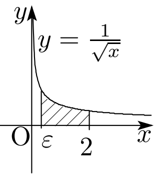
積分の応用《基本演習》　(NO.1)　解答例 1 枚目

1. 次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$



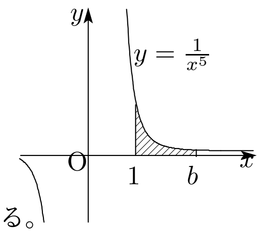
(解)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は $x=0$ を除く区間 $(0,2]$ で連続である。

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^2 x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\right]_\varepsilon^2=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^2=\lim_{\varepsilon\to+0}(2\sqrt{2}-2\sqrt{\varepsilon})=2\sqrt{2}$$ 〃

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx$



(解)$y=\dfrac{1}{x^5}$ は区間 $[1,+\infty)$ で連続である。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^5}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-5}dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}\right]_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4}x^{-4}\right]_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4x^4}\right]_1^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{\left(-\frac{1}{4b^4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{1}{4}$$ 〃

2. 数直線上を動く点 P の時刻 t における速度を $v(t)=24-6t$ とするとき、次の各問に答えよ。
ただし、点 P の $t=0$ における座標を 10 とする。

(1) 時刻 t における動点 P の座標を求めよ。

（解）$\displaystyle x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt=10+\int_0^t(24-6t)dt$

$=10+[24t-3t^2]_0^t=10+24t-3t^2$ 〃

(2) 動点 P が再び出発点に戻るまでに動いた<u>道のり</u>（実際に動いた距離）を求めよ。

（解）再び出発点に戻る時刻は $x(t)=10$ であるから

$24t-3t^2=0$　$\therefore t(t-8)=0$　$t>0$ より　$t=8$

また、折り返し点に達した時刻は

$v(t)=24-6t=0$　とおくと　$t=4$

$0\leqq t\leqq 4$ のとき

$24-6t\geqq 0$ だから　$|24-6t|=24-6t$

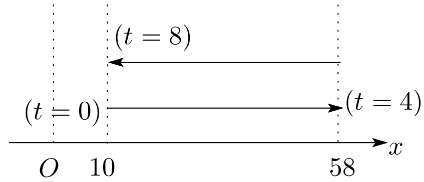
$4\leqq t\leqq 8$ のとき

$24-6t\leqq 0$ だから　$|24-6t|=-(24-6t)$

$$S=\int_0^8|24-6t|dt=\int_0^4(24-6t)dt+\int_4^8(-24+6t)dt$$

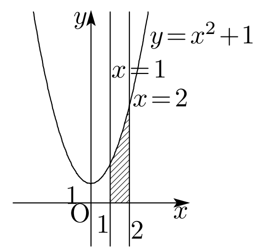
$$=\left[24t-3t^2\right]_0^4+\left[-24t+3t^2\right]_4^8$$

$$=(96-48)+(-192-192)-(-96+48)=96$$ 〃



3. 次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=x^2+1$, x 軸 , 2 直線 $x=1$, $x=2$ で囲まれた図形



（解）$\displaystyle S=\int_1^2|y|dx$

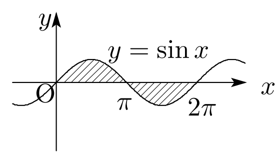
$$=\int_1^2(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{7}{3}+1=\frac{10}{3}$$ 〃

(2) 曲線 $y=\sin x(0\leqq x\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた図形



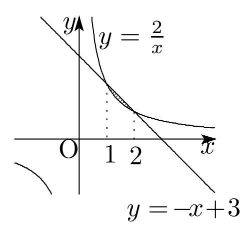
（解）$\displaystyle S=2\int_0^\pi \sin x dx$

$$=2\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$

$$=-2\Big[\cos x\Big]_0^\pi$$

$$=-2(\cos\pi-\cos 0)=-2\{(-1)-1\}=4$$ 〃

(3) 曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ と直線 $y=-x+3$ で囲まれた図形



（解）$\displaystyle\int_1^2\left\{(-x+3)-\frac{2}{x}\right\}dx$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x-2\log|x|\right]_1^2$$

