを終了する確率，2 回目の挑戦でゲームを終了する確率，3 回目の挑戦でゲームを終了する確率を，それぞれ求めよ．

(2) ゲームの途中で白球の残りの数が n 個のとき，ゲームの終了までに追加で必要な挑戦回数の期待値を $G(n)$ で表す．

(a) $n \ge 1$ のとき，以下の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(L+n)G(n) = L + M + n + nG(n-1)$$

(b) $G(0)$ を L と M を用いて表せ．また，$L = M$ のときの $G(0)$ を求めよ．

(c) $L = 1,\ M = 1$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(d) $L = 2,\ M = 2$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(e) $L = 3,\ M = 3$ のとき，$G(N)$ を求めよ．

(3) このゲームの終了時点で，それまでに青球を引いた回数が a，白球を引いた回数が b のとき，プレーヤーには $(b-a)$ の点数が与えられるものとする．$L=1,\ M=1$ のとき，点数の期待値が正になる最小の自然数 N を求めよ．

(東京大 2020)　　(m20200702)

0.11 数列 $x_n,\ y_n,\ z_n\ \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を，次の漸化式で定義する．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad (n \geq 0)$$

ただし，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ は実数で与えられているものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A の全ての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(2) A^n を求めよ．

(3) $x_0>0,\ y_0>0,\ z_0>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{{x_n}^2+{y_n}^2+{z_n}^2}<C$ となる定数 $C\ (C>0)$ が存在するための，初期値 $x_0,\ y_0,\ z_0$ に関する必要十分条件を示せ．

(東京大 2020)　　(m20200704)

0.12 数列 $0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots$ は

$$f_0=0\,,\ f_1=1\,,\ f_{k+1}=f_k+f_{k-1}\quad(k=1,2,\cdots)$$

という漸化式によって生成される．k が十分大きな値になると，$\frac{f_{k+1}}{f_k}$ はどのような値に収束するか．

(筑波大 2003)　　(m20031310)

0.13 整数 $n \geqq 0$ に対して定義された不定積分を $I_n=\displaystyle\int\cos^n x\,dx$ とするとき，以下の漸化式を証明しなさい．

$$I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n \geqq 2)$$

(筑波大 2009)　　(m20091316)

0.14 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ は次の漸化式を満たす．

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n+3y_n \\ y_{n+1}=2x_n-3y_n-2z_n \\ z_{n+1}=3x_n+3y_n-z_n \end{cases} \qquad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A を用いて漸化式を $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ と表したとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) $x_0=-5,\ y_0=10,\ z_0=5$ のとき，$x_n,\ y_n,\ z_n$ を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131311)

0.15 N 人のグループで意見が集約される過程を考える．グループ内の各構成員は意見 A か意見 B を持つとする．各時刻 t から $t+1$ にかけて $(t = 1, 2, \cdots)$，構成員 1 人の意見が変化する可能性があるとする．この時，意見 A を持つ人の人数 i は，$i = 1, 2, \cdots, N-1$ の時，<u>確率 $\alpha\ (>0)$ で $i+1$ 人に増え，確率 $\beta\ (>0)$ で $i-1$ 人に減り，確率 $1-\alpha-\beta\ (\geq 0)$ で i 人のまま</u>だとする．また，全員の意見が A か B のどちらかに集約されたら $(i = N$ か $i = 0)$，それ以降は意見変更は起こらないとする．以下の問いに答えよ．

(1) $N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のケースを考える．「時刻 $t = 1$ で $i = 2$ のとき，時刻 $t = 6$ までに全員の意見が A に集約されている確率」を求めよ．

(2) 「時刻 t で意見 A の数が i 人のとき，時刻 $t \to \infty$ で全員の意見が A に集約されている確率」を $x(i, t)$ と書くこととする．$N = 3$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$ のとき，$x(2, 1)$ を求めよ．

(3) 任意の N, i, α, β に関して $x(i, 1)$ は $x(i, 2)$ と等しくなる．理由を述べよ．

(4) 上記の問題文の下線部に注意し，$x(i, 1)$ を，$x(i, 2)$, $x(i+1, 2)$, $x(i-1, 2)$, α, β のすべてを用いた式で表せ．

(5) $x(i, 1) = x(i, 2) = x_i\ (i = 0, 1, 2, \cdots, N)$ とおき，x_i についての漸化式により x_1 を求めよ．

(筑波大 2013)　　(m20131318)

