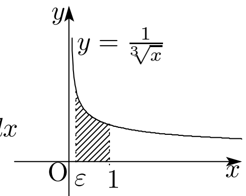
積分の応用《基本演習》　(NO.2)　解答例 1 枚目

1. 次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$



（解）与式 $\displaystyle=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$\displaystyle=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{3}}dx$

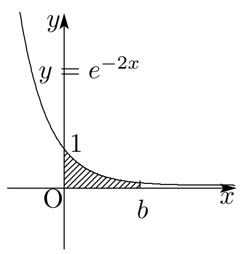
$\displaystyle=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{1}{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right]_\varepsilon^1$

$\displaystyle=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{x^2}\right]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{\varepsilon^2})=\frac{3}{2}$ 〃

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}dx$

（解）与式 $\displaystyle=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}dx$

$\displaystyle=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_0^b$



$\displaystyle=\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{-2e^{2x}}\right]_0^b$

$\displaystyle=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-2e^{2b}}-\frac{1}{-2e^0}\right)$

$\displaystyle=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^{2b}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 〃

2. 数直線上を動く点 P の時刻 t における速度を $v(t)=16-t^2$ とするとき、次の各問に答えよ。ただし、点 P の $t=0$ における座標を $\frac{5}{3}$ とする。

(1) $t=5$ における動点 P の座標を求めよ。

（解）$\displaystyle x(5)=x(0)+\int_0^5 v(t)dt$

$\displaystyle=\frac{5}{3}+\int_0^5(16-t^2)dt$

$\displaystyle=\frac{5}{3}+\left[16t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^5=\frac{5}{3}+80-\frac{125}{3}=40$ 〃

(2) $t=0$ から $t=5$ までの <u>道のり</u>（実際に動いた距離）を求めよ。

（解）$\displaystyle S=\int_0^5\left|16-t^2\right|dt$

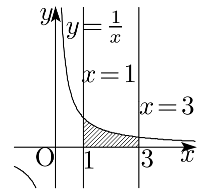
$\displaystyle=\int_0^4(16-t^2)dt+\int_4^5(-16+t^2)dt$

$\displaystyle=\left[16t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^4+\left[-16t+\frac{1}{3}t^3\right]_4^5$

$\displaystyle=\left(64-\frac{64}{3}\right)+\left(-80+\frac{125}{3}\right)-\left(-64+\frac{64}{3}\right)=47$ 〃

3. 次の図形の面積を求めよ。

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$, x 軸 , 2 直線 $x=1, x=3$ で囲まれた図形

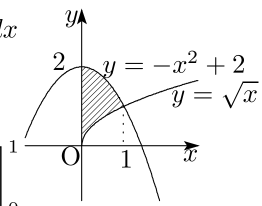


（解）$\displaystyle S=\int_1^3|y|dx=\int_1^3\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\Big[\log|x|\Big]_1^3$

$=\log 3-\log 1=\log 3$ 〃

(2) 2 曲線 $y=-x^2+2$, $y=\sqrt{x}$ と y 軸とで囲まれた図形



（解）$\displaystyle\int_0^1\left\{(-x^2+2)-\sqrt{x}\right\}dx$

$\displaystyle=\int_0^1\left(-x^2+2-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

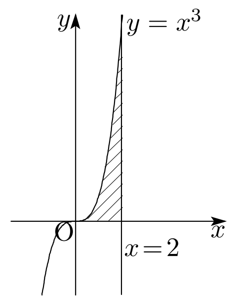
$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1=-\frac{1}{3}+2-\frac{2}{3}=1$ 〃

4. 次の図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) 曲線 $y=x^3$ と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形



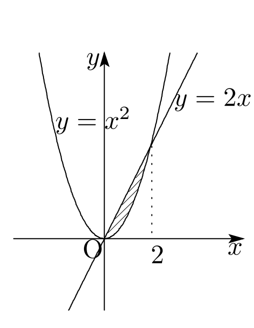
（解）$\displaystyle V=\pi\int_0^2 y^2dx$

$\displaystyle=\pi\int_0^2(x^3)^2dx=\pi\int_0^2 x^6dx$

$\displaystyle=\pi\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^2=\frac{\pi}{7}\left[x^7\right]_0^2$

$\displaystyle=\frac{\pi}{7}(128-0)=\frac{128}{7}\pi$ 〃

(2) 曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x$ で囲まれた図形



（解）

$\displaystyle V=\pi\int_0^2(2x)^2dx-\pi\int_0^2(x^2)^2dx$

$\displaystyle=\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$

$\displaystyle=\pi\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^2-\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$

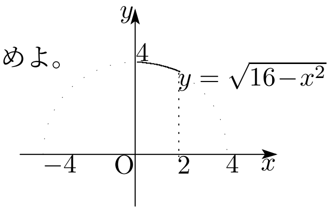
$\displaystyle=\frac{4}{3}\pi\left[x^3\right]_0^2-\frac{\pi}{5}\left[x^5\right]_0^2$

$\displaystyle=\frac{4}{3}\pi(8-0)-\frac{\pi}{5}(32-0)=\frac{32}{3}\pi-\frac{32}{5}\pi=\frac{64}{15}\pi$ 〃

