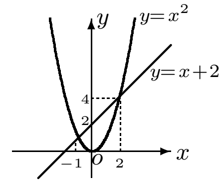
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　$(No.4)$

1. 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x+2$ に囲まれる図形 A がある。次の各問に答えよ。



(1) 図形 A の面積を求めよ。

（解）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{(x+2)-x^2\right\}dx=\left[\ \frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\ \right]_{-1}^{2}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2-\dfrac{1}{3}\cdot 2^3\right)-\left\{\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right\}$

$=\left(2+4-\dfrac{8}{3}\right)-\left(\dfrac{1}{2}-2+\dfrac{1}{3}\right)=5-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$　〃

（別解）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{(x+2)-x^2\right\}dx=-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx=-\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)dx$

$=-\left\{-\dfrac{1}{6}\left(2-(-1)\right)^3\right\}=\dfrac{1}{6}\cdot 3^3=\dfrac{27}{6}=\dfrac{9}{2}$　〃

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解）$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+2)^2dx-\pi\int_{-1}^{2}(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{2}(x+2)^2dx-\pi\int_{-1}^{2}x^4dx$

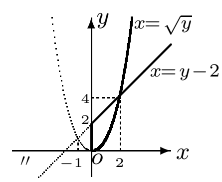
$=\pi\left[\ \dfrac{1}{3}(x+2)^3\ \right]_{-1}^{2}-\pi\left[\ \dfrac{1}{5}x^5\ \right]_{-1}^{2}=\dfrac{\pi}{3}\left[\ (x+2)^3\ \right]_{-1}^{2}-\dfrac{\pi}{5}\left[\ x^5\ \right]_{-1}^{2}$

$=\dfrac{\pi}{3}\left\{(2+2)^3-(-1+2)^3\right\}-\dfrac{\pi}{5}\left\{2^5-(-1)^5\right\}=\dfrac{\pi}{3}\left(4^3-1^3\right)-\dfrac{\pi}{5}\left\{32-(-1)\right\}$

$=\dfrac{63}{3}\pi-\dfrac{33}{5}\pi=21\pi-\dfrac{33}{5}\pi=\dfrac{105}{5}\pi-\dfrac{33}{5}\pi=\dfrac{72}{5}\pi$　〃

(3) 図形 A を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解）$y=x^2$ より $x=\pm\sqrt{y}$　よって $x\geqq 0$ のとき $x=\sqrt{y}$　また $y=x+2$ より $x=y-2$

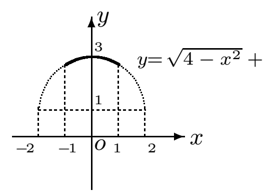


$V=\pi\displaystyle\int_{0}^{4}(\sqrt{y})^2dy-\pi\int_{2}^{4}(y-2)^2dy=\pi\int_{0}^{4}ydy-\pi\int_{2}^{4}(y-2)^2dx$

$=\pi\left[\ \dfrac{1}{2}y^2\ \right]_{0}^{4}-\pi\left[\ \dfrac{1}{3}(y-2)^3\ \right]_{2}^{4}=\dfrac{\pi}{2}\left[\ y^2\ \right]_{0}^{4}-\dfrac{\pi}{3}\left[\ (y-2)^3\ \right]_{2}^{4}$

$=\dfrac{\pi}{2}(4^2-0^2)-\dfrac{\pi}{3}\{(4-2)^3-(2-2)^3\}=8\pi-\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{24}{3}\pi-\dfrac{8}{3}\pi=\dfrac{16}{3}\pi$　〃

2. 曲線 C ： $y=\sqrt{4-x^2}+1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ について、次の各問に答えよ。



(1) 曲線 C の長さを求めよ。

（解）$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(4-x^2)'+0=\dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\dfrac{(4-x^2)+x^2}{4-x^2}}=\sqrt{\dfrac{4}{4-x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

$L=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$

$=4\left[\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}\ \right]_{0}^{1}=4\left(\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}0\right)=4\left(\dfrac{\pi}{6}-0\right)=\dfrac{2}{3}\pi$　〃

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$L=2\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}y\sqrt{1+(y')^2}dx=2\pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{4-x^2}+1)\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx=4\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$

$=4\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}1dx+4\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=8\pi\int_{0}^{1}1dx+8\pi\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$

$=8\pi\left[\ x\ \right]_{0}^{1}+8\pi\left[\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{2}\ \right]_{0}^{1}=8\pi(1-0)+8\pi\left(\ \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}0\right)$

$=8\pi+8\pi\left(\dfrac{\pi}{6}-0\right)=8\pi+\dfrac{4}{3}\pi^2=\dfrac{4}{3}\pi(6+\pi)$　〃

逆三角関数の微分・積分の研究

（問）$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ を微分せよ。

（解）与えられた式を変形して　$x = \sin y$

この両辺を x について微分すると

$$1 = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

右辺を合成関数の微分法によって計算すると

$$\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dy}(\sin y)\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore 1 = \cos y\frac{dy}{dx}$$

したがって、$\cos y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdots\cdots\cdots (1)$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\cos y \geqq 0$ であるから

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

これを (1) に代入して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad （ただし\ x \neq \pm 1$$

$$\therefore \left(\mathrm{Sin}^{-1}x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad （ただし\ x \neq \pm 1）\cdots\cdots\cdots (2)$$

これから次の積分公式が得られる

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \mathrm{Sin}^{-1}x + C} \cdots\cdots\cdots (3)$$

（問）公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a>0)\cdots\cdots\cdots(4)$　を証明せよ。

公式 (2) と合成関数の微分法を利用して、公式 (4) を導いてみよう。

（解）$\displaystyle\left(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a>0)$$

公式 (3) と置換積分法を利用して、公式 (4) を導いてみよう。

（別解）$\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx$

$\dfrac{x}{a} = u$ とおくと　　$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{a}$　　$\therefore du = \dfrac{1}{a}dx$

$$\therefore I = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \mathrm{Sin}^{-1}u + C = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a>0)$$