0.16 逆正接関数 $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $y = \mathrm{Tan}^{-1}x$ とおき，$x = \tan y$ とすることで，$\dfrac{dy}{dx}$ を y の関数として求めよ．

(2) $(1+x^2)f'(x) = 1$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{(n)}(x)$ に関する漸化式 $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$ が成り立つことを示せ．ただし，n は 1 以上の整数である．

(4) $f^{(n)}(0)$ に関する漸化式を解き，m を 0 以上の整数として $f^{(2m)}(0)$ および $f^{(2m+1)}(0)$ を求めよ．

(筑波大 2014)　　(m20141309)

0.17 次の漸化式について考える．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 2b_n \end{cases} \qquad a_1 = 1,\ b_1 = 0$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たす行列 A を求めよ．

(2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P，およびその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(4) a_n, b_n の一般項を求めよ．

(筑波大 2018)　　(m20181302)

0.18 Newton 法は方程式 $f(x) = 0$ を満たす解 x の近似解を数値的に求める手法の 1 つである．具体的な手順は，以下の通りである．まず，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

を構成する．ここで，$f'(x_n) = \dfrac{d}{dx}f(x_n) \neq 0$ とする． 次に，この漸化式を適当な初期値 x_0 の下で解き，数列 x_1, x_2, $\cdots$ を計算する． 解が存在する場合には，その収束値 x_∞ は $f(x_\infty) = 0$ を満たす．上述の Newton 法に関して，以下の設問に答えよ．

(1) Newton 法で x_0 から x_1 を求めることは，点 $(x_0,\ f(x_0))$ における $y=f(x)$ の接線と x 軸の交点を求めることになっている．これを示せ．

(2) Newton 法の漸化式から得られる数列 $\{x_n\}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$ は，初期値 x_0 が $f(x)=0$ の解の近傍にあるときに収束し，その収束値は $f(x)=0$ の解を与える．これを以下の＜定理＞を用いて示せ．ただし，$f'(x)\neq 0$ かつ $f''(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$ は連続であるとする．

＜定理＞

関数 $\varphi(x)$ が閉区間 I で微分可能で，$\varphi(x)$ の値域は I に含まれ，I では

$$\left|\frac{d}{dx}\varphi(x)\right| \leq k < 1$$

であるとする．このとき，反復法 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ によって方程式 $x=\varphi(x)$ のただ 1 つの根 x_∞ が得られる．

(筑波大 2018)　　(m20181306)

0.19 次の関数について以下の問いに答えよ．　$f(x)=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

(1) $f'(x)g(x)=1$ を満たす $g(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)g(x)=1$ に積の微分に関するライプニッツの公式を適用して，次の漸化式が成り立つことを示せ．

$$(x^2-1)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0 \qquad (n \geqq 1)$$

(埼玉大 2019)　　(m20191401)

0.20 整数 x の n 乗 x^n を計算するときに，次の漸化式

$$x^k=\begin{cases} x^\ell \times x^\ell & (k=2\ell\text{のとき}) \\ x^{2\ell}\times x & (k=2\ell+1\text{ のとき}) \end{cases}$$

を再帰的に適用すると効率よく求められることが，2200 年以上前から知られている．

(1) $n=15$ のとき，上の漸化式を適用して x^{15} を分解すると，

$$\begin{array}{ccccc}
x^{15} & = & x^{\boxed{ア}} & \times & x \\
x^{\boxed{ア}} & = & x^{\boxed{イ}} & \times & x^{\boxed{イ}} \\
x^{\boxed{イ}} & = & x^{\boxed{ウ}} & \times & x \\
x^{\boxed{ウ}} & = & x^{\boxed{エ}} & \times & x^{\boxed{エ}} \\
x^{\boxed{エ}} & = & x^{\boxed{オ}} & \times & x \\
x^{\boxed{オ}} & = & x^{\boxed{カ}} & \times & x^{\boxed{カ}}
\end{array}$$

となるので，これを下の行から逆順にたどれば，x^{15} が 6 回の乗算で求められる．

(2) $n=15$ に対して (1) は実は最短手順ではなく，途中の値を 1 個保存することにより，5 回の乗算で x^{15} を求めることができる．その手順の 1 つは，

$$\begin{array}{ccccc}
x & \times & x & \longrightarrow & x^2 \\
x^{\boxed{キ}} & \times & x^{\boxed{ク}} & \longrightarrow & x^{\boxed{ケ}} \\
x^{\boxed{コ}} & \times & x^{\boxed{サ}} & \longrightarrow & x^{\boxed{シ}} \\
x^{\boxed{ス}} & \times & x^{\boxed{セ}} & \longrightarrow & x^{\boxed{ソ}} \\
x^{\boxed{タ}} & \times & x^{\boxed{チ}} & \longrightarrow & x^{15}
\end{array}$$