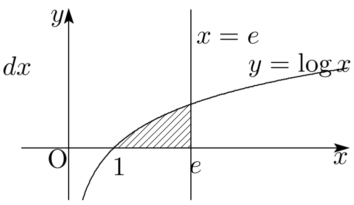
$$=(-2+6-2\log 2)-\left(-\frac{1}{2}+3-2\log 1\right)$$

$$=4-2\log 2-\frac{5}{2}+2\cdot 0=\frac{3}{2}-2\log 2$$ 〃

≪参考１≫ 曲線 $y=\log x$ と直線 $x=e$ および x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

（解）$\displaystyle\int 1dx=x$ だから　部分積分法によって

$$S=\int_1^e \log x dx=\int_1^e 1\cdot\log x dx$$
$$=\Big[x\cdot\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(\log x)'dx$$
$$=\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx$$

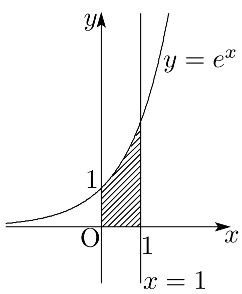


$$=\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e 1dx$$
$$=\Big[x\log x\Big]_1^e-\Big[x\Big]_1^e$$
$$=(e\log e-1\log 1)-(e-1)=1 \quad〃$$

4. 次の図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) 曲線 $y=e^x$ と x 軸 , y 軸 , 直線 $x=1$ で囲まれた図形

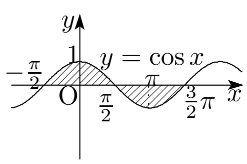
（解）$\displaystyle V=\pi\int_0^1 y^2dx$



$$=\pi\int_0^1(e^x)^2dx$$
$$=\pi\int_0^1 e^{2x}dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^1$$
$$=\tfrac{\pi}{2}\left(e^2-1\right) \quad〃$$

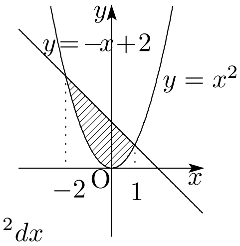
(2) 曲線 $y=\cos x(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi)$ と x 軸で囲まれた図形

（解）$\displaystyle V=4\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dx$



$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$
$$=4\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi^2 \quad〃$$

(3) 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=-x+2$ で囲まれた図形

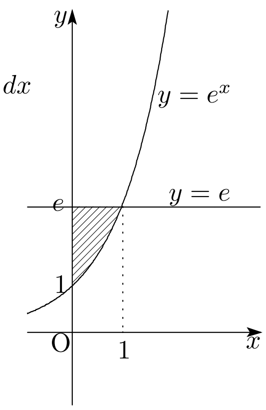


（解）

$$V=\pi\int_{-2}^1(-x+2)^2dx-\pi\int_{-2}^1(x^2)^2dx$$
$$=\pi\int_{-2}^1(-x+2)^2dx-\pi\int_{-2}^1 x^4dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-x+2)^3\right]_{-2}^1-\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-2}^1$$
$$=-\frac{\pi}{3}\Big[(-x+2)^3\Big]_{-2}^1-\frac{\pi}{5}\Big[x^5\Big]_{-2}^1$$
$$=-\frac{\pi}{3}(1-64)-\frac{\pi}{5}\{1-(-32)\}=\frac{72}{5}\pi \quad〃$$

≪参考２≫ 曲線 $y=e^x$ と直線 $y=e$ および y 軸とで囲まれる図形を A とする。

(1) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



（解）$\displaystyle V=\pi\int_0^1 e^2dx-\pi\int_0^1(e^x)^2dx$

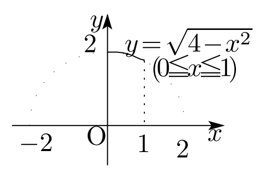
$$=\pi\int_0^1 e^2dx-\pi\int_0^1 e^{2x}dx$$
$$=\pi\Big[e^2x\Big]_0^1-\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\pi e^2\Big[x\Big]_0^1-\frac{\pi}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^1$$
$$=\pi e^2(1-0)-\frac{\pi}{2}(e^2-e^0)$$
$$=\frac{\pi}{2}(2e^2-e^2+1)=\frac{\pi}{2}(e^2+1) \quad〃$$

