積分の応用《基本演習》　(NO.3)　解答例 1 枚目

1. 数直線上を動く点 P の時刻 t における速度を $v(t)=30-10t$ とする。ただし、点 P の $t=0$ における座標を 8 とする。次の問に答えよ。

(1) $t=4$ における動点 P の座標を求めよ。

(解 1) $x(4)=x(0)+\displaystyle\int_0^4 v(t)dt$

$=8+\displaystyle\int_0^4 \big(30-10t\big)dt=8+\Big[30t-5t^2\Big]_0^4$

$=8+(120-80)-0=48$　〃

(解 2)$x(t)=x(0)+\displaystyle\int_0^t v(t)dt$

$=8+\int_0^t \big(30-10t\big)dt$

$=8+\Big[30t-5t^2\Big]_0^t$

$=8+30t-5t^2$

$x(4)=8+30\cdot 4-5\cdot 4^2=48$　〃

(2) $t=0$ から $t=4$ までに点 P が実際に動いた道のり を求めよ。

(解) $S=\displaystyle\int_0^4 \big|v(t)\big|dt=\int_0^4 \big|30-10t\big|dt$

$=\displaystyle\int_0^3 \big|30-10t\big|dt+\int_3^4 \big|30-10t\big|dt$

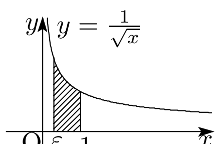
$=\displaystyle\int_0^3 \big(30-10t\big)dt+\int_3^4 \big(-30+10t\big)dt$

$=\Big[30t-5t^2\Big]_0^3+\Big[-30t+5t^2\Big]_3^4$

$=(90-45)-0+(-120+80)-(-90+45)=50$ 〃

2. 次の広義積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$



(解) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

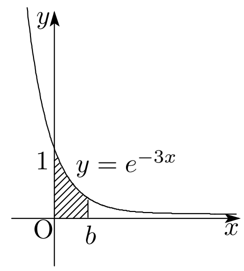
$=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$

$=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\ \Big]_\varepsilon^1$

$=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\ \Big]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}\Big[\ 2x^{\frac{1}{2}}\ \Big]_\varepsilon^1$

$=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}2\Big[\ \sqrt{x}\ \Big]_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to+0}2\Big(1-\sqrt{\varepsilon}\Big)=2$　〃

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}dx$



(解) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x}dx$

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}dx$

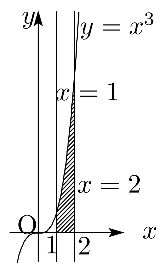
$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\Big[\ \frac{1}{-3}e^{-3x}\ \Big]_0^b$

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\Big\{-\frac{1}{3}\Big[\ e^{-3x}\ \Big]_0^b\Big\}$

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\Big\{-\frac{1}{3}\Big(e^{-3b}-e^0\Big)\Big\}$

$=\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\Big\{-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{e^{3b}}-1\Big)\Big\}=-\frac{1}{3}(0-1)=\frac{1}{3}$　〃

3. 曲線 $y=x^3$, 2 直線 $x=1$, $x=2$ および x 軸で囲まれる図形を A とする。



(1) 図形 A の面積を求めよ。

(解) $S=\displaystyle\int_1^2 |y|dx=\int_1^2 x^3dx$

$=\Big[\dfrac{1}{4}x^4\Big]_1^2$

$=\dfrac{1}{4}\Big[\ x^4\ \Big]_1^2=\dfrac{1}{4}(2^4-1^4)$

$=\dfrac{1}{4}(16-1)=\dfrac{15}{4}$　〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

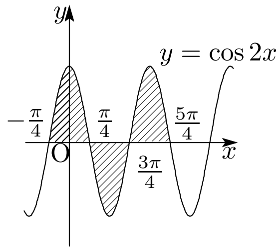
(解) $V=\pi\displaystyle\int_1^2 y^2dx=\pi\int_1^2 \big(x^3\big)^2dx=\pi\int_1^2 x^6dx$