（ただし，$x^{\boxed{ツ}}$を保存した．）

と表される．($\boxed{キ}$～$\boxed{ツ}$には同じ数字が入る箇所もある．また，$\boxed{キ}$と$\boxed{ク}$のように交換可能なものについては，解答順は問わない．)

(図書館情報大 2002)　　(m20021604)

0.21 n を 2 以上の自然数として $n\times\ n$ 行列 $A_n=(a_{ij})$ を次で定める．

$$
\begin{array}{rcll}
a_{ii} & = & 1 & (i=1,2,\cdots,n) \\
a_{i,i+1} & = & 1 & (i=1,2,\cdots,n-1) \\
a_{i+1,i} & = & -1 & (i=1,2,\cdots,n-1) \\
a_{ij} & = & 0 & (|i-j|\geq 2)
\end{array}
$$

たとえば

$$
A_5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

である．

(1) $D_n=\det A_n$ とおく．A_n の第 n 列で余因子展開し，D_n に関する漸化式を求めよ．

(2) D_5 を求めよ．

(新潟大 1998)　　(m19982005)

0.22 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．$I_n=\displaystyle\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$　このとき，次の問いに答えよ．

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n\geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n=\dfrac{1}{e}+(n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n=\dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2007)　　(m20072210)

0.23 n を自然数とし，I_n を次の広義積分で定める．　$I_n=\displaystyle\int_1^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$

(1) I_1 の値を求めよ．

(2) $n\geq 2$ のとき，次の漸化式が成り立つことを示せ．　$I_n=\dfrac{1}{e}+(n-1)I_{n-1}$

(3) 次式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ．　$I_n=\dfrac{(n-1)!}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$

(4) 次の極限値を求めよ．　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_n}{(n-1)!}$

(金沢大 2016)　　(m20162214)

0.24 p と q を実数とする．行列

$$
A=\begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

が異なる実数の固有値 α と β をもつとき，次の問いに答えよ．

(1) p と q が満たす条件を求めよ．

(2) 次を満たす正則行列 P の一つを，α と β を用いて与えよ．

$$
P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}
$$

(3) 漸化式

$$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を，$a_1,\ a_2,\ \alpha,\ \beta$ を用いて表せ．

(金沢大 2020)　　(m20202201)

0.25　2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ が次の様に定義され，

$$f(x) = \int_0^x e^t(\sin t + \cos t)dt$$

$$g(x) = \int_0^x e^t(\cos t - \sin t)dt$$

また，$f^{(n)}(x),\ g^{(n)}(x)$ を，それぞれ，$f(x),\ g(x)$ の n 次導関数とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2) $f^{(1)}(x)$ と $g^{(1)}(x)$ を求めよ．

(3) $f^{(2)}(x)$ と $g^{(2)}(x)$，および，$f^{(3)}(x)$ と $g^{(3)}(x)$ を求めよ．

(4) $n \geqq 2$ として，$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ それぞれを $f^{(n-1)}(x)$ および $g^{(n-1)}(x)$ を用いた漸化式で表せ．

(富山大 2019)　　(m20192305)

0.26　2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 及びベクトル $\boldsymbol{q}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下のような漸化式を定義する．このとき，以下の設問に答えよ．

$$\boldsymbol{q}_{n+1} = A\boldsymbol{q}_n \quad (n \text{ は整数})$$

(1) $\boldsymbol{q}_n$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \dfrac{{}^T\boldsymbol{q}_n\, A\, \boldsymbol{q}_n}{{}^T\boldsymbol{q}_n\, \boldsymbol{q}_n}$ 及び $\boldsymbol{p}_n = \dfrac{\boldsymbol{q}_n}{|\boldsymbol{q}_n|}$ とするとき，$\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\boldsymbol{p}_n$ を求めよ．ここで，${}^T\boldsymbol{q}_n$ は $\boldsymbol{q}_n$ を転置したベクトルである．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及び $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_n$ を求めよ．

(福井大 2018)　　(m20182406)

0.27　水 1ℓ を 2 つの瓶 A, B に適当に分け，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ $x_0,\ y_0$ とする．