(2) 図形 A の面積を求めよ。

（解）$\displaystyle S=\int_0^1(e-e^x)dx=\Big[ex-e^x\Big]_0^1$

$$=(e\cdot1-e^1)-(e\cdot0-e^0)=(e-e)-(0-1)=1 \quad〃$$

5. 曲線 $C:y=\sqrt{4-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ について、次の問に答えよ。



(1) 曲線 C の長さを求めよ。

（解）$y=\sqrt{4-x^2}$

$$=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$y'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2)'$$
$$=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx=2\left[\ \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1$$
$$=2\left(\ \mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}0\right)=2\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{3} \quad〃$$

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$\displaystyle S=2\pi\int_0^1|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^1\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\pi\int_0^1 1dx$$
$$=4\pi\Big[x\Big]_0^1=4\pi \quad〃$$

積分の応用《基本演習》　(NO.1)　解答例 2枚目

≪参考３≫ 曲線 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と直線 $x=1$ および x 軸、y 軸で囲まれる図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。

（解）$S=\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx=\int_0^1 \sqrt{2^2-x^2}dx$

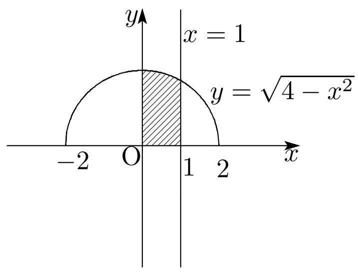
$=\dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{2^2-x^2}+2^2\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}+4\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}\right)-\left(0+4\ \mathrm{Sin}^{-1}0\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{3}+4\cdot\dfrac{\pi}{6}\right)-\left(0+4\cdot 0\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$　〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



（解）$V=\pi\int_0^1 y^2dx$

$=\pi\int_0^1(\sqrt{4-x^2})^2dx$

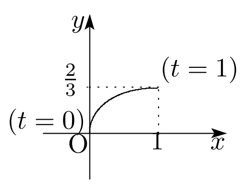
$=\pi\int_0^1(4-x^2)dx$

$=\left[4x-\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=\pi\left\{\left(4-\dfrac{1}{3}\right)-(0-0)\right\}=\dfrac{11}{3}\pi$　〃

6. 媒介表示 $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で表される曲線 C がある。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。



（解）$\dfrac{dx}{dt}=2t$,

$\dfrac{dy}{dt}=1-t^2$

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{(2t)^2+(1-t^2)^2}=\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}$

$=\sqrt{1+2t^2+t^4}=\sqrt{(1+t^2)^2}=1+t^2$

$L=\int_0^1\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1(1+t^2)dt$

$=\left[t+\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^1=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$　〃

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$S=2\pi\int_0^1|y|\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$=2\pi\int_0^1\left(t-\dfrac{1}{3}t^3\right)(1+t^2)dt$

$=2\pi\int_0^1\left(t+\dfrac{2}{3}t^3-\dfrac{1}{3}t^5\right)dt$

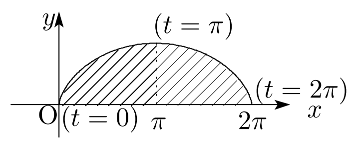
$=2\pi\left[\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{6}t^4-\dfrac{1}{18}t^6\right]_0^1$

$=2\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{18}\right)$

$=2\pi\left(\dfrac{9+3-1}{18}\right)=\dfrac{11}{9}\pi$　〃

7. 媒介表示 $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ で表される曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（解）

$\dfrac{dx}{dt}=2(1-\cos\theta)$

$S=2\cdot\int_0^\pi\left|y\dfrac{dx}{dt}\right|dt$

$=2\int_0^\pi|\,2(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)\,|dt$

$=8\int_0^\pi(1-\cos t)^2dt=8\int_0^\pi\left(2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)^2dt$

$=32\int_0^\pi\sin^4\dfrac{t}{2}dt$　　よって　$\theta=\dfrac{t}{2}$　とおくと

$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore 2d\theta=dt$

t	$0 \to \pi$
θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$

$S=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cdot 2d\theta=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta$

$=64\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=12\pi$　〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解）$V=2\cdot\pi\int_0^\pi y^2\left|\dfrac{dx}{dt}\right|dt$

