積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　$(No.11)$

1. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ の近似値を台形公式を用いて求めよ。

（解）$y=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}$とおくと　$y'=-2x^{-3}$　$\therefore y''=6x^{-4}=\dfrac{6}{x^4}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{6}{16}\leqq\dfrac{6}{x^4}\leqq 6$ より　$|y''|\leqq 6$　$\therefore M=6$　また　$h=\dfrac{2-1}{10}=\dfrac{1}{10}=0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{12}Mh^2(b-a)=\frac{1}{12}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot(2-1)=\frac{1}{200}=\frac{5}{1000}=0.005$$

これを考慮して、 $x=1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して

小数第５位まで求めると

$$\begin{array}{ll}
y_0=1.00000 & \\
 & y_1=0.82645 \\
 & y_2=0.69444 \\
 & y_3=0.59172 \\
 & y_4=0.51020 \\
 & y_5=0.44444 \\
 & y_6=0.39063 \\
 & y_7=0.34602 \\
 & y_8=0.30864 \\
 & y_9=0.27701 \\
y_{10}=0.25000 & \\
\hline
1.25000 & 4.38955
\end{array}$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \quad \frac{0.1}{2}(1.25000+2\times 4.38955)$$

$$=0.1(0.62500+4.38955)=0.1\times 5.01455=0.501455 \quad 0.501 \quad 〃$$

（ ≪注意≫　誤差の限界 0.005 を考慮して、４捨５入して小数第３位まで求める。）

≪真の値≫
$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)-(-1)=0.5}$$

2. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ の近似値をシンプソンの公式を用いて求めよ。

（解）$y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ とおくと

$y' = -2x^{-3} \quad \therefore y'' = 6x^{-4} \quad \therefore y''' = -24x^{-5} \quad \therefore y^{(4)} = 120x^{-6} = \dfrac{120}{x^6}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{120}{64} \leqq \dfrac{120}{x^6} \leqq 120$ より

$|y^{(4)}| \leqq 120 \quad \therefore M = 120$ 　また　$h = \dfrac{2-1}{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{180}Mh^4(b-a) = \frac{1}{180} \cdot 120 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot (2-1) = \frac{2}{30000} = 0.0000666\cdots < 0.00007$$

これを考慮して、 $x = 1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して

小数第７位まで求めると

$y_0 = 1.0000000$		
	$y_1 = 0.8264463$	
		$y_2 = 0.6944444$
	$y_3 = 0.5917160$	
		$y_4 = 0.5102041$
	$y_5 = 0.4444444$	
		$y_6 = 0.3906250$
	$y_7 = 0.3460208$	
		$y_8 = 0.3086420$
	$y_9 = 0.2770083$	
$y_{10} = 0.2500000$		
1.2500000	2.4856358	1.9039155

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx \quad \frac{0.1}{3}(1.2500000 + 4 \times 2.4856358 + 2 \times 1.9039155)$$
$$= \frac{0.1}{3}(1.2500000 + 9.9425432 + 3.807831) = \frac{0.1}{3} \times 15.0003742$$
$$= 0.50001247333\cdots \quad 0.50001 \quad〃$$

（　≪注意≫　誤差の限界 0.00007 を考慮して、４捨５入して小数第５位まで求める。）

3. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ の近似値を台形公式を用いて求めよ。

（解）$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$とおくと　$y'=-x^{-2}$　$\therefore y''=2x^{-3}=\dfrac{2}{x^3}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{2}{8}\leqq\dfrac{2}{x^3}\leqq 2$ より　$|y''|\leqq 2$　$\therefore M=2$　また　$h=\dfrac{2-1}{10}=\dfrac{1}{10}=0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{12}Mh^2(b-a)=\frac{1}{12}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot(2-1)=\frac{1}{600}=0.001666\cdots<0.002$$

これを考慮して、 $x=1.0,1.1,1.2,\cdots,2.0$ に対する y の値 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{10}$ を４捨５入して

小数第４位まで求めると

$y_0=1.00000$	
	$y_1=0.9091$
	$y_2=0.8333$
	$y_3=0.7692$
	$y_4=0.7143$
	$y_5=0.6667$
	$y_6=0.6250$
	$y_7=0.5882$
	$y_8=0.5556$
	$y_9=0.5263$
$y_{10}=0.5000$	
1.5000	6.1877

$$\therefore \int_1^2 \frac{1}{x}dx \quad \frac{0.1}{2}(1.5000+2\times 6.1877)=0.1(0.7500+6.1877)$$
$$=0.1\times 6.9377=0.69377 \quad 0.694 \quad〃$$

（ ≪注意≫　誤差の限界 0.002 を考慮して、４捨５入して小数第３位まで求める。）

≪真の値≫

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_1^2$$
$$=\log 2-\log 1=\log 2$$
$$=0.69314718\cdots$$

4. 区間 $[1,2]$ を１０等分して、定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ の近似値をシンプソンの公式を用いて求めよ。

（解）$y=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$とおくと　$y'=-x^{-2}$　$\therefore y''=2x^{-3}$　$\therefore y'''=-6x^{-4}$　$\therefore y^{(4)}=24x^{-5}=\dfrac{24}{x^5}$

区間 $[1,2]$ では $\dfrac{24}{32}\leqq\dfrac{24}{x^5}\leqq 24$ より　$|y^{(4)}|\leqq 24$　$\therefore M=24$　また　$h=\dfrac{2-1}{10}=\dfrac{1}{10}=0.1$

したがって、誤差の限界は

$$\frac{1}{180}Mh^4(b-a)=\frac{1}{180}\cdot 24\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot(2-1)=\frac{4}{300000}=0.00001333\cdots<0.00002$$

これを考慮して、 $x=1.0, 1.1, 1.2, \cdots, 2.0$ に対する y の値 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{10}$ を４捨５入して

小数第６位まで求めると

$y_0=1.000000$		
	$y_1=0.909091$	
		$y_2=0.833333$
	$y_3=0.769231$	
		$y_4=0.714286$
	$y_5=0.666667$	
		$y_6=0.625000$
	$y_7=0.588235$	
		$y_8=0.555556$
	$y_9=0.526316$	
$y_{10}=0.5000000$		
1.5000000	3.459540	2.728175

$\therefore \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$　$\dfrac{0.1}{3}(1.500000+4\times 3.459540+2\times 2.728175)=\dfrac{0.1}{3}(1.500000+13.838160+5.456350)$

$=\dfrac{0.1}{3}\times 20.79451=0.693150333\cdots$　0.69315　〃

（　≪注意≫　誤差の限界 0.00002 を考慮して、４捨５入して小数第５位まで求める。）