「瓶 A 中の水の 1 割と，瓶 B 中の水の 2 割を，それぞれ小瓶 C, D へ抜き取り，小瓶 C の水を瓶 B に，小瓶 D の水を瓶 A へ入れる」という手続きを n 回繰り返した後，瓶 A, 瓶 B に入っている水の量をそれぞれ $x_n,\ y_n$ とするとき, 以下の問いに答えよ．

(1) $x_n,\ y_n$ を次のように行列を用いた漸化式で表すとき，行列 T を求めよ．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(2) 行列 T の固有値および固有ベクトルを求めよ．

(3) $x_n,\ y_n$ を，$x_0,\ y_0$ および n を用いて表せ．

(4) $n \to \infty$ としたときの，x_n/y_n の値を求めよ．

(名古屋大 2008)　　(m20082801)

0.28　次の漸化式で定義される数列を考える．

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3x_n + \frac{c^4}{x_n^3}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

数列 $\{x_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，c は任意の正の定数である．

(名古屋大 2014)　　(m20142804)

0.29　(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ の値を求めよ．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(4)　$I_n = \displaystyle\int (\log x)^n\,dx$ の漸化式を導き，I_3 を求めよ．なお，n は 0 以上の整数とする．

(名古屋大 2022)　　(m20222803)

0.30　F_n が次のように定義されているとする．

$$F_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$$

このとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は正の整数である．

(1)　F_1 を求めよ．

(2)　n が 2 より大きいときの漸化式は次のようになることを示せ．

$$F_n = \frac{n-1}{2}F_{n-2}$$

(奈良女子大 2009)　　(m20093206)

0.31　初項 $a_1 = \sqrt{2}$ であり，次の漸化式を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．

$$a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

数学的帰納法を用いて，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，不等式 $a_n < 2$ を示せ．

(2)　数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(奈良女子大 2016)　　(m20163203)

0.32　関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

この関数は $|z| < 2\pi$ において解析的である．テイラー展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

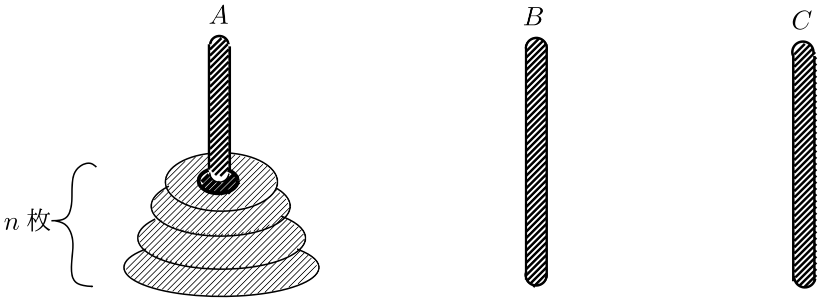
のように表し，ベルヌーイ数 B_n，$n = 0, 1, 2, \cdots$ を定義する．$B_0 = 1$，$B_1 = -\frac{1}{2}$ を示せ．さらに，$(e^z - 1)f(z) = z$ のべき級数展開から，B_n が次の漸化式を満たすことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

ただし，$\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す．

(京都大 2002)　　(m20023305)

0.33 以下の問題は，ハノイの塔と呼ばれる問題である．以下の設問 (1)-(3) に答えよ．



ハノイの塔の問題

図のように，n枚の円盤を積んだ塔がある．最初，３本の棒A,B,Cのうち，Aに全ての円盤を大きいものから小さいものへ順に積んである．このn枚の円盤全てを,Cの棒に移動したい．ただし，移動は，棒の最上の円盤１枚を別の棒の最上に動かすことしかできない（1回に２枚以上動かせない）．また，大きい円盤を小さい円盤の上に置いてはいけない．さらに，棒以外のところに円盤を置いてはいけない．

例えば n が２のとき，$A \to B$，$A \to C$，$B \to C$ と３回円盤を動かすことで，全てを移動できる．（$A \to B$ は，A の棒の最上の円盤を B の棒の最上に移動して置くことを意味する.）

(1) n が３のとき，全ての円盤を移動する最小の手順を $A \to B$，$\cdots$ のように記述せよ．

(2) 一般に n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの，円盤の総移動回数を $X(n)$ とする．$X(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(3) ハノイの塔の問題に，$A \to C$ および $C \to A$ の移動を禁止する制約を追加する（他の制約は同じ）．この制約下で，n 枚 $(n \geq 1)$ の円盤全てを最小の手順で移動したときの円盤の総移動回数を $Y(n)$ とする．$Y(n)$ を漸化式で表し，その一般項を求めよ．

(大阪大 2002)　　(m20023501)

0.34 n 枚のコインを１列に並べる．各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの２通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H, 裏を T で表すと, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の２通り置き方があるので $f(1) = 2$ であり，$n = 2$ のときは (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) の４通りの置き方があるので $f(2) = 4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

(2) 裏のコインを２枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の２通りの置き方があるので $g(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H)$ の３通りの置き方があるので $g(2) = 3$ である（ここで, (T,T) の置き方は裏が２枚続いているので許されないことに注意）. このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3)$, $g(4)$ を求めよ.