$=2\pi\int_0^\pi\{2(1-\cos t)\}^2\,|2(1-\cos t)|\,dt$

$=16\pi\int_0^\pi(1-\cos t)^3dt=16\pi\int_0^\pi\left(2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)^3dt$

$=128\pi\int_0^\pi\sin^6\dfrac{t}{2}dt=128\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cdot 2d\theta$

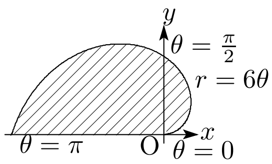
$=256\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta=256\pi\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=40\pi^2$　〃

8. 曲線 $C\ :\ r=6\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ と半直線 $\theta=\pi$ で囲まれる図形を A とするとき、次の問に答えよ。

(1) 図形 A の面積を求めよ。

（解）$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} r^2 d\theta$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}(6\theta)^2 d\theta$



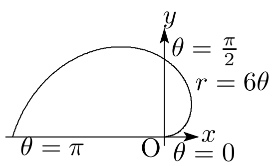
$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}36\theta^2 d\theta$

$=18\displaystyle\int_0^{\pi}\theta^2 d\theta=18\left[\dfrac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\pi}$

$=6\left[\theta^3\right]_0^{\pi}=6(\pi^3-0)=6\pi^3$ 〃

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

（解）$\dfrac{dr}{d\theta}=6$



$\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}$

$=\sqrt{(6\theta)^2+6^2}$

$=\sqrt{36\theta^2+36}=\sqrt{36(\theta^2+1)}=6\sqrt{\theta^2+1}$

$L=\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta$

$=\displaystyle\int_0^{\pi}6\sqrt{\theta^2+1}d\theta=6\int_0^{\pi}\sqrt{\theta^2+1}d\theta$

$=6\cdot\dfrac{1}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1}+1\cdot\log\left|\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right|\right]_0^{\pi}$

$=3\left\{\left(\pi\sqrt{\pi^2+1}+\log(\pi+\sqrt{\pi^2+1})\right)-(0+0)\right\}$

$=3\left\{\pi\sqrt{\pi^2+1}+\log(\pi+\sqrt{\pi^2+1})\right\}$ 〃

《参考 4》A が 0 でない定数のとき, 次の公式を証明せよ.

$$\int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\ \right|\right)$$

(解) (右辺)'

$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{x^2+A}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}+A\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}+A\frac{\frac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}}}{x+\sqrt{x^2+A}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}+\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}\right)=\sqrt{x^2+A}$$

$$\therefore\ \int\sqrt{x^2+A}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\ \right|\right)$$

9. ある種の細菌を培養すると、その増加率は現在の数に比例する。3 時間後には 1 万個、4 時間後には 5 万個だったとするとき、次の問に答えよ。

(1) t 時間後の細菌の数を $N(t)$ とし、比例定数を k とするとき、$N(t)$ を表す式を求めよ。

（解）細菌の増加率は $\dfrac{d}{dt}N(t)$ であるから

$\dfrac{dN}{dt}=kN$

この微分方程式を変数分離法で解くと

$\dfrac{1}{N}dN=kN$

$\displaystyle\int\frac{1}{N}dN=\int kdt$

$\log|N|=kt+c$　(c は積分定数)

$|N|=e^{kt+c}$

$\therefore N=\pm e^c\cdot e^{kt}$

ここで　$\pm e^c=A$　とおくと

$N=Ae^{kt}$

$\therefore N(t)=Ae^{kt}$

$t=0$ とおくと　$N(0)=A\cdot e^0=A$

$\therefore N(t)=N(0)e^{kt}$ 〃

(2) 最初にいた細菌の数を求めよ。

（解）条件より

$N(3)=N(0)\cdot e^{3k}=10000\cdots$

$N(4)=N(0)\cdot e^{4k}=50000\cdots$

，から　$N(0)e^{4k}=5\cdot N(0)e^{3k}$

$N(0)\neq 0$ より　$e^{4k}=5e^{3k}$

$\dfrac{e^{4k}}{e^{3k}}=5$　$\therefore e^k=5$

から　$N(0)\cdot(e^k)^3=10000$

$\therefore N(0)\cdot 5^3=10000$

$\therefore N(0)=\dfrac{10000}{125}=80$ 〃

よって，最初にいた最近の数は 80 個である.