5. 曲線 $C: y=\sqrt{16-x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ がある。

次に答えよ。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。



（解）

$y=\sqrt{16-x^2}$

$=(16-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}(16-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(16-x^2)'$

$=\dfrac{1}{2}(16-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$=\dfrac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}$

$=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{16-x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(16-x^2)+x^2}{16-x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{16}{16-x^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{16-x^2}}$

$L=\displaystyle\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^2\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dx$

$=4\displaystyle\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx=4\Big[\ \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{4}\Big]_0^2$

$=4\Big(\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}0\Big)$

$=4\Big(\dfrac{\pi}{6}-0\Big)=\dfrac{2}{3}\pi$ 〃

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$S=2\pi\displaystyle\int_0^2|y|\sqrt{1+(y')^2}\ dx$

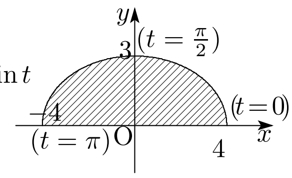
$=2\pi\displaystyle\int_0^2\sqrt{16-x^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}dx=8\pi\int_0^2 1dx$

$=8\pi\Big[x\Big]_0^2=8\pi(2-0)=16\pi$ 〃

積分の応用《基本演習》　(NO.2)　解答例 2枚目

6. 媒介表示 $x=4\cos t$, $y=3\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線と x 軸で囲まれた図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（解）

$$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t)=-4\sin t$$

$$S=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|y\frac{dx}{dt}\right|dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,3\sin t\cdot(-4\sin t)\,|dt$$

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=24\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=6\pi \quad〃$$

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

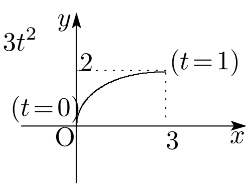
（解）$V=2\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin t)^2\,|-4\sin t|\,dt$$

$$=72\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 tdt=72\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=48\pi \quad〃$$

7. 媒介表示 $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で表される曲線 C について、次の問に答えよ。

(1) 曲線 c の長さを求めよ。



（解）$\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=3-3t^2$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(6t)^2+(3-3t^2)^2}$$

$$=\sqrt{36t^2+9-18t^2+9t^4}$$

$$=\sqrt{9+18t^2+9t^4}=\sqrt{9(1+2t^2+t^4)}$$

$$=\sqrt{\{3(1+t^2)\}^2}=|3(1+t^2)|=3(1+t^2)$$

$$L=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\int_0^1 3(1+t^2)dt=3\int_0^1(1+t^2)dt$$

$$=3\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=3\left(1+\frac{1}{3}\right)=3\cdot\frac{4}{3}=4 \quad〃$$

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$S=2\pi\int_0^1|y|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$

$$=2\pi\int_0^1\left(3t-t^3\right)\cdot 3(1+t^2)dt$$

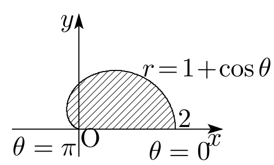
$$=6\pi\int_0^1\left(3t+2t^3-t^5\right)dt$$

$$=6\pi\left[\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t^4-\frac{1}{6}t^6\right]_0^1$$

$$=6\pi\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=6\pi\left(2-\frac{1}{6}\right)=11\pi \quad〃$$

8. 曲線 C : $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ と半直線 $\theta=0$ で囲まれる図形を A とするとき、次の問に答えよ。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（解）$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}r^2d\theta$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

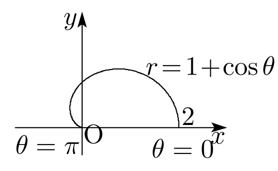
$t=\frac{\theta}{2}$　$\therefore\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}$　　$2dt=d\theta$

θ	$0\ \rightarrow\ \pi$
t	$0\ \rightarrow\ \frac{\pi}{2}$

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\cdot 2dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt$$

$$=4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi \quad〃$$

(2) 曲線 C の長さを求めよ。



（解）$\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta$

$$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}$$

$$=\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=2\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

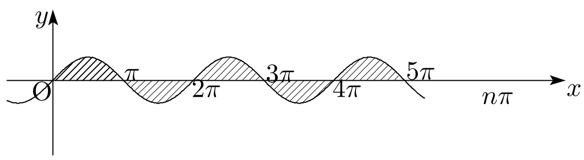
$$=2\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=4(1-0)=4 \quad〃$$

9. 曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq n\pi)$ と x 軸で囲まれた図形を A とする。ただし、n は自然数とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。

（解）



$$S=n\int_0^{\pi}|y|dx=n\int_0^{\pi}\sin x dx$$

$$=n\cdot\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=-n\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}$$

$$=-n(\cos\pi-\cos 0)$$

$$=-n\{(-1)-1\}=2n \text{〃}$$

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解）$V=n\cdot\pi\displaystyle\int_0^{\pi}y^2dx=n\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2dx$

$$=2n\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=2n\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{n}{2}\pi^2 \quad \text{〃}$$