(b) n を３以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1)$, $g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.

(大阪大 2005)　　(m20053507)

0.35 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 4 \quad b_{n+2} = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$$

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 N 項までの和 A_N を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(3) 第 n 項が $c_n = b_{n+1} - b_n$ で与えられる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $n \to \infty$ のとき $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ，収束する場合にはその極限値を求めよ．

(大阪大 2008)　　(m20083510)

0.36 次に示す漸化式により帰納的に定められた数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数を表す．

$$a_1 = 2\,, \quad a_2 = 6\,, \quad a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$$

(1) 第 n 項が $b_n = a_{n+1} - a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ

(3) 次の式で定義される和 S_n を求めよ．

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{a_m}$$

(4) $n \to \infty$ における S_n の極限値を求めよ．

(大阪大 2011)　　(m20113501)

0.37 a, b, c, d を $ad - bc = 1$, $0 < |c| < 1$ を満たす実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 次の漸化式で定義される行列の列を考える.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = A\,,$$

$$A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \cdots)\,,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

とおく. $M = \dfrac{1}{1 - |c|}$ とおいて, 以下 $|a| < M$ を仮定する.

(1) $a_n d_n - b_n c_n = 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つことを示せ.

(2) c_n を計算しなさい.

(3) $|a_n| < M$ を証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053804)

0.38 a, b を $a \geq b > 0$ を満たす実数とする. $a_0 = a$, $b_0 = b$ より出発して, 漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\,,\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

で数列 a_n, b_n を定める.

(1) $a_n \geq b_n$ を示せ（相加平均 $\geq$ 相乗平均 を示せ）.

(2) a_n は単調減少, b_n は単調増加であることを証明せよ.

(神戸大 2005)　　(m20053805)

0.39 次の漸化式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ について次の問いに答えよ.　$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$

(1) $a_1 = 2$ または $a_1 = 4$ のとき，$a_n = a_1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を確認せよ.

(2) $a_1 < 2$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(3) $a_1 > 4$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ.

(4) $4 > a_1 > 2$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を示せ.

(神戸大 2007)　　(m20073807)

0.40 (1) 微分方程式 $y' = -y - 1,\ y(0) = 0$ の解 $y(x)$ を求めよ.

(2) 次の漸化式

$$y_{k+1} = (1-h)y_k - h \quad (k \geq 0) \quad y_0 = 0$$

で決まる数列 y_k の一般項を求めよ．ここで h は 0 でない定数とする.

(3) x, n を正整数，$h = 1/n$ とおくとき,

$$y_{xn} \to y(x)\ , \quad n \to +\infty$$

を示せ.

(神戸大 2021)　　(m20213804)

0.41 初期値 $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ と漸化式 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ で定義される数列 $\{F_n\}$ をフイボナッチ数列という．例えば，$F_3 = F_2 + F_1 = 2,\ F_4 = F_3 + F_2 = 3$ である．このとき，次の問いに答えよ.

(1) F_6 を求めよ．また，行列式

$$\det \begin{pmatrix} F_4 & F_5 \\ F_5 & F_6 \end{pmatrix}$$

の値を求めよ.

(2) $n \geqq 1$ に対して，2 次の正方行列 A_n を

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det A_n = (-1)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

(3) $n \geqq 1$ に対して，3 次の正方行列 B_n を

$$B_n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+1} & F_{n+2} & F_{n+3} \\ F_{n+2} & F_{n+3} & F_{n+4} \end{pmatrix}$$

によって定めるとき，$\det B_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(4) 上の問い (3) で定義した B_n の余因子行列を $\tilde{B}_n$ とかくとき，$n \geqq 1$ に対して，$\det \tilde{B}_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(岡山大 2017)　　(m20174003)

0.42 次の積分 I_n について以下の問いに答えよ.

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \quad (n \text{ は零または正の整数})$$

(1) I_0 を求めよ.

(2) I_n と I_{n+1} の間に成り立つ漸化式を求めよ.

