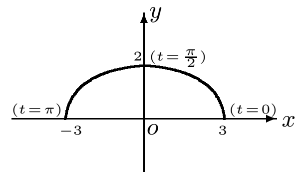
積分の応用 ≪基礎≫ 小テスト　解答例　(No.7)

1. 曲線 C : $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を A とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（解）$\dfrac{dx}{dt}=3(-\sin t)=-3\sin t$

$$S=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|y\frac{dx}{dt}\right|dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\sin t\cdot(-3\sin t)|\,dt$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi \quad 〃$$

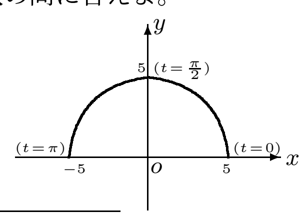
(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（解）$V=2\cdot\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t)^2\cdot|-3\sin t|dt$　$\Longleftarrow\left\{\begin{array}{c}0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\ \text{より}\\ \sin t\geqq 0\ \text{だから}\\ \therefore|\sin t|=\sin t\end{array}\right.$

$$=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=24\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=16\pi \quad 〃$$

2. $x=5\cos t$, $y=5\sin t$ ($0\leqq t\leqq\pi$) で表される曲線を C とするとき、次の問に答えよ。

(1) 曲線 C の長さを求めよ。



（解）$\dfrac{dx}{dt}=5(-\sin t)=-5\sin t$　,　$\dfrac{dy}{dt}=5\cos t$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-5\sin t)^2+(5\cos t)^2}=\sqrt{25\sin^2 t+25\cos^2 t}$$

$$=\sqrt{25(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{25\cdot 1}=\sqrt{25}=5$$

$$L=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\pi}5dt=\Big[\,5t\,\Big]_0^{\pi}=5\pi-0=5\pi \quad 〃$$

(2) 曲線 C を x 軸のまわりに回転してできる回転面の面積を求めよ。

（解）$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-5\sin t)^2+(5\cos t)^2}=\sqrt{25\sin^2 t+25\cos^2 t}$

$=\sqrt{25(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{25\cdot 1}=\sqrt{25}=5$　$\Longleftarrow\left\{\begin{array}{c}\text{この部分は}\\ \text{(1) を利用して}\\ \text{省略してよい。}\end{array}\right.$

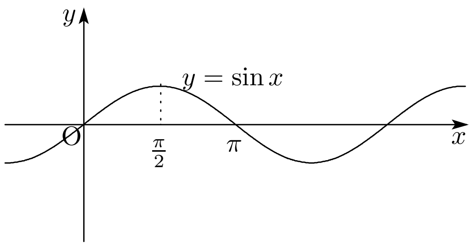
$S=2\pi\displaystyle\int_0^{\pi}|y|\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=2\pi\int_0^{\pi}|5\sin t|\cdot 5\,dt$　$\Longleftarrow\left\{\begin{array}{c}0\leqq t\leqq\pi\ \text{より}\\ \sin t\geqq 0\ \text{だから}\\ \therefore|\sin t|=\sin t\end{array}\right.$

$$=50\pi\int_0^{\pi}\sin t\,dt=50\pi\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=-50\pi\Big[\cos t\Big]_0^{\pi}$$

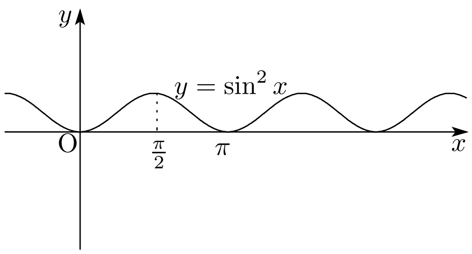
$$=-50\pi(\cos\pi-\cos 0)=-50\pi\{(-1)-1\}=100\pi \quad 〃$$

