積分法 ≪基礎≫ 小テスト $(No.6)$ 解答例

1. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$

（解）$3x-5=t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=3$ よって$\dfrac{1}{3}dt=dx$ であるから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}dt = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} = \frac{2}{3}\sqrt{3x-5} \quad 〃$$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$ $\left(ヒント：\sin^3 x = \sin^2 x\cdot\sin x \text{ と変形してみよ。}\right)$

（解）$\displaystyle\int \sin^3 x dx = \int \sin^2\cdot\sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x dx$

$\cos x = t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ よって $(-1)dt = \sin x dx$ であるから

$$与式 = \int (1-t^2)(-1)dt = \int (t^2-1)dt = \frac{1}{3}t^3 - t = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x \quad 〃$$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

（解）$x^2+1=t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=2x$ より $dt=2xdx$ また $x^2=t-1$ であるから

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot 2xdx = \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \int\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$= \int\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}t^{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} \quad 〃$$

2. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

（解）$\displaystyle\int \cos x dx = \sin x$ であるから $\displaystyle\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 〃

（別解）$3x-\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=3$ よって $\dfrac{1}{3}dt=dx$ であるから

$$\int \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\, dt = \frac{1}{3}\sin t = \frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) \quad 〃$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$ $\left(ヒント：\sin x\cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x \text{ と変形してみよ。}\right)$

（解）$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan x}dx = \log|\tan x| \quad 〃$$