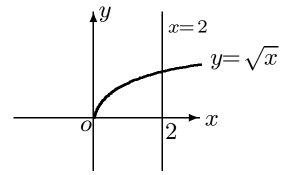
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　($No.3$)

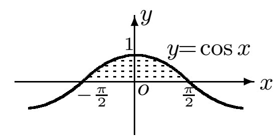
1. 曲線 $y=\sqrt{x}$, x 軸および直線 $x=2$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



（解）$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^2 x\ dx$

$=\pi\Big[\ \dfrac{1}{2}x^2\ \Big]_0^2=\dfrac{\pi}{2}\Big[\ x^2\ \Big]_0^2=\dfrac{\pi}{2}(2^2-0^2)=2\pi$　〃

2. 曲線 $y=\cos x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



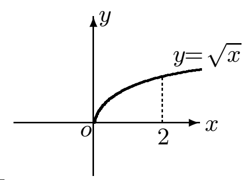
（解）$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx$

$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\cos 2x}{2}dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)dx$

$=\pi\Big[\ x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left\{\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\dfrac{1}{2}\sin 0\right)\right\}=\dfrac{\pi^2}{2}$　〃

（別解）$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 xdx=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$　〃

3. 曲線 $y=\sqrt{x}$ $(0\leqq x\leqq 2)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。



（解）$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$　　$\therefore y'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}=\sqrt{\dfrac{4x+1}{4x}}=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$

$S=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y')^2}\ dx=2\pi\int_0^2\sqrt{x}\cdot\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\ dx=\pi\int_0^2\sqrt{4x+1}\ dx$

$4x+1=t$　とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=4$　$\therefore\dfrac{1}{4}dt=dx$

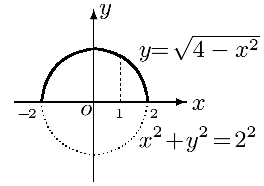
x	$0\ \to\ 2$
θ	$1\ \to\ 9$

$S=\pi\int_1^9\sqrt{t}\cdot\dfrac{1}{4}dt=\dfrac{\pi}{4}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\dfrac{\pi}{4}\Big[\ \dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}\ \Big]_1^9=\dfrac{\pi}{4}\Big[\ \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\ \Big]_1^9=\dfrac{\pi}{4}\Big[\ \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3}\ \Big]_1^9$

$=\dfrac{\pi}{6}\Big[\ \sqrt{t^3}\ \Big]_1^9=\dfrac{\pi}{6}(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3})=\dfrac{\pi}{6}(9\sqrt{9}-1)=\dfrac{\pi}{6}(27-1)=\dfrac{13}{3}\pi$　〃

4. 曲線 $y=\sqrt{4-x^2}$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。



（解）$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

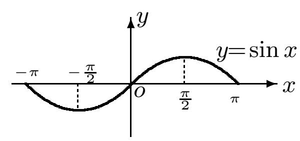
$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\dfrac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

$S=2\pi\int_{-2}^1 y\sqrt{1+(y')^2}\ dx=2\pi\int_{-2}^1\sqrt{4-x^2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\ dx=4\pi\int_{-2}^1 1\ dx$

$=4\pi\Big[\ x\ \Big]_{-2}^1=4\pi\{\ 1-(-2)\ \}=12\pi$　〃

（研究１） 曲線 $y=\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。



（解）$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=2\cdot\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$

$=2\pi\int_0^{\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\pi\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx$

$=\pi\Big[\,x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\,\Big]_0^{\pi}=\pi\left\{\left(\pi-\dfrac{1}{2}\sin 2\pi\right)-\left(0-\dfrac{1}{2}\sin 0\right)\right\}=\pi^2$　〃

（別解）$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x dx=4\cdot\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=4\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\pi^2$　〃

（研究２） 曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq n\pi)$ と x 軸とで囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。(ただし、n は自然数とする。)

（解）$V=\pi\int_0^{n\pi} y^2 dx=n\cdot\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=2\cdot n\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=2n\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{n\pi^2}{2}$　〃

（研究３） 曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$y=\sin x$　　$\therefore y'=\cos x$

$S=2\pi\int_0^{\pi} y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$

$t=\cos x$　　とおくと　　$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

x	$0\to\pi$
t	$1\to -1$

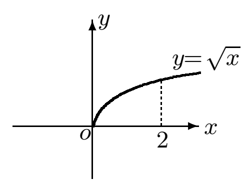
$\therefore -dt=\sin x\, dx$

$S=2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,(-dt)=2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1}\,dt=4\pi\int_0^{1}\sqrt{t^2+1}\,dt$

$S=4\pi\left[\dfrac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+1}+1\cdot\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right)\right]_0^1=2\pi\left[t\sqrt{t^2+1}+\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^1$

$=2\pi\left\{\left(\sqrt{2}+\log|1+\sqrt{2}|\right)-(0-\log 1)\right\}=2\pi\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right\}$　〃

３． 曲線 $y=\sqrt{x}\ (0\leqq x\leqq 2)$ を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。



（別解）$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$　　$\therefore y'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4x}}=\sqrt{\dfrac{4x+1}{4x}}=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$

$S=2\pi\int_0^2 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^2\sqrt{x}\cdot\dfrac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\,dx$

$=\pi\int_0^2\sqrt{4x+1}dx=\pi\int_0^2(4x+1)^{\frac{1}{2}}dt$

$=\pi\Big[\,\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}(4x+1)^{\frac{1}{2}+1}\,\Big]_0^2=\pi\Big[\,\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^2=\dfrac{\pi}{6}\Big[\,\sqrt{(4x+1)^3}\,\Big]_0^2$

$=\dfrac{\pi}{6}\Big[\,(\sqrt{4x+1}\,)^3\,\Big]_0^2=\dfrac{\pi}{6}\{(\sqrt{9}\,)^3-(\sqrt{1}\,)^3\}=\dfrac{\pi}{6}(3^3-1)=\dfrac{\pi}{6}(27-1)=\dfrac{13}{3}\pi$　〃