$=\pi\Big[\dfrac{1}{7}x^7\Big]_1^2=\dfrac{1}{7}\pi\Big[\ x^7\ \Big]_1^2$

$=\dfrac{1}{7}\pi\big(2^7-1\big)=\dfrac{1}{7}\pi(128-1)=\dfrac{127}{7}\pi$　〃

4. 曲線 $y=\cos 2x$ $(-\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi)$ と x 軸で囲まれる図形を A とする。次の問に答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$ の値を求めよ。



(解 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$

$=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$ 〃

(解 2) $t=2x$ とおくと $\frac{dt}{dx}=2$ $\therefore\frac{1}{2}dt=dx$

x	$0\ \rightarrow\ \frac{\pi}{4}$
t	$0\ \rightarrow\ \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t dt=\frac{1}{2}\left[\ \sin t\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$ 〃

(2) 図形 A の面積を求めよ。

(解) $S=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|y|dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\cos 2x|\,dx$

$=6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx=6\cdot\frac{1}{2}=3$ 〃

(3) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(解 1) $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2 2x dx$

$=6\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x dx=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4x}{2}dx$

$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4x)dx=3\pi\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=3\pi\left\{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{4}\sin 0\right)\right\}$

$=3\pi\left(\frac{\pi}{4}+0-0-0\right)=\frac{3}{4}\pi^2$ 〃

(解 2) $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2 2x dx$

$=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1+\cos 4x)dx$

$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$

$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\sin 5\pi\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(-\pi)\right)\right\}$

$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{6}{4}\pi=\frac{3}{4}\pi^2$ 〃

(解 3) $V=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\cos^2 2x dx$

$=6\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x dx$

$t=2x$ とおくと $\frac{dt}{dx}=2$ $\therefore\frac{1}{2}dt=dx$

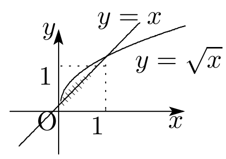
x	$0\ \rightarrow\ \frac{\pi}{4}$
t	$0\ \rightarrow\ \frac{\pi}{2}$

$V=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\frac{1}{2}dt$

$=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=3\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi^2$ 〃

5. 直線 $y=x$ と曲線 $y=\sqrt{x}$ で囲まれる図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



(解) $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx$

$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(解) $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\pi\int_0^1\left(x\right)^2dx$

$=\pi\int_0^1 xdx-\pi\int_0^1 x^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=\pi\left\{\frac{1}{2}-0\right\}-\pi\left\{\frac{1}{3}-0\right\}$

$=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{3}{6}\pi-\frac{2}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$ 〃

(3) 図形 A を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

(解) $y=x_1,\ y=\sqrt{x_2}$ とおくと，

$x_1=y$ 　　$x_2=y^2$

$V=\pi\int_0^1\left(x_1\right)^2dy-\pi\int_0^1\left(x_2\right)^2dy$

$=\pi\int_0^1 y^2dy-\pi\int_0^1 y^4dy$

$=\pi\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1-\pi\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1=\frac{1}{3}\pi\left[y^3\right]_0^1-\frac{1}{5}\pi\left[y^5\right]_0^1$

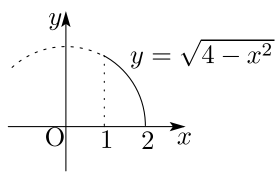
$=\frac{1}{3}\pi(1-0)-\frac{1}{5}\pi(1-0)=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{5}\pi=\frac{2}{15}\pi$ 〃

積分の応用《基本演習》　(NO.3)　解答例 2 枚目

6. 曲線 C : $y=\sqrt{4-x^2}$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ がある。

次の問に答えよ。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。



（解） $y=\sqrt{4-x^2}$

$=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2)'$

$=\dfrac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}$

$=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\dfrac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

$L=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$=2\displaystyle\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$

$=2\Big[\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}\Big]_1^2=2\Big(\ \mathrm{Sin}^{-1}1-\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}\Big)$

$=2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\left(\dfrac{3}{6}\pi-\dfrac{1}{6}\pi\right)=2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ 〃

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解） $S=2\pi\displaystyle\int_1^2|y|\sqrt{1+(y')^2}\ dx$

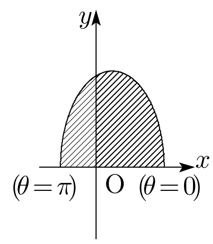
$=2\pi\displaystyle\int_1^2\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

$=4\pi\displaystyle\int_1^2 1dx=4\pi\Big[\ x\ \Big]_1^2=4\pi(2-1)=4\pi$ 〃

7. 媒介変数表示 $x=3\cos\theta+1$, $y=5\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される

曲線と x 軸で囲まれた図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（解） $\dfrac{dx}{d\theta}=3(-\sin\theta)+0$

$=-3\sin\theta$

$S=2\cdot\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|y\frac{dx}{d\theta}\right|d\theta$

$=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big|\,5\sin\theta\cdot(-3\sin\theta)\big|d\theta$

$=30\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{15}{2}\pi$ 〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解） $V=2\cdot\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{d\theta}\right|d\theta$

$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\sin\theta)^2\big|-3\sin\theta\,\big|d\theta$

$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(25\sin^2\theta)(3\sin\theta)d\theta$

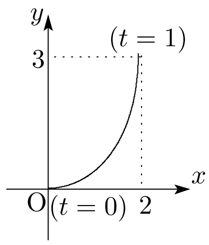
$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}75\sin^3\theta d\theta$

$=150\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta$

$=150\pi\cdot\dfrac{2}{3}\cdot1=100\pi$ 〃

8. 媒介変数表示 $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で表される曲線 C がある。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。



（解）$\dfrac{dx}{dt} = 3 - 3t^2$

, $\dfrac{dy}{dt} = 6t$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 3t^2)^2 + (6t)^2}$$

$$= \sqrt{9 - 18t^2 + 9t^4 + 36t^2} = \sqrt{9 + 18t^2 + 9t^4}$$

$$= \sqrt{9(1 + 2t^2 + t^4)}$$

$$= \sqrt{9(1 + t^2)^2} = 3\left|\,1 + t^2\,\right| = 3(1 + t^2)$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^1 3(1 + t^2)dt$$

$$= 3\int_0^1 (1 + t^2)dt = 3\left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= 3\left\{\left(1 + \frac{1}{3}\right) - (0 + 0)\right\} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \quad 〃$$

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$S = 2\pi \displaystyle\int_0^1 |y|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$$= 2\pi\int_0^1 3t^2 \cdot 3(1+t^2)dt = 18\pi\int_0^1 (t^2 + t^4)dt$$

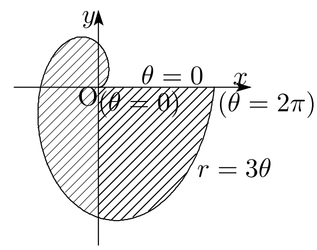
$$= 18\pi\left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = 18\pi\left\{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - (0 + 0)\right\}$$

$$= 18\pi\left(\frac{5}{15} + \frac{3}{15}\right) = {}^{6}\cancel{18}\pi \cdot \frac{8}{\cancel{15}_{5}} = \frac{48}{5}\pi \quad 〃$$

9. 曲線 C : $r = 3\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と半直線 $\theta = 0$ とで囲まれる図形を A とする。

(1) 図形 A の面積を求めよ。

（解）$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2 d\theta$



$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\theta^2 d\theta$$

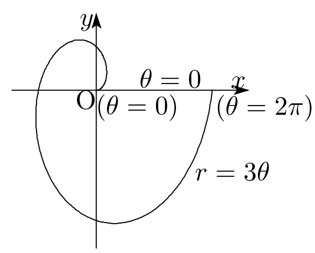
$$= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left[\,\frac{1}{3}\theta^3\,\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\,\theta^3\,\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\left\{(2\pi)^3 - 0^3\right\} = \frac{3}{2} \cdot 8\pi^3 = 12\pi^3 \quad 〃$$

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

（解）$\dfrac{dr}{d\theta} = 3$



$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(3\theta)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{9\theta^2 + 9}$$

$$= \sqrt{9(\theta^2 + 1)} = 3\sqrt{\theta^2 + 1}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\,d\theta$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2}\left[\,\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + 1 \cdot \log\left|\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}\right|\,\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\,\theta\sqrt{\theta^2 + 1} + \log\left|\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}\right|\,\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{\left(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \log\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right|\right)\right.$$

$$\left. - (0 + \log 1)\right\}$$

$$= \frac{3}{2}\left\{2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \log\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right\} \quad 〃$$