(3) 漸化式を利用することにより I_n を求めよ.

(広島大 2014)　　(m20144103)

0.43 $I_n(x)$ が次の式で定義されるとき，以下の問いに答えよ．ただし，n は 0 以上の整数とする.

$$I_n(x) = \int_0^x \sin^n t\,dt$$

(1) $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ をそれぞれ求めよ.

(2) 等式 $\sin^n t = \sin^{n-1} t \cdot \sin t$ を用いて，n が 2 以上のとき，$I_n(x)$ の漸化式を求めよ.

(広島市立大 2007)　　(m20074202)

0.44 (1) $\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{3}{5}$ を満たす x の値を求めよ．　ただし，$\tan^{-1} x$ は逆正接関数とし $\sin^{-1} x$ は逆正弦関数とする.

(2) $y = (x^2+1)e^{-3x}$ の n 次導関数をライプニッツの公式を用いて求めよ.

(3) 自然数 n に対して $I_n = \displaystyle\int \sin^n x dx$ と定める．このとき次の漸化式を示せ.

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

(愛媛大 2017)　　(m20174614)

0.45 実数 p に対して n 次正方行列 A_n を以下のように定める.

$$(A_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \in \{1, 2, \cdots, n-1\} \\ p & i = j = n \\ -1 & |i - j| = 1 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ただし，$(A_n)_{i,j}$ は行列 A_n の (i, j) 成分を表す．また，$A_1 = p$ とする.

(1) $p = \dfrac{2}{3}$ のとき A_3 の階数を求めよ.

(2) $p = 1$ のとき A_3 の逆行列を求めよ.

(3) A_n の行列式 $|A_n|$ を a_n とおく．数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$ のみたす漸化式を導き，a_n，$n = 1, 2, \cdots$, を求めよ.

(九州大 2007)　　(m20074709)

0.46 xy 平面上の任意の点の 1 秒ごとの移動の様子が，次の行列 A で表される一次変換によって与えられるとする.

$$A = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

xy 平面上の点 (x_0, y_0) が n 秒後に到達する点 (x_n, y_n) は，次の漸化式によって与えられる．ただし，n は $n \geq 1$ の整数.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

(1) 原点から見たいくつかの方向では，時間と共に向きが変化しない．すなわち，ゼロベクトルでない $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し，次の関係式が成り立つ．

$$A\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}$$

上式を満たす固有値 λ の値 a, b と，それぞれに対する固有ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ を求めよ．ただし，$a < b$ とし，(p, q)，(r, s) はそれぞれ整数の組で，$p > 0$，$r > 0$ とする．

(2) 前問の結果を用いて，$P = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

(3) 座標 (x_n, y_n) を (x_0, y_0) と n を用いて表せ．
（ヒント）$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = p^{-1}A^nP$

(4) 前問の (x_0, y_0) が，媒介変数 s を用いて $(x_0, y_0) = (s, s)$ で表される直線上の任意の点であるとする．s が実数全体を動くとき，(x_n, y_n) の描く図形の方程式を求めよ．また，$n \to \infty$ のとき，この図形はどのような図形に近づくか答えよ．

(九州大 2008)　　(m20084701)

0.47　確率変数 X が次の形の確率密度関数を持つ．

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2} & (|x| \leqq 2) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

(1) 確率 $P(-1 \leqq X \leqq 1)$ を求めよ．

(2) $I_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta$　は次の漸化式　$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$　$(n \geqq 2)$　を満たすことを示せ．

(3) 期待値 $E[X^4]$ を求めよ．

(九州大 2018)　　(m20184703)

0.48　xy 座標平面上の点 P の移動について考える．

時刻 $t = n$（n は正の整数）における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{p}_n = (x_n,\ y_n)$ を次の漸化式で定める．

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

点 P の始点は，正の実数 s を用いて，$\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0) = (1, s)$ で与えられるとする．

以下の問いに答えよ．

(1) (x_n, y_n) を n と s を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ．

(九州大 2019)　　(m20194701)

0.49　次の漸化式で表される数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$$

この漸化式は行列を用いて次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えなさい．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値および対応する固有ベクトルを求めなさい.

(2) $B=P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P を用いて，対角行列 B を求めなさい.

(3) 行列 A^n を求めなさい．ただし，A^n は次式で定義される.

$$A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{n}$$

(4) 上記 (3) の結果を利用して，$a_0=0,\ a_1=1$ を初期値としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい.

(熊本大 2020)　　(m20205203)