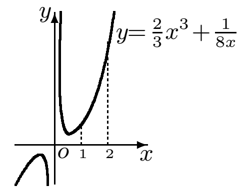
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　$(No.2)$

1. 曲線 $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{8x}\ (1 \leqq x \leqq 2)$ の長さを求めよ。



（解）$y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{8}x^{-1}\quad \therefore y'=\dfrac{2}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{1}{8}\cdot(-1)x^{-2}=2x^2-\dfrac{1}{8x^2}$

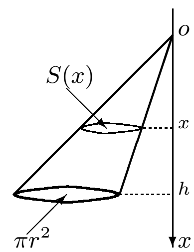
$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(2x^2-\frac{1}{8x^2}\right)^2}=\sqrt{1+4x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^4}}$$

$$=\sqrt{4x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{64x^4}}=\sqrt{\left(2x^2+\frac{1}{8x^2}\right)^2}=\left|2x^2+\frac{1}{8x^2}\right|=2x^2+\frac{1}{8x^2}$$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^2\left(2x^2+\frac{1}{8x^2}\right)dx=\int_1^2\left(2x^2+\frac{1}{8}x^{-2}\right)dx=\left[2\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{8}x^{-1}\right]_1^2=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{8x}\right]_1^2=\left(\frac{16}{3}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{8}\right)=\frac{14}{3}+\frac{1}{16}=\frac{224}{48}+\frac{3}{48}=\frac{227}{48}\quad〃$$

2. 底面が半径 r の円で、高さが h の直円錐でない円錐がある。その体積を V とすると、$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ であることを積分法を用いて証明せよ。



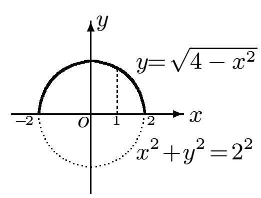
（解）頂点から底面に下ろした垂線を x 軸にとり、区間 $[\,0,\,h\,]$ 内での点 x において x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とすると

$S(x)\ :\ \pi r^2\ =\ x^2\ :\ h^2\quad \therefore h^2S(x)=\pi r^2x^2\quad \therefore S(x)=\dfrac{\pi r^2}{h^2}x^2$

$$V=\int_0^h S(x)dx=\int_0^h\frac{\pi r^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\frac{\pi r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3-\frac{1}{3}\cdot 0\right)=\frac{1}{3}\pi r^2h\quad〃$$

3. 曲線 $y=\sqrt{4-x^2}\ (1 \leqq x \leqq 2)$ の長さを求めよ。



（解）$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

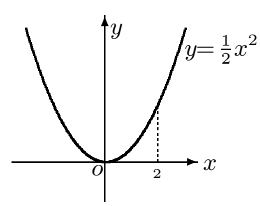
$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\frac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$L=\int_1^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\int_1^2\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx=2\Big[\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}\Big]_1^2$$

≪合成関数の微分法の詳細は次頁に≫

$$=2\left(\mathrm{Sin}^{-1}1-\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi\quad〃$$

4. 曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (0 \leqq x \leqq 2)$ の長さを求めよ。



（解）$y'=\dfrac{1}{2}\cdot 2x=x$

$$L=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^2\sqrt{1+x^2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1+x^2}+1\cdot\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\,\right|\right\}\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1+x^2}+1\cdot\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\,\right|\Big]_0^2=\frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5}\,)\right)-(0+\log 1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5}\,)\right)-(0+0)\right\}=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5}\,)\quad〃$$

合成関数の微分法の研究

（問）$y=\sqrt{4-x^2}$ を微分せよ。

（解 1）$u=4-x^2$ とおくと、$y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2)=\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\cdot(-2x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

（解 2）$y=\sqrt{4-x^2}=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(4-x^2)'=\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot(-2x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

（解 3）$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ を微分すると、

$$y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって、準公式 $\boxed{(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$ を得る。　これを用いて

《速解》

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

積分公式の研究 **(記憶しておかないと対応が困難な公式)**

（問）A を 0 でない定数とするとき、次の公式を証明せよ。

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)$$

（解）$\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)'$

$$=1\cdot\sqrt{x^2+A}+x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}+A\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}\right)$$

$$=\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}+A\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}}$$

$$=\sqrt{x^2+A}+\frac{x^2+A}{\sqrt{x^2+A}}=2\sqrt{x^2+A}$$

$$\therefore\left\{\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)\right\}'=\sqrt{x^2+A}$$

$$\therefore\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)$$

（積分定数 C は省略）