≪参考≫グラフから、次の関係式が成り立つことが理解できる。

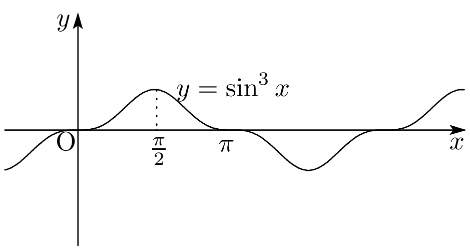
$\Longrightarrow$　よって、（別解 1）のように解くことが可能である。



$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$



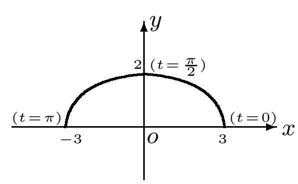
$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$



$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$$

1. 曲線 C ： $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を A とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 図形 A の面積を求めよ。



（別解 1）$\dfrac{dx}{dt} = 3(-\sin t) = -3\sin t$

$$S = \int_0^{\pi} \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt = \int_0^{\pi} |2\sin t \cdot (-3\sin t)|\, dt$$

$$= 6\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 6 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi \quad 〃$$

（別解 2）$\dfrac{dx}{dt} = 3(-\sin t) = -3\sin t$

$$S = \int_0^{\pi} \left| y\frac{dx}{dt} \right| dt = \int_0^{\pi} |2\sin t \cdot (-3\sin t)|\, dt$$

$$= 6\int_0^{\pi} \sin^2 t dt = 6\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 3\int_0^{\pi} (1-\cos 2t) dt = 3\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t \right]_0^{\pi}$$

$$= 3\left\{ \left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) \right\} = 3\left\{ \left(\pi - \frac{1}{2}\cdot 0\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cdot 0\right) \right\} = 3\pi \quad 〃$$

(2) 図形 A を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（別解 1）$V=\pi\displaystyle\int_0^{\pi} y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=\pi\int_0^{\pi}(2\sin t)^2\cdot|-3\sin t|dt$

$=12\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt=12\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=24\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=16\pi$ 〃

（別解 2）$V=\pi\displaystyle\int_0^{\pi} y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=\pi\int_0^{\pi}(2\sin t)^2\cdot|-3\sin t|dt=12\pi\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt$

$=12\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot\sin x\,dt=12\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x dx$

$u=\cos t$ とおくと　$\dfrac{du}{dt}=-\sin x$　　$\therefore(-1)du=\sin x dx$

t	0	$\to$	π
u	1	$\to$	-1

$V=12\pi\displaystyle\int_1^{-1}(1-u^2)(-1)du=12\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)du=12\pi\left[u-\frac{1}{3}u^3\right]_{-1}^{1}$

$=12\pi\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\cdot 1^3\right)-\left(-1-\dfrac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)\right\}=12\pi\cdot\dfrac{4}{3}=16\pi$ 〃

（別解 3）$V=\pi\displaystyle\int_0^{\pi} y^2\left|\frac{dx}{dt}\right|dt=\pi\int_0^{\pi}(2\sin t)^2\cdot|-3\sin t|dt=12\pi\int_0^{\pi}\sin^3 t\,dt$

3 倍角の公式より　$\sin 3t=3\sin t-4\sin^3 t$

$\therefore\sin^3 t=\dfrac{1}{4}(3\sin t-\sin 3t)$　であるから

$V=12\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(3\sin t-\sin 3t)dt=3\pi\int_0^{\pi}(3\sin t-\sin 3t)dt$

$=3\pi\left[3(-\cos t)-\dfrac{1}{3}(-\cos 3t)\right]_0^{\pi}=3\pi\left[-3\cos t+\dfrac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{\pi}$

$=3\pi\left\{\left(-3\cos\pi+\dfrac{1}{3}\cos 3\pi\right)-\left(-3\cos 0+\dfrac{1}{3}\cos 0\right)\right\}$

$=3\pi\left\{-3\cdot(-1)+\dfrac{1}{3}\cdot(-1)+3\cdot 1-\dfrac{1}{3}\cdot 1\right\}=3\pi\left(6-\dfrac{2}{3}\right)=3\pi\cdot\dfrac{16}{3}=16\pi$ 〃