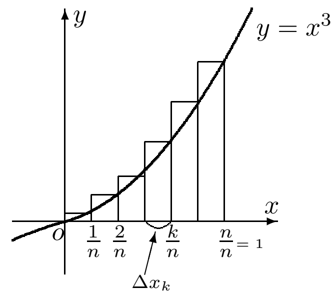
積分法 ≪基礎≫ 小テスト $(No.1)$ 解答例

1. 定義に従って、つぎの定積分の値を求めよ。



$$\int_0^1 x^3 dx$$

（解）区間 $[0, 1]$ を n 等分して n 個の小区分に分けると

$$x_k = \frac{1-0}{n} \cdot k = \frac{k}{n}, \quad \Delta x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

であるから、定積分の定義に従って

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad〃$$

2. 次の極限値を定積分の式で表せ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^5$$

（解）区間 $[0, 1]$ を n 等分して n 個の小区分に分けて

$$x_k = \frac{1-0}{n} \cdot k = \frac{k}{n}, \quad \Delta x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

とおくと、定積分の定義によって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^{n} k^5 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5 \frac{1}{n} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} x_k^5 \Delta x_k = \int_0^1 x^5 dx \quad〃$$

≪考え方≫

$n \to \infty$ のとき

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{n}{n} \to 1$

$\therefore 0 \leqq \frac{k}{n} \leqq 1, \therefore 0 \leqq x_k \leqq 1$

よって区間 [0,1] を考える。

3. 次の定積分の値の大小関係を調べよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

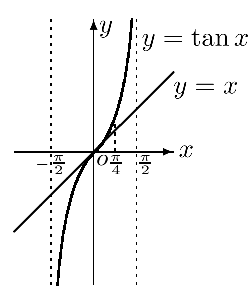
（解）$y = \tan x$ より、$y' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\therefore [y]'_{x=0} = \frac{1}{\cos^2 0} = \frac{1}{1^2} = 1$$

ゆえに、$y = \tan x$ の原点 $(0, 0)$ における

接線の方程式は $y = x$ である。

よって、区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ では　$x \leqq \tan x$　であるから



$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \quad〃$$