積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　($No.11$)

＿＿年　＿＿組　＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 区間 $[1, 2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ の近似値を台形公式を用いて求めよ。(空白を埋めよ。)

（解）$y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$とおくと　$y' = \boxed{\quad\quad}$　$\therefore y'' = \boxed{\quad\quad} = \dfrac{\boxed{\quad}}{x^4}$

区間 $[1, 2]$ では $\dfrac{\boxed{\quad}}{16} \leqq \dfrac{\boxed{\quad}}{x^4} \leqq \boxed{\quad}$ より　$|y''| \leqq \boxed{\quad}$　$\therefore M = \boxed{\quad}$　また　$h = \dfrac{2-1}{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{12}Mh^2(b-a) = \frac{1}{12} \cdot \boxed{\quad} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot (2-1) = \frac{1}{\boxed{\quad\quad}} = 0.00\boxed{\quad}$$

これを考慮して、$x = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して

小数第$\boxed{\quad}$位まで求めると

$y_0 = 1.00000$	
	$y_1 = 0.82645$
	$y_2 = 0.69444$
	$y_3 = 0.59172$
	$y_4 = 0.51020$
	$y_5 = 0.44444$
	$y_6 = 0.39063$
	$y_7 = 0.34602$
	$y_8 = 0.30864$
	$y_9 = 0.27701$
$y_{10} = 0.25000$	
1.25000	4.38955

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \quad \frac{0.1}{2}\left(\boxed{\quad\quad} + 2 \times \boxed{\quad\quad}\right) = 0.1\left(\boxed{\quad\quad} + \boxed{\quad\quad}\right) = 0.1 \times \boxed{\quad\quad}$$

$$= \boxed{\quad\quad}\quad\boxed{\quad\quad}\quad /\!/$$

(　≪注意≫　誤差の限界 $0.00\boxed{\quad}$ を考慮して、４捨５入して小数第$\boxed{\quad}$位まで求める。)

≪真の値≫

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$= \left(-\tfrac{1}{2}\right) - (-1) = 0.5$$

2. 区間 $[1, 2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ の近似値をシンプソンの公式を用いて求めよ。

（空白を埋めよ。）

（解）$y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ とおくと

$y' = \boxed{\quad}$　$\therefore y'' = \boxed{\quad}$　$\therefore y''' = \boxed{\quad}$　$\therefore y^{(4)} = \boxed{\quad} = \dfrac{\boxed{\quad}}{x^6}$

区間 $[1, 2]$ では $\dfrac{\boxed{\quad}}{64} \leqq \dfrac{\boxed{\quad}}{x^6} \leqq \boxed{\quad}$ より　$|y^{(4)}| \leqq \boxed{\quad}$

$\therefore M = \boxed{\quad}$　また　$h = \dfrac{2-1}{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{180}Mh^4(b-a) = \frac{1}{180}\cdot\boxed{\quad}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot(2-1) = \frac{\boxed{\quad}}{30000} = \boxed{\qquad}\cdots < 0.0000\boxed{\quad}$$

これを考慮して、 $x = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して

小数第$\boxed{\quad}$位まで求めると

$y_0 = 1.0000000$		
	$y_1 = 0.8264463$	
		$y_2 = 0.6944444$
	$y_3 = 0.5917160$	
		$y_4 = 0.5102041$
	$y_5 = 0.4444444$	
		$y_6 = 0.3906250$
	$y_7 = 0.3460208$	
		$y_8 = 0.3086420$
	$y_9 = 0.2770083$	
$y_{10} = 0.2500000$		
1.2500000	2.4856358	1.9039155

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \quad \frac{0.1}{3}\left(\boxed{\qquad} + 4\times\boxed{\qquad} + 2\times\boxed{\qquad}\right)$$

$$= \frac{0.1}{3}\left(\boxed{\qquad} + \boxed{\qquad} + \boxed{\qquad}\right)$$

$$= \frac{0.1}{3}\times\boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}\cdots \quad \boxed{\qquad} \quad 〃$$

（　≪注意≫　誤差の限界 0.0000$\boxed{\quad}$ を考慮して、４捨５入して小数第$\boxed{\quad}$位まで求める。）

3. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ の近似値を台形公式を用いて求めよ。（空白を埋めよ。）

（解）$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ とおくと　$y' = \boxed{}$　$\therefore y'' = \boxed{} = \dfrac{2}{x^3}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{\boxed{}}{8} \leqq \dfrac{2}{x^3} \leqq \boxed{}$ より $|y''| \leqq 2$

$\therefore M = \boxed{}$　また $h = \dfrac{2-1}{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{12}Mh^2(b-a) = \frac{1}{12}\cdot\boxed{}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot(2-1) = \frac{1}{\boxed{}} = \boxed{}\cdots < 0.002$$

これを考慮して、$x = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して小数第４位まで求めると

$y_0 = 1.00000$	
	$y_1 = 0.9091$
	$y_2 = 0.8333$
	$y_3 = 0.7692$
	$y_4 = 0.7143$
	$y_5 = 0.6667$
	$y_6 = 0.6250$
	$y_7 = 0.5882$
	$y_8 = 0.5556$
	$y_9 = 0.5263$
$y_{10} = 0.5000$	
1.5000	6.1877

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad \frac{0.1}{2}(1.5000 + 2\times 6.1877) = 0.1(\boxed{} + \boxed{})$$

$$= 0.1 \times \boxed{} = \boxed{} \quad 0.694 \quad 〃$$

（　≪注意≫　誤差の限界 0.002 を考慮して、４捨５入して小数第３位まで求める。）

≪真の値≫

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_1^2$$
$$= \log 2 - \log 1 = \log 2$$
$$= 0.69314718\cdots$$

4. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ の近似値をシンプソンの公式を用いて求めよ。

（空白を埋めよ。）

（解）$y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$とおくと　$y' = \boxed{\quad}$　$\therefore y'' = \boxed{\quad}$　$\therefore y''' = \boxed{\quad}$　$\therefore y^{(4)} = \boxed{\quad} = \dfrac{24}{x^5}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{\boxed{\quad}}{32} \leqq \dfrac{24}{x^5} \leqq \boxed{\quad}$ より　$|y^{(4)}| \leqq 24$

$\therefore M = \boxed{\quad}$　また　$h = \dfrac{2-1}{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{180}Mh^4(b-a) = \frac{1}{180}\cdot 24 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot (2-1) = \frac{\boxed{\quad}}{300000} = \boxed{\qquad}\cdots < 0.00002$$

これを考慮して、 $x = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して小数第６位まで求めると

$y_0 = 1.000000$		
	$y_1 = 0.909091$	
		$y_2 = 0.833333$
	$y_3 = 0.769231$	
		$y_4 = 0.714286$
	$y_5 = 0.666667$	
		$y_6 = 0.625000$
	$y_7 = 0.588235$	
		$y_8 = 0.555556$
	$y_9 = 0.526316$	
$y_{10} = 0.5000000$		
1.5000000	3.459540	2.728175

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad \frac{0.1}{3}(1.500000 + 4 \times 3.459540 + 2 \times 2.728175)$$

$$= \frac{0.1}{3}(\boxed{\qquad} + \boxed{\qquad} + \boxed{\qquad})$$

$$= \frac{0.1}{3} \times \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad} \cdots \quad 0.69315$$ 〃

（　≪注意≫　誤差の限界 0.00002 を考慮して、４捨５入して小数第５